М. Хадущинъ
А. Кирпичников

И. Е. Михалевскій.

Преподават. Императорскаго Техническаго училища.

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРІЯ.

Лекціи, читанныя въ Техническомъ Училищѣ
въ $190^8/_9$ ак. году.

Издано съ разрѣшенія автора
студентомъ М. А. Дмитріевымъ.

МОСКВА,
Типо-Литографія Ю. ВЕНЕРЪ, преемн. О. Фалькъ,
Петровка, Рахмановскій пер., д. Грачева,
1908.

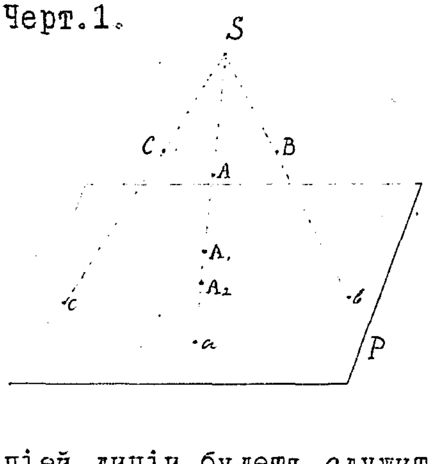
ВВЕДЕНІЕ.

Начертательной геометріей разсматриваются способы составленія точныхъ изображеній предметовъ на плоскости. Изображеніе можно назвать точнымъ, когда оно даетъ полное представленіе о размѣрахъ, формѣ и относительномъ положеніи отдѣльныхъ частей предмета. Для цѣлей техники точныя изображенія имѣютъ громадное значеніе, такъ какъ позволяютъ передавать свои мысли не только о предметахъ дѣйствительно существующихъ, но и воображаемыхъ; пользуясь ими, можно разсматривать невидимыя на самихъ предметахъ детали, сравнивать удаленные одинъ отъ другого предметы и т.д., поэтому съ давнихъ поръ ученые инженеры занимались изысканіемъ удобнаго способа изображенія тѣлъ. Наконецъ эта задача была съ успѣхомъ разрѣшена во второй половинѣ XVIII вѣка французскимъ инженеромъ Гаспаромъ Монжемъ, который и положилъ начало наукѣ начертательной геометріи. Въ основѣ ея лежитъ методъ проекціи, къ которому мы и приступаемъ.

ПОНЯТІЕ О ПРОЕКЦІИ.

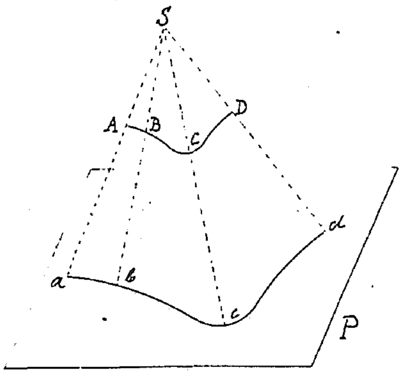
Вообразимъ, что въ пространствѣ дана точка S и плоскость P (черт.1). Возьмемъ въ пространствѣ произвольную точку A и проведемъ черезъ S и A прямую до пересѣченія съ плоскостью P въ точкѣ a. Тогда точка a, по отношенію къ A, называется ея полярною или центральною п р о е к ц і е ю, S - п о л ю с о м ъ, Sa - п р о е к ти-р у ю щ е й прямою, а P - п л о с к о с т ь ю п р о е к-ц і й. Подобно точкѣ A можно построить центральную проекцію ъ и всякой точки пространства B. Такой способъ проектированія называется способомъ центральныхъ проекцій. Такъ какъ каждая изъ прямыхъ SA или SB пересѣкаетъ плоскость P только въ одной точкѣ, то каждой точкѣ пространства соотвѣтствуетъ одна проекція на плоскости P. Если на проектирующей SA возьмемъ рядъ точекъ: A_1, A_2....., то очевидно, что ихъ проекціи совпадутъ съ a, которая поэтому будетъ геометрическимъ мѣстомъ проекцій всѣхъ точекъ проектирующей SA. Такимъ образомъ, при данномъ положеніи полюса и плоскости проекцій, всякой точкѣ пространства соотвѣтствуетъ одна проекція, а всякой проекціи соотвѣтствуетъ безконечное множество точекъ пространства, которыя будутъ лежать на прямой, соединяющей эту проекцію съ полюсомъ.

Черт. 1.



Точно такъ же находится проекція линіи. Пусть AD (черт. 2) - данная кривая, S-полюсъ, P - плоскость проекцій. Такъ какъ всякую линію можно разсматривать какъ геометрическое мѣсто точекъ, то проекціей линіи будетъ служить геометрическое мѣсто проекцій этихъ точекъ, которое, кромѣ частныхъ случаевъ, будетъ линія кривая. Итакъ, полярною или центральною проекціею какой-либо

Черт.2.

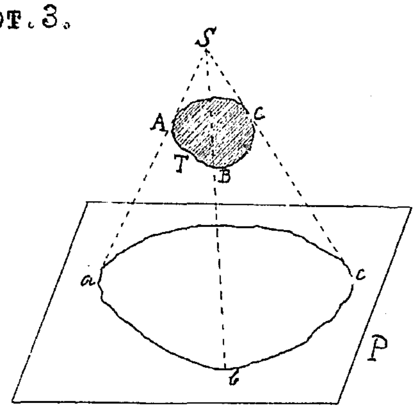


линіи служитъ кривая линія abcd. Коническая же поверхность Sabcd назыв. п р о е к т и р у ю щ е ю п о в е р х н о с т ь ю.

Проекція abcd можетъ быть разсматриваема какъ линія сѣченія плоскости P съ проектирующей конической поверхностью, т.е. съ поверхностью, вершина которой есть полюсъ, а направляющею - данная линія AD. Поэтому центральная проекція линіи называется еще к о н и ч е с к о ю. При данномъ положеніи полюса S, плоскости проекцій P, линіи AD соотвѣтствуетъ единственная и вполнѣ опредѣленная проекція abcd, которая измѣняется только при измѣненіи положенія S и P; если же будетъ дана проекція abcd, то кривыхъ въ пространствѣ, ей соотвѣтствующихъ, будетъ безчисленное множество, которыя будутъ расположены на конической поверхности, имѣющей вершину въ полюсѣ S, при направляющей AD данной кривой.

Если въ пространствѣ дана площадь, ограниченная кривой, то подобнымъ же образомъ можно построить ея проекцію. Пусть T (черт.3) - данная площадь, S - полюсъ, P -плоскость проекцій. Построивши проекціи различныхъ точекъ данной площади, мы получимъ проекцію данной площади на плоскости P. Понятно, что эта проекція будетъ ограничена кривой abc, которая есть проекція кривой линіи ABC, ограничивающей пло-

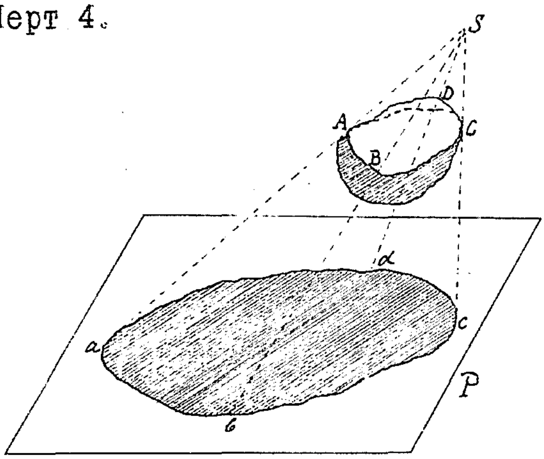
Черт. 3.



щадь T. При данномъ положеніи полюса и плоскости проекцій, площади ABC соотвѣтствуетъ единственная и опредѣленная проекція; обратное же заключеніе не вѣрно.

Построимъ теперь проекцію тѣла. Пусть дано тѣло произвольной формы ABCD, полюсъ

Черт 4.

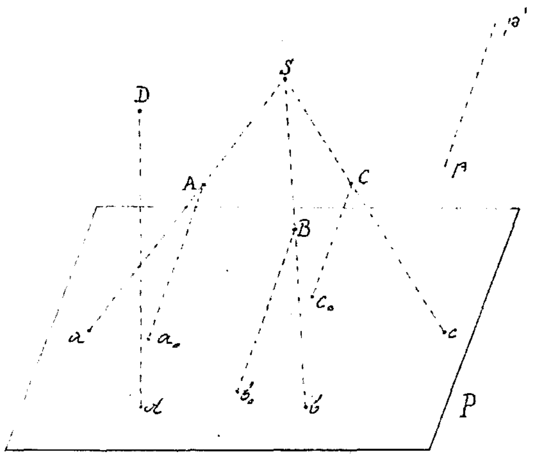


S и плоскость проекцій P (черт.4). Для этого строимъ проекціи различныхъ точекъ тѣла, совокупность которыхъ и составитъ проекцію тѣла. Совокупность же проектирующихъ линій различныхъ точекъ тѣла составитъ сплошной коническій пучокъ, сѣченіе поверхности котораго плоскостью P дастъ кривую abcd, ограничивающую проекцію даннаго тѣла, на плоскости P. Поверхность проектирующаго пучка называется огибающей поверхностью тѣла. Линія abcd называется контуромъ проекціи тѣла. Всякое тѣло имѣетъ только одну проекцію на плоскости P, а всякой проекціи можетъ соотвѣтствовать безчисленное множество тѣлъ, имѣющихъ общій огибающій конусъ.

Если (черт.1-4) предположимъ, что въ полюсѣ S будетъ находиться свѣтящаяся точка, то отъ нея по всѣмъ направленіямъ будутъ распространяться свѣтовые лучи; тѣ изъ нихъ, которые встрѣтятъ тѣло, дадутъ на плоскости P - тѣнь. Дѣйствительно, если на пути свѣтового луча Sa будетъ находиться матеріальная непрозрачная точка A, то онъ, освѣтивъ ее, не можетъ достигнуть точки a, которая поэтому будетъ въ тѣни; эта тѣнь назыв. падающею отъ точки на плоскости P. Понятно, что кривая abcd сѣченія съ плоскостью P огибающаго конуса SABCD ограничитъ на ней тѣнь, называемую падающею тѣнью тѣла на плоскости P. Огибающій конусъ SABCD - кривой касанія ABCD къ тѣлу раздѣлитъ его на освѣщенную и темную части; темная часть тѣла называется его собственною тѣнью, а кривая касанія ABCD - линіей отдѣла освѣщенной части тѣла отъ неосвѣщенной. Такимъ образомъ, на центральную проекцію можно смотрѣть какъ на тѣнь, падающую отъ тѣла или данной системы матеріальныхъ точекъ на разсматриваемую плоскость. Если въ полюсѣ S (черт.4) помѣстимъ глазъ наблюдателя, то тогда центральная проекція обращается въ перспективное изображеніе. Дѣйствительно, тогда отъ abc въ глазъ наблюдателя будутъ падать тѣ же самые лучи, что и отъ тѣла ABC, и будутъ производить такое же впечатлѣніе. Такимъ образомъ, на центральную проекцію можно смотрѣть какъ на перспективу. Плоскость проекцій P, которой въ этомъ случаѣ даютъ вертикальное положеніе и помѣщаютъ ее между точкой зрѣнія S и даннымъ предметомъ, называется картиною. На перспективномъ изображеніи всякое тѣло представляется намъ такимъ, какимъ мы его видимъ, или можемъ видѣть въ дѣйствительности, смотря изъ опредѣленной точки зрѣнія.

Если предположимъ, что точка зрѣнія вмѣстѣ съ полюсомъ удаляется въ безконечность по направленію pp' (черт. 5), тогда центральная проекція a, b, c... данной системы точекъ обращается въ параллельную a_o, b_o, c_o ......, а проектирующія линіи - въ прямыя Aa_o, Bb_o, Cc_o... параллельныя pp'; съ другой стороны она обращается въ перспективу; поэтому на параллельную проекцію a_o, b_o, c_o .... можно смотрѣть какъ на перспективное изображеніе данной системы точекъ при условіи, что точка зрѣнія находится въ безконечности. Понятно, что для построенія параллельной проекціи системы точекъ необходимо знать направленіе проектированія pp', и тогда, проведя изъ A, B, C.... прямыя Aa_o, Bb_o, Cc_o .... параллельно pp' до встрѣчи съ плоскостью P, получимъ искомыя проекціи a_o, b_o, c_o .... Если параллельную проекцію разсматривать съ конечнаго разстоянія, то изображенное на ней тѣло должно представляться намъ такимъ, какимъ видѣть его мы въ дѣйствительности не можемъ. Несмотря на невѣрность или несогласіе этихъ изображеній съ дѣйствительностью, ими постоянно пользуются въ техникѣ, какъ изображеніями условными. Условность эта заключается въ томъ, что предметъ изображается не такимъ,

Черт. 5.



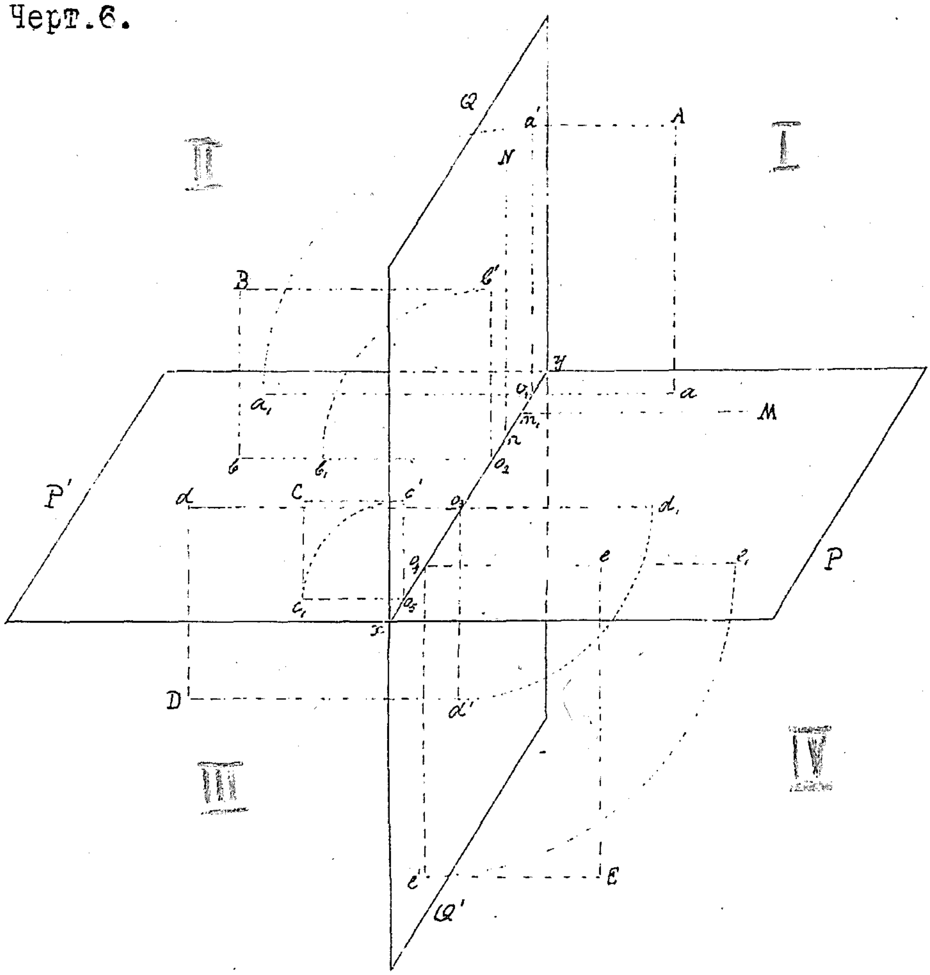
какимъ мы можемъ видѣть его въ дѣйствительности, а какимъ мы могли бы только его видѣть при соблюденіи невыполнимаго, впрочемъ, условія - удаленія отъ предмета на безконечно большое разстояніе. Широкое пользованіе такими условными изображеніями объясняется тѣмъ, что какъ построеніе такихъ изображеній, такъ равно и пользованіе ими при рѣшеніи тѣхъ или иныхъ геометрическихъ задачъ относительно изображенныхъ на нихъ предметовъ, является весьма простымъ, удобнымъ, чего нельзя сказать про изображенія перспективныя.

Параллельныя проекціи раздѣляются на ортогональныя или прямоугольныя и наклонныя. Ортогональная проекція получается въ томъ случаѣ, когда направленіе pp' перпендикулярно плоскости проекцій, если же pp' наклонно къ плоскости проекцій P, то такая параллельная проекція носитъ названіе наклонной. Чтобы построить ортогональную проекцію данной точки D (черт.5), надо изъ нея опустить на плоскость проекцій P перпендикуляръ. Точка d пересѣченія этого перпендикуляра съ плоскостью P и будетъ искомой. Для данной системы точекъ ортогональныхъ проекцій - одна, наклонныхъ же безчисленное множество, такъ какъ съ измѣненіемъ направленія проектированія измѣняются и проекціи. Займемся прежде всего разсмотрѣніемъ ортогональной проекціи, такъ какъ въ зависимости отъ нея строятся обыкновенно центральная и наклонная проекціи.

ОРТОГОНАЛЬНАЯ ПРОЕКЦІЯ.

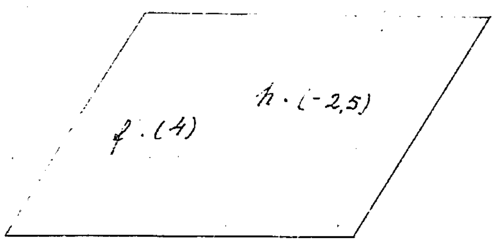
Построеніе изображенія предмета на плоскости сводится къ построенію изображенія точки и линіи; поэтому разсмотримъ прежде построеніе ортогональной проекціи точки. Въ ортогональной проекціи положеніе точки пространства опредѣляется относительно двухъ взаимно-перпендикулярныхъ плоскостей, изъ которыхъ одной дается вертикальное положеніе, а другой - горизонтальное. Пусть горизонтальная плоскость проекцій -PP' (черт.6), а вертикальная - QQ', линія ихъ сѣченія xy называется осью проекцій, которая дѣлитъ плоскости проекцій на двѣ части: вертикальную QQ' - на верхнюю Q и

Черт.6.



нижнюю Q'; горизонтальную PP' - на переднюю P и заднюю P'. Пересѣченіемъ плоскостей проекцій образуются 4 двугранныхъ угла, и если продолжить ихъ стороны, то они раздѣлятъ все пространство на 4 части, имѣющія особыя названія: та часть пространства, которая заключается между передней частью горизонтальной и верхней вертикальной, называется первой четвертью; часть, лежащая между верхней вертикальной и задней горизонтальной - второй четвертью; между задней горизонтальной и нижней вертикальной - третьей четвертью и, наконецъ, между нижней вертикальной и передней горизонтальной - четвертой четвертью. Точка пространства можетъ находиться въ каждой изъ четвертей. Возьмемъ точку A въ первой четверти. Построимъ ортогональную проекцію этой точки на горизонтальную плоскость проекцій: для этого изъ A опустимъ на PP' перпендикуляръ; точка пересѣченія его съ PP' - a будетъ **горизонтальная проекція** точки A; линія же Aa - горизонтально-проектирующая. Но одной проекціи недостаточно для опредѣленія положенія точки въ пространствѣ, такъ какъ, если дана проекція a, то, возставивъ изъ нея перпендикуляръ къ плоскости проекцій PP', мы получимъ геометрическое мѣсто безчисленнаго множества точекъ пространства, имѣющихъ проекціею a. Чтобы выразить опредѣленно положеніе точки A, необходимо имѣть еще другое условіе. Если будетъ, напр., извѣстно разстояніе Aa точки отъ горизонтальной плоскости проекцій, тогда положеніе точки А въ пространствѣ можно считать опредѣленнымъ, такъ какъ, возстановивъ изъ а къ РР' перпендикуляръ и отложивъ на немъ разстояніе аА, получимъ единственную и вполнѣ опредѣленную точку А. Разстояніе отъ точки до плоскости проекцій называется о т м ѣ т к о й точки, а методъ опредѣленія точки въ пространствѣ при помощи отмѣтокъ носитъ названіе м е т о д а о т м ѣ т о к ъ. При этомъ методѣ можно пользоваться одной плоскостью проекцій. Отмѣтки пишутся около проекцій (черт.7) и, такъ какъ разстояніе можно откладывать въ обѣ стороны, то сопровождаются знаками плюсъ или минусъ. Напр. (черт.7), точка F, проекція которой - f, должна находиться въ пространствѣ выше плоскости Р на разстояніи 4 единицъ мѣры длины, точка же Н, проекція которой - h, ниже плоскости Р на разстояніи 2,5 единицъ мѣры длины. Методъ отмѣтокъ мы разсматривать не будемъ. Обращаемся къ ортогональной проекціи.

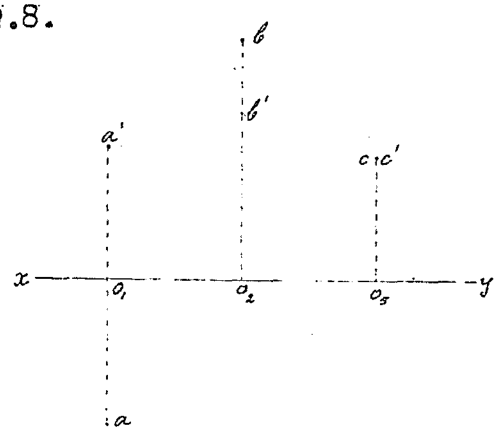
Черт.7.



Мы видѣли, что одной проекціи для опредѣленія положенія точки въ пространствѣ недостаточно; строимъ другую ея проекцію. Для этого изъ точки А (черт.6) опускаемъ перпендикуляръ на вертикальную плоскость проекцій; основаніе его - а' называется в е р т и к а л ь н о й п р о е к ц і е й точки А, а линія Аа' - в е р т и к а л ь н о - п р о е к т и р у ю щ е й л и н і е й. Двѣ проекціи вполнѣ опредѣляютъ положеніе точки въ пространствѣ; дѣйствительно, если даны проекціи a и a', то, возстановивъ изъ нихъ перпендикуляры къ соотвѣтствующимъ плоскостямъ проекцій и найдя точку ихъ пересѣченія, мы получимъ искомую, единственную точку пространства; на этомъ основаніи вмѣсто точки пространства разсматриваютъ ея проекціи, и поэтому въ начертательной геометріи подъ словами „данная точка" подразумѣвается - даны двѣ ея проекціи, а „построить точку" значитъ: найти ея проекціи. Горизонтальная проекція точки обозначается соотвѣтствующей малой буквой, вертикальная - той же малой буквой со значкомъ наверху. Чтобы задаться проекціями точки, надо знать условія, которымъ онѣ должны удовлетворять, такъ какъ не всякія двѣ точки, взятыя на плоскостяхъ проекцій, могутъ служить проекціями точки пространства. Выведемъ эти условія; для этого проведемъ черезъ Aa и Aa' плоскость, которая будетъ перпендикулярна къ плоскостямъ PP' и QQ', а, слѣдовательно, перпендикулярна и линіи ихъ пересѣченія, т.е. оси проекцій xy, и пересѣчетъ плоскости проекцій по прямымъ ao, и o, a', перпендикулярнымъ оси xy. Отсюда видно, что, если изъ a и a' опустить перпендикуляры на xy, то они пересѣкутся съ ней въ одной и той же точкѣ o, . Если это условіе выполняется, то взятыя точки можно считать за проекціи точки пространства. Изъ прямоугольника Aao, a' видно, что Aa' = ao, и Aa = a'o, ; это выражаетъ, что разстояніе точки отъ горизонтальной плоскости проекцій равно разстоянію вертикальной проекціи отъ оси, а разстояніе точки пространства отъ вертикальной плоскости проекцій равно разстоянію горизонтальной проекціи отъ оси; такимъ образомъ, если вмѣсто точки будемъ разсматривать ея проекціи, то будемъ знать ея разстояніе отъ обѣихъ плоскостей проекцій. Замѣтимъ, что плоскости проекцій считаются непрозрачными.

Въ замѣнѣ точки ея проекціями состоитъ методъ проекцій, но для того, чтобы имѣть возможность поступать такимъ образомъ, необходимо имѣть двѣ взаимно-перпендикулярныя плоскости, а такъ какъ цѣль начертательной геометріи - доставить удобный способъ изображать предметы на одной плоскости, то поступаютъ слѣдующимъ образомъ: совмѣщаютъ вертикальную плоскость съ горизонтальной или обратно, вращая одну изъ плоскостей около оси xy. Оставимъ горизонтальную плоскость неподвижной, а вертикальную будемъ вращать такъ, чтобы верхняя ея часть совпала съ задней горизонтальной плоскостью проекцій. При этомъ вращеніи точка a' будетъ описывать дугу круга, потому что она во время вращенія будетъ находиться отъ оси xy на постоянномъ разстояніи $a'o_{,,}$, которое служитъ радіусомъ вращенія. Такъ какъ $a'o_{,} \perp xy$, то она останется перпендикулярной и при совмѣщеніи плоскостей. При описанномъ нами совмѣщеніи плоскостей проекція a' совпадетъ съ $a_{,,}$, а линія $a'o_{,}$ займетъ положеніе $a_{,}o_{,}$; но $o_{,}a_{,} \perp xy$ и $o_{,}a \perp xy$, слѣдовательно $o_{,}a_{,}$ и $o_{,}a$ составятъ одну прямую, перпендикулярную xy, а потому проекціи точки A расположатся по обѣ стороны оси на одной прямой, перпендикулярной къ xy. Допустимъ, что прямая xy (черт.8) представляетъ ось проекцій;

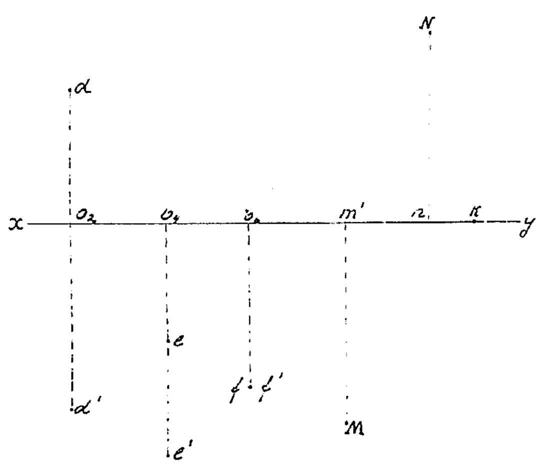
Черт.8.



тогда, если часть плоскости, лежащая выше xy, представляетъ совмѣщеніе верхней вертикальной съ задней горизонтальной плоскостью, то часть плоскости, лежащая ниже xy - совмѣщеніе нижней вертикальной съ передней горизонтальной. По такому чертежу будемъ представлять положеніе точки въ пространствѣ; на немъ $a'o_1$ выражаетъ возвышеніе точки пространства A надъ горизонтальной плоскостью проекцій, а ao_1 - удаленіе ея отъ вертикальной. Теперь разсмотримъ расположеніе проекцій точки, лежащей во второй четверти. Возьмемъ во второй четверти точку B (черт.6); проекціи ея суть ъ и ъ'. Будемъ совмѣщать вертикальную плоскость проекцій съ горизонтальной, вращая ее въ ту же сторону; точка ъ' упадѣтъ въ $ъ_1$, а прямая $ъ'o_2$ займетъ положеніе b_1o_2; но b_1o_2 и $ъ'o_2$ перпендикулярны оси; слѣдовательно $ъ'o_2$ и b_1o_2 составятъ одну прямую, перпендикулярную къ xy. На совмѣщенномъ чертежѣ обѣ проекціи расположатся (черт.8) выше xy на одномъ перпендикулярѣ къ оси. При этомъ можетъ быть ъ' ближе къ оси или ъ, смотря по тому, къ какой изъ плоскостей проекцій ближе точка B. Въ нашемъ случаѣ B ближе къ горизонтальной плоскости проекцій, слѣдовательно вертикально-проектирующая больше горизонтально-проектирующей, а стало-быть и разстояніе горизонтальной проекціи отъ оси больше разстоянія вертикальной проекціи до оси, т.е. $o_2b > o_2b'$. Если (черт.6) точка C отстоитъ на равномъ разстояніи отъ обѣихъ плоскостей проекцій, то обѣ проектирующія равны и проекціи c и c' совпадутъ на совмѣщенномъ чертежѣ (черт.8).

Если возьмемъ точку D въ третьей четверти (черт.6) и построимъ ея проекціи d и d'., то при вращеніи вертикальной плоскости въ ту же сторону, на совмѣщенныхъ плоскостяхъ горизонтальная проекція окажется выше xy, а вертикальная ниже, на одномъ перпендикулярѣ къ xy, т.е. расположеніе проекціи будетъ обратно расположенію проекцій точки, лежащей въ первой четверти (черт.9). Если точка E будетъ лежать въ четвертой четверти (черт.6), то, какъ видно изъ чертежа, въ совмѣщенномъ положеніи обѣ проекціи будутъ находиться ниже оси xy, причемъ ближе къ оси можетъ лежать или горизонтальная, или вертикальная проекція, смотря по тому, къ которой изъ плоскостей проекцій ближе точка пространства E.

Черт.9.



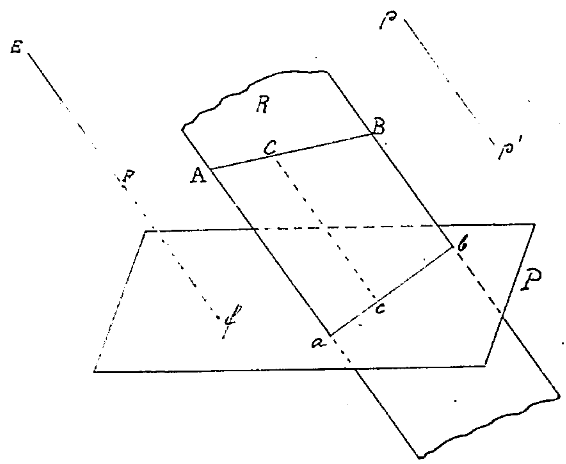
Если точка F отстоитъ на равномъ разстояніи отъ обѣихъ плоскостей проекцій, то проекціи совпадутъ (черт.9). Такимъ образомъ, точкѣ пространства въ каждой четверти соотвѣтствуетъ опредѣленное расположеніе проекцій. Разсмотримъ частные случаи положенія точки. Пусть точка M лежитъ на одной изъ плоскостей проекцій, напр. на горизонтальной, тогда горизонтальной проекціей ея будетъ сама точка M, а вертикальной - точка m', лежащая на оси xy, такъ какъ проектирующая Mm' вся лежитъ въ горизонтальной плоскости проекцій по теоремѣ: „линія, перпендикулярная къ одной изъ двухъ взаимно-перпендикулярныхъ плоскостей, совпадаетъ съ другой, если имѣетъ съ ней одну общую точку" (черт.6 и 9). Проекціи точки N, лежащей на вертикальной плоскости, будутъ: вертикальной - сама точка N, а горизонтальной - n, на оси проекцій. Если точка лежитъ на оси xy, какъ напр. точка K, то обѣ ея проекціи совпадутъ съ самой точкой (черт.9).

Разсматривая ортогональныя проекціи, какъ условныя изображенія тѣлъ или иныхъ системъ точекъ, мы должны допустить, что всякая вертикальная проекція представляетъ собою изображеніе системы точекъ въ предположеніи расположенія точки зрѣнія или глаза наблюдателя на безконечно-большомъ разстояніи отъ плоскости QQ', а что всякая горизонтальная проекція представляетъ собою изображеніе той же системы, но въ предположеніи расположенія точки зрѣнія на безконечно большомъ разстояніи отъ плоскости PP'. Въ обоихъ случаяхъ, кромѣ того, предполагается, что наблюдатель занимаетъ всегда одинаковое положеніе надъ плоскостью PP' и передъ плоскостью QQ', слѣдовательно - гдѣ-то въ предѣлахъ перваго угла пространства. Вслѣдствіе предполагаемой непрозрачности плоскостей проекцій, для наблюдателя, расположеннаго въ предѣлахъ перваго угла, дѣйствительно - видимыми могутъ быть только тѣ точки и линіи, которыя лежатъ въ предѣлахъ того же 1-го угла; точки же и линіи, лежащія въ остальныхъ углахъ, не будутъ видимы.

ПРОЕКЦІИ ПРЯМОЙ.

Прямыя линіи, какъ и точки, опредѣляются проекціями.

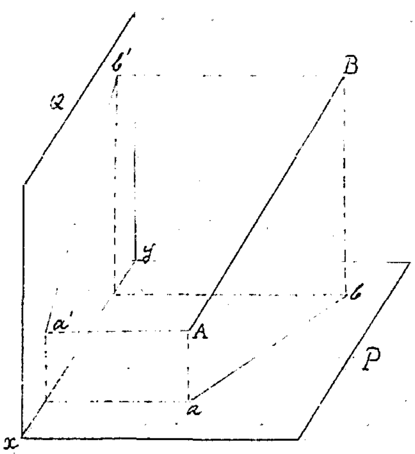
Черт.10.



Проекціей даннаго отрѣзка АВ (чер.10) называется геометрическое мѣсто проекцій различныхъ точекъ отрѣзка. Докажемъ, что проекціею прямой при всякомъ направленіи проектированія служитъ прямая и только въ частномъ случаѣ, когда направленіе проектированія параллельно данной прямой, послѣдняя проектируется въ точку. Для этого построимъ проекціи двухъ какихъ-либо точекъ А и В данной прямой АВ, т.е. а и b, соединимъ ихъ прямой и докажемъ, что проекція всякой другой точки отрѣзка на ту же плоскость Р, напр. С, лежитъ на прямой аb. Чтобы построить проекціи точекъ А и В, проводимъ черезъ нихъ проектирующія линіи параллельно направленію проектированія pp'. Точки встрѣчи послѣднихъ съ плоскостью Р - а и b суть наклонныя проекціи А и В. Вообразимъ плоскость R, проходящую черезъ двѣ параллельныя прямыя

Aa и Bb. Эта плоскость будетъ параллельна pp', такъ какъ проходитъ черезъ прямыя Aa и Bb, параллельныя pp', и пересѣчетъ плоскость P по прямой ab. Если на прямой AB возьмемъ точку C и проведемъ черезъ нее прямую Cc, параллельную pp', то она всѣми точками совпадетъ съ плоскостью R, и поэтому точка c встрѣчи ея съ плоскостью P будетъ лежать на прямой ab; но точка c есть проекція точки C. Такимъ образомъ, мы доказали, что проекція произвольной точки C, лежащей на прямой AB, находится на прямой, соединяющей проекціи двухъ произвольныхъ точекъ данной прямой, слѣдовательно эта прямая будетъ геометрическимъ мѣстомъ проекцій всѣхъ точекъ прямой, т.е. ея проекціей. Такъ какъ положеніе прямой ab на плоскости P опредѣляется вполнѣ точно положеніемъ двухъ какихъ-либо ея точекъ, то для построенія проекціи прямой надо построить проекціи двухъ ея точекъ и соединить ихъ прямой линіей или же черезъ данную прямую провести плоскость параллельно направленію проектированія pp'; пересѣченіе ея съ плоскостью P и опредѣлитъ искомую проекцію. Эта плоскость называется проектирующей, а прямая ab — наклонною или косоугольною проекціею прямой AB. Если данная прямая EF параллельна pp', то ея косоугольной проекціей будетъ точка f. Въ ортогональной проекціи направленіе проектированія pp' перпендикулярно къ плоскости проекціи P, поэтому, чтобы построить ортогональную проекцію прямой, надо построить ортогональныя проекціи двухъ ея точекъ и соединить ихъ прямой. Если разсматривается отрѣзокъ прямой, то для полученія его проекціи строятся проекціи конечныхъ его точекъ. Пусть (черт.11) данъ отрѣзокъ прямой АВ, лежащей какъ-нибудь въ пространствѣ; требуется построить его ортогональныя проекціи. Строимъ ортогональныя проекціи конечныхъ его точекъ А и В. Для этого опускаемъ на плоскость проекцій Р и Q перпендикуляры изъ точекъ А и В. Подошвы ихъ a, a', b и b' будутъ проекціями конечныхъ точекъ. Соединивъ ихъ прямыми, получимъ проекціи ab и a'b' даннаго отрѣзка АВ. Ортогональныя проекціи прямой можно построить также, проведя черезъ нее двѣ плоскости, перпендикулярныя плоскостямъ проекцій, при чемъ плоскость, проходящая черезъ двѣ проектирующія aA и bB, называется г о р и з о н т а л ь н о - п р о е к т и р у ю щ е й, а проходящая черезъ проектирующія a'A и b'B - в е р т и к а л ь н о - п р о е к т и р у ю щ е й. Двумя проекціями на двухъ взаимно-перпендикулярныхъ плоскостяхъ проекцій прямая пространства вполнѣ опредѣляется; дѣйствительно, если даны двѣ проекціи прямой, то, вообразивъ двѣ плоскости, проходящія черезъ нихъ и перпендикулярныя плоскостямъ проекцій, мы получимъ единственную и вполнѣ опредѣленную линію ихъ сѣченія, которая и будетъ прямой, соотвѣтствующей даннымъ проекціямъ. Итакъ, двѣ проекціи вполнѣ опредѣляютъ положеніе прямой въ пространствѣ; поэтому вмѣ-

Черт.11.



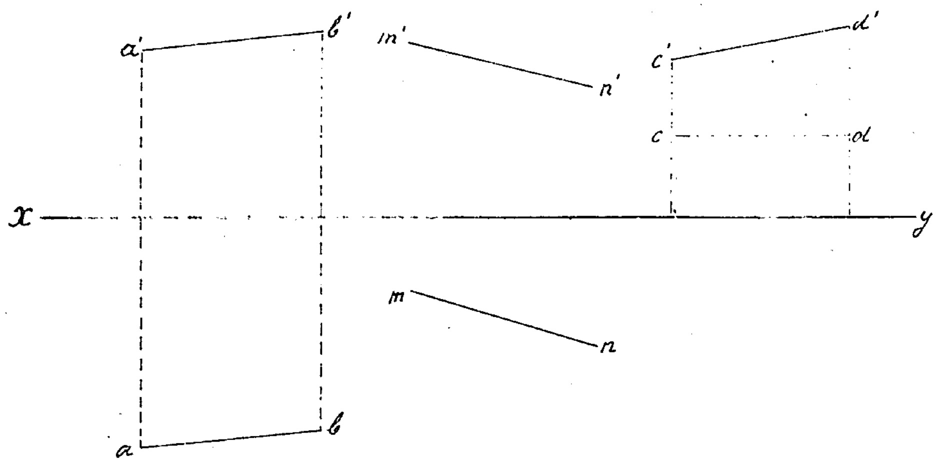
сто прямой мы можемъ разсматривать ея проекціи и подъ словами: „дана прямая" будемъ подразумѣвать: „даны двѣ ея проекціи", а подъ словами: „построить прямую" - „построить двѣ ея проекціи". Прямая, данная проекціями, пишется такъ:(ab,a'b'), при чемъ ab обозначаетъ горизонтальную проекцію данной прямой, а a'b' - ея вертикальную проекцію. Если разсматриваются проекціи отрѣзка прямой, то онѣ обозначаются двумя буквами на каждой плоскости проекціи, при чемъ берутся проекціи крайнихъ точекъ. Если же разсматривается прямая неопредѣленной длины, то проекціи ея обозначаются или одной буквой на каждой плоскости проекцій, или двумя, при чемъ въ послѣднемъ случаѣ эти буквы могутъ и не соотвѣтствовать одной точкѣ прямой, какъ это бываетъ при разсмотрѣніи проекцій отрѣзка.

При совмѣщеніи плоскостей проекцій, проекціи прямой AB получаются на одной плоскости (черт.12), при чемъ вертикальная проекція a'b' выше оси xy, а горизонтальная - ниже. По расположенію проекцій относительно оси xy можно судить о расположеніи прямой относительно плоскостей проекцій. Такъ, напримѣръ, если проекціи наклонены къ оси, то прямая наклонна къ плоскостямъ проекцій.

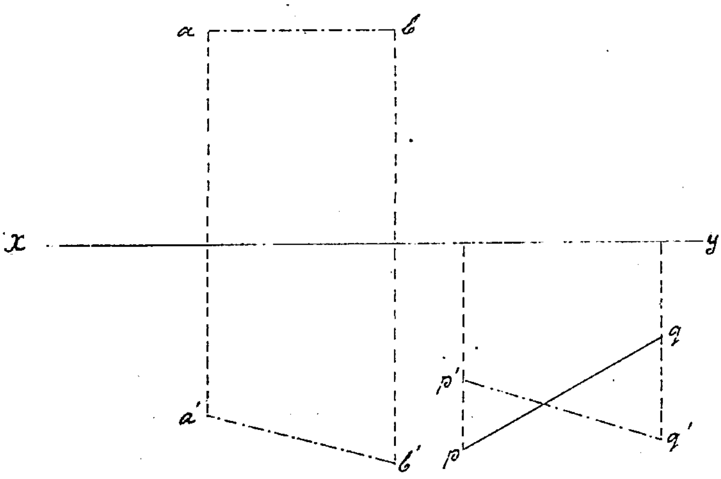
Если отрѣзокъ находится во второй четверти, то проекціи его расположатся выше оси (черт.12, III). Для отрѣзка, находящагося въ третьей четверти, расположеніе проекцій будетъ обратное расположенію проекцій отрѣзка, находящагося въ первой четверти (черт.12, IV). Проекціи отрѣзка, лежащаго въ

Черт.12.

I. II. III.



IV. V.

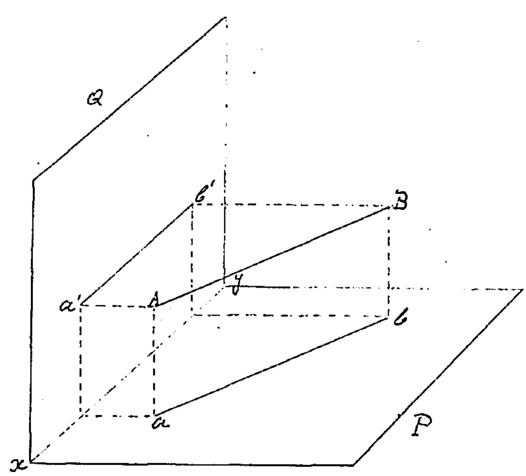


4-ой четверти, расположатся обратно проекціямъ отрѣзка второй четверти, т. е. будутъ ниже оси xy (черт.12, V). При этомъ надо замѣтить, что нѣкоторыя изъ проекцій при предположеніи непрозрачности плоскостей проекцій будутъ невидимы, а именно: во 2-ой четверти - горизонтальная, въ 3-ей - и горизонтальная и вертикальная, въ 4-ой - вертикальная.

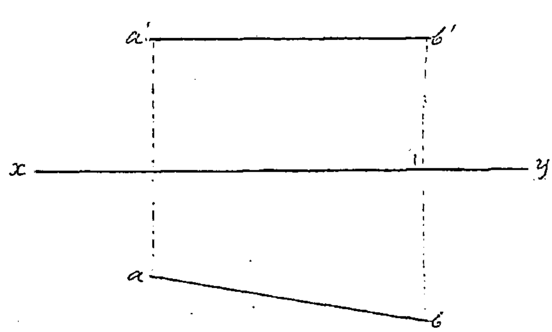
ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ РАСПОЛОЖЕНІЯ ПРЯМОЙ ВЪ ПРОСТРАНСТВѢ.

Если прямая параллельна одной изъ плоскостей проекцій, то проекція ея на другую плоскость будетъ параллельна оси, а на первую можетъ имѣть какое угодно положеніе. Положимъ, прямая АВ (черт.13) параллельна горизонтальной плоскости Р. Докажемъ, что вертикальная ея проекція а'ъ' параллельна оси ху, а горизонтальная аъ можетъ имѣть какое угодно положеніе. Чтобы доказать, что а'ъ' параллельна оси ху, замѣтимъ, что АВ, будучи параллельна плоскости Р, отстоитъ отъ нея всѣми своими точками на одномъ и томъ же разстояніи и потому вертикальныя проекціи этихъ точекъ равно удалены отъ оси ху и геометрическое мѣсто ихъ даетъ прямую, параллельную оси ху. Слѣдовательно, а'ъ' параллельна ху.

Черт.13.

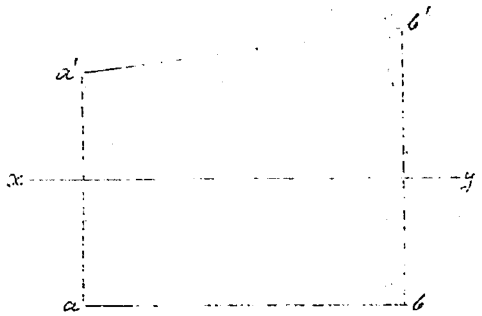


Черт.14.

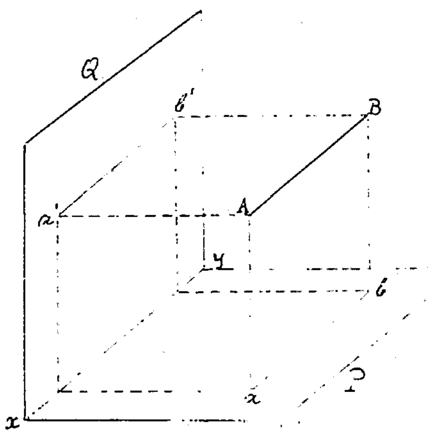


Совмѣщенное положеніе показано на черт. 14-мъ. Обратно, если а'ъ' параллельна ху, то АВ // Р (черт.13). Дѣйствительно, АВ лежитъ въ вертикально-проектирующей плоскости Аа'ъ'В, параллельной плоскости Р, вслѣдствіе того, что пересѣкающіяся прямыя а'ъ' и а'А параллельны Р, поэтому АВ параллельна Р. Если прямая параллельна вертикальной плоскости

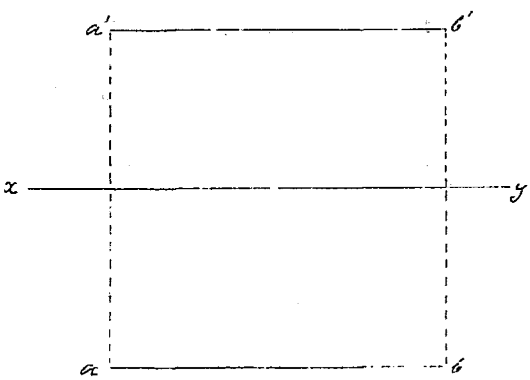
Черт.15.



Черт.16.



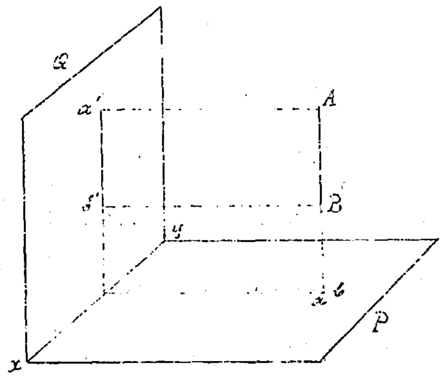
Черт.17.



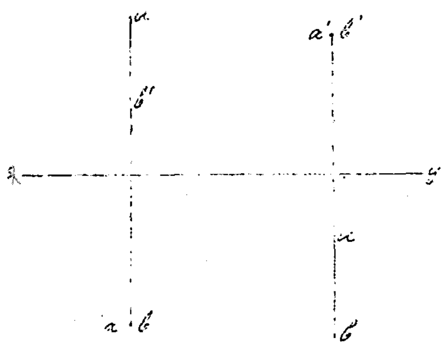
проекцій, то ея горизонтальная проекція параллельна оси, а вертикальная расположится какъ угодно, какъ это показано на черт. 15-мъ. Если прямая параллельна оси проекцій xy, напр. прямая AB (черт.16), то проекціи ея будутъ параллельны оси (черт.17). Обратно, если ab параллельна xy и a'b' параллельна xy, то и AB параллельна xy (черт.16).

Если прямая перпендикулярна одной изъ плоскостей проекцій (чер.18), то проекція ея на эту плоскость будетъ точка, а на другую - прямая, перпендикулярная къ оси проекцій. Положимъ, что прямая AB перпендикулярна къ плоскости P, тогда ея горизонтальной проекціей будетъ служить точка a, а вертикальной - прямая a'b', перпендикулярная къ оси xy. Для доказательства замѣтимъ, что вертикально-проектирую-

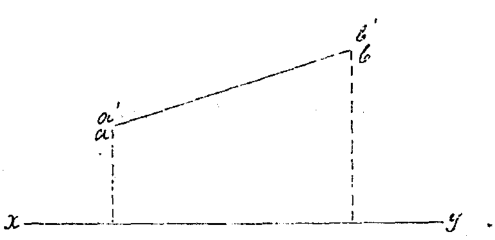
Черт.18.



Черт.19.



Черт.20.

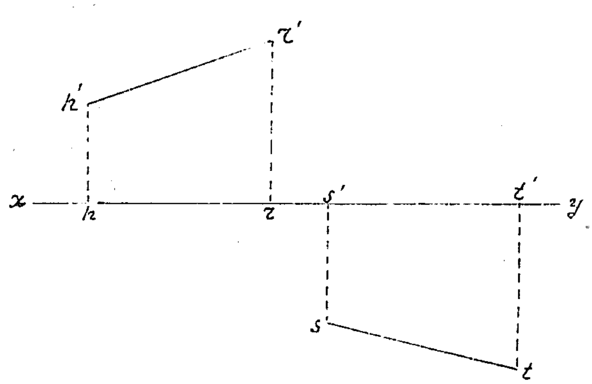


щая плоскость a'b'BA будетъ перпендикулярна и къ плоскости Q; точно такъ же эта плоскость a'b'BA будетъ перпендикулярна и къ плоскости P, потому что проходитъ черезъ линію AB, перпендикулярную къ этой плоскости; но „если плоскость перпендикулярна къ двумъ пересѣкающимся плоскостямъ, то она перпендикулярна и къ линіи ихъ пересѣченія", а потому a'b'BA будетъ перпендикулярна къ xy и, слѣдовательно, всякая линія этой плоскости будетъ перпендикулярна къ xy, а потому a'b' ⊥ xy. Если прямая перпендикулярна къ плоскости вертикальной, то ея вертикальной проекціей будетъ точка, а горизонтальной - прямая, перпендикулярная оси проекцій. На совмѣщенныхъ плоскостяхъ такія прямыя расположатся, какъ показано на черт. 19-мъ.

Если горизонтальная проекція совпадетъ съ вертикальной (черт.20), то прямая пространства расположена такъ, что всѣ точки ея отстоятъ на равномъ разстояніи отъ обѣихъ плоскостей проекцій, т.е. она лежитъ въ плоскости, дѣлящей уголъ между плоскостями проекцій пополамъ. Дѣйствительно, прямая(аъ, а'ъ') (черт.20) представляетъ собою совмѣщеніе горизонтальной и вертикальной проекцій данной прямой, и такъ какъ, во-первыхъ, обѣ проекціи лежатъ выше ху и, во-вторыхъ, совмѣщаются, то мы можемъ заключить, что данная прямая лежитъ во второй четверти и всѣ ея точки равно отстоятъ отъ обѣихъ плоскостей проекцій, т.е. эта прямая лежитъ въ плоскости, дѣлящей второй уголъ пополамъ.

Если прямая лежитъ на одной изъ плоскостей проекцій, то она сама будетъ служить одной проекціей, другая же проекція будетъ совпадать съ осью ху, такъ какъ проектирующія всѣхъ точекъ данной прямой будутъ совпадать съ той плоскостью, на которой лежитъ данная прямая (черт.21). Прямая

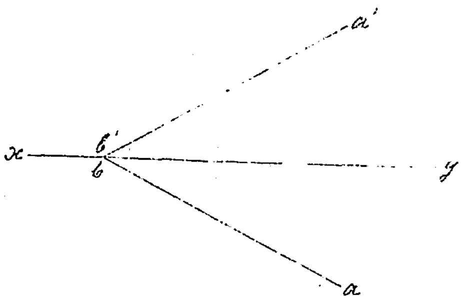
Черт.21.



(h r, h'r') лежитъ на верхней вертикальной плоскости проекцій; прямая же (st, s't') - на передней горизонтальной.

Если проекціи пересѣкаютъ ось ху въ одной точкѣ, то и соотвѣтствующая имъ прямая пересѣкаетъ ху въ той же точкѣ, такъ какъ эта точка представляетъ собою обѣ проекціи нѣкоторой точки прямой пространства, а если

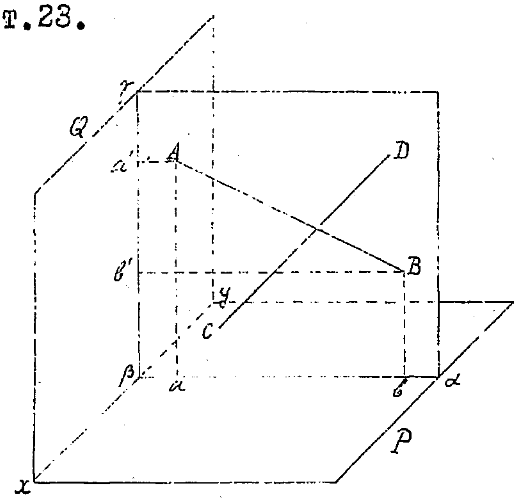
Черт.22.



проекціи точки пространства лежатъ на оси xy, то и сама точка лежитъ на этой оси, стало-быть данная прямая и ось имѣютъ общую точку, т.е. пересѣкаются (черт.22).

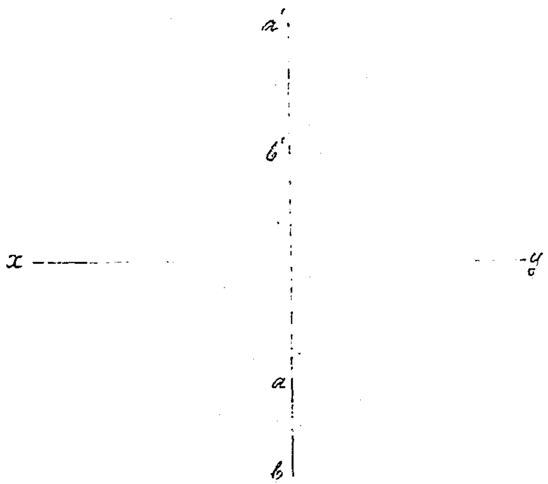
Кромѣ двухъ плоскостей проекцій горизонтальной и вертикальной въ начертательной геометріи разсматривается еще плоскость, называемая *профильной плоскостью*. Профильной плоскостью называется плоскость, перпендикулярная оси xy. Такимъ образомъ, если плоскость $\alpha\beta\gamma$ (чертежъ 23) перпендикулярна xy, то она есть профильная плоскость. При этомъ линіи сѣченія этой плоскости съ плоскостями проекцій, т.е. $\alpha\beta$ и $\beta\gamma$ будутъ перпендикулярны къ оси проекцій xy. Если прямая пространства находится въ профильной плоскости, напр. прямая AB, то проекціями ея будутъ горизонтальная ab - на линіи $\alpha\beta$, а вертикальная a'b' - на $\beta\gamma$.

Черт.23.



Проекціями эта прямая не опредѣляется, потому что, если черезъ проекціи проведемъ проектирующія плоскости, то онѣ совпадутъ съ плоскостью $\alpha\beta\gamma$ и за линію ихъ пересѣченія можно принять всякую прямую плоскости $\alpha\beta\gamma$. Если прямую АВ будемъ перемѣщать по плоскости $\alpha\gamma\beta$, давая ей различныя положенія, напр. CD (черт.23), то ея горизонтальная проекція будетъ перемѣщаться по $\alpha\beta$, а вертикальная - по $\beta\gamma$. Такъ какъ прямыя $\alpha\beta$ и $\beta\gamma$ перпендикулярны къ оси ху, то и совмѣщенныя ихъ положенія будутъ перпендикулярны къ оси ху; поэтому проекціи прямой, лежащей въ профильной плоскости $\alpha\beta\gamma$, расположатся на одномъ перпендикулярѣ къ оси (черт.24). Въ этомъ

Черт.24.

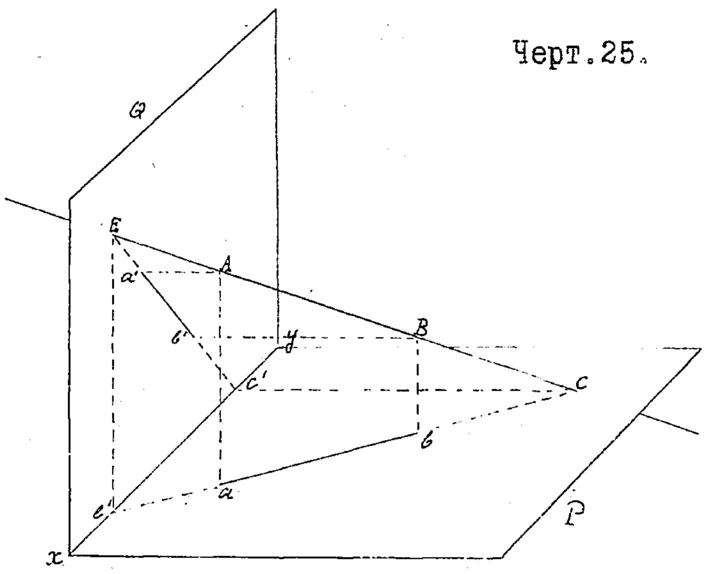


случаѣ прямая задается проекціями крайнихъ точекъ, такъ что точки (аа' и bb') суть проекціи крайнихъ точекъ отрѣзка. Способъ, позволяющій наглядно видѣть расположеніе въ пространствѣ прямой, лежащей въ профильной плоскости, мы разсмотримъ при изученіи такъ называемаго метода совмѣщенія.

СЛѢДЫ ПРЯМОЙ И ИХЪ ПОСТРОЕНІЕ.

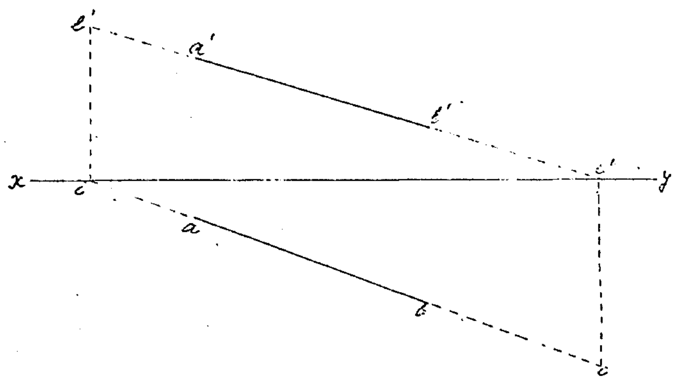
Зная проекціи прямой, легко построить точки, въ которыхъ она пересѣкаетъ плоскости проекцій; эти точки называются ея слѣдами на плоскостяхъ проекцій. Построеніе слѣдовъ прямой служитъ, какъ къ выясненію ея положенія въ пространствѣ, такъ и къ рѣшенію другихъ вопросовъ. Прямая вообще имѣетъ два слѣда: горизонтальный и вертикальный. Пересѣченіе прямой съ горизонтальной плоскостью проекцій называется горизонтальнымъ слѣдомъ, а пересѣченіе ея съ вертикальною плоскостью - вертикальнымъ. Если прямая параллельна одной изъ плоскостей проекцій, то она имѣетъ одинъ слѣдъ на той плоскости, которой она не параллельна; прямая, параллельная оси проекціи, не имѣетъ слѣдовъ, потому что она параллельна обѣимъ плоскостямъ проекцій. Разсмотримъ, какимъ образомъ находятся слѣды прямой по ея проекціямъ.

Черт. 25.



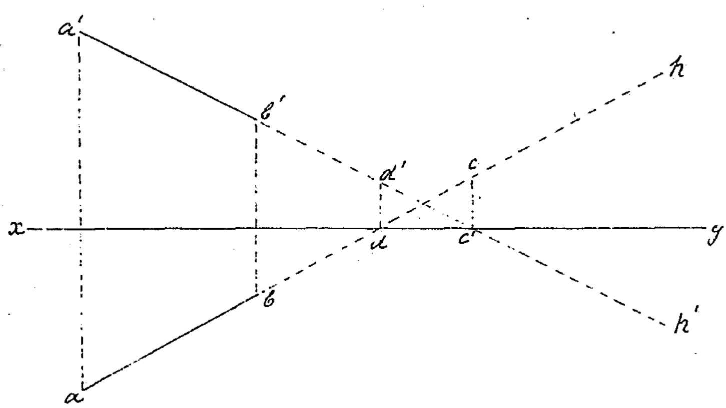
Пусть AB (чертежъ 25) - данный отрѣзокъ, ab и a'b' - его проекціи. Тогда E будетъ вертикальнымъ слѣдомъ AB, а C - горизонтальнымъ. Горизонтальной проекціей горизонтальнаго слѣда служитъ сама точка C, лежащая на горизонтальной плоскости проекцій, вертикальная же проекція горизонтальнаго слѣда должна лежать, во-первыхъ, на продолженіи вертикальной проекціи a'b', такъ какъ точка C лежитъ на продолженіи AB, во-вторыхъ, на оси, такъ какъ C лежитъ на плоскости проекцій, слѣдовательно вертикальной проекціей горизонтальнаго слѣда будетъ служить точка пересѣче-

Черт. 26.



нія продолженія вертикальной проекціи данной прямой съ осью проекцій. Подобнымъ же разсужденіемъ мы можемъ притти къ выводу, что горизонтальная проекція вертикальнаго слѣда должна лежать въ точкѣ пересѣченія продолженія горизонтальной проекціи данной прямой AB съ осью xy, т.е. въ точкѣ e'. Отсюда вытекаетъ способъ построенія слѣдовъ прямой пространства, данной проекціями. Пусть (ab, a'b') - данная прямая (черт.26) при совмѣщенныхъ плоскостяхъ проекцій. Для построенія горизонтальнаго слѣда продолжимъ вертикальную проекцію a'b' до пересѣченія ея съ осью xy въ точкѣ c'; затѣмъ изъ точки c' возставляемъ перпендикуляръ къ xy и находимъ точку пересѣченія его съ продолженіемъ горизонтальной проекціи ab - c, которая и будетъ искомымъ слѣдомъ. Для построенія вертикальнаго слѣда находимъ точку пересѣченія продолженія горизонтальной проекціи съ осью xy - e, возставляемъ изъ нея перпендикуляръ къ xy и строимъ точку его пересѣченія съ продолженіемъ вертикальной проекціи, именно точку e', которая и будетъ вертикальнымъ слѣдомъ прямой пространства AB. Если эту прямую продолжимъ за точку E, то обѣ ея проекціи будутъ выше оси xy, слѣдовательно продолженіе ея будетъ находиться во второй четверти; если же продолжимъ за точку C, то обѣ проекціи будутъ ниже оси и прямая будетъ находиться въ четвертой четверти; стало-быть данная прямая проходитъ черезъ вторую, первую и четвертую четверти, и въ первой четверти она идетъ отъ C, удаляясь отъ горизонтальной плоскости до точки E, а во второй и четвертой четвертяхъ еще болѣе будетъ удаляться отъ горизонтальной плоскости. Такимъ образомъ, построивъ слѣды, мы вполнѣ опредѣлили положеніе прямой въ пространствѣ.

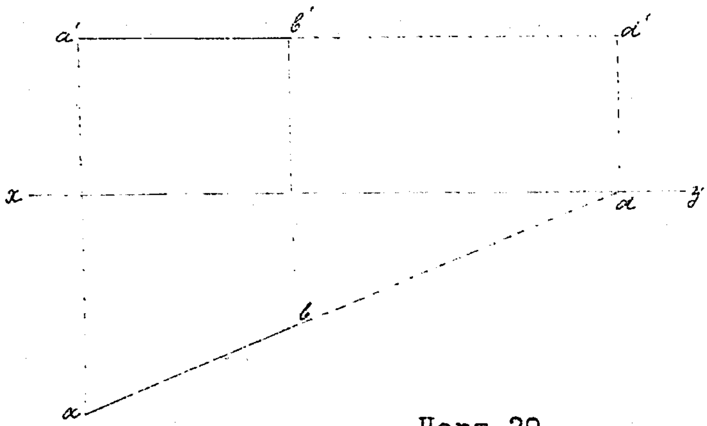
Черт.27.



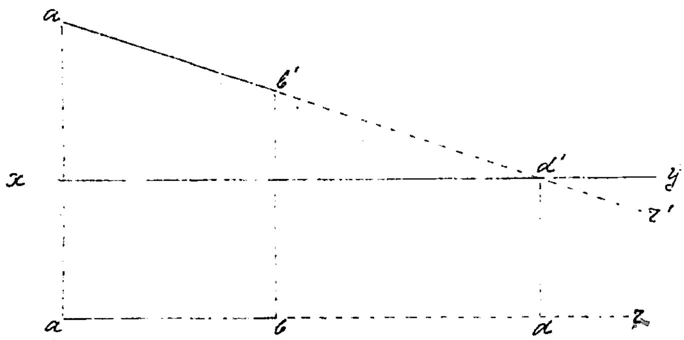
Прилагая выведенное правило къ построенію слѣдовъ прямой (ab, a'b') (черт.27), найдемъ, что горизонтальнымъ слѣдомъ ея будетъ точка c, а вертикальнымъ - d'; точка c' будетъ вертикальной проекціей горизонтальнаго слѣда, а d - горизонтальной проекціей вертикальнаго слѣда. Отсюда видно, что отрѣзокъ данной прямой (ad, a'd') лежитъ въ первой четверти, а отрѣзокъ между d' и c - во второй четверти. Если продолжить нашу прямую за точку c, то это продолженіе (ch, c'h') будетъ въ третьей четверти.

Прямая (ab, a'b'), параллельная горизонтальной плоскости (черт.28), будетъ имѣть только вертикальный слѣдъ - d', котораго горизонтальная проекція - d.

Черт.28.



Черт.29.

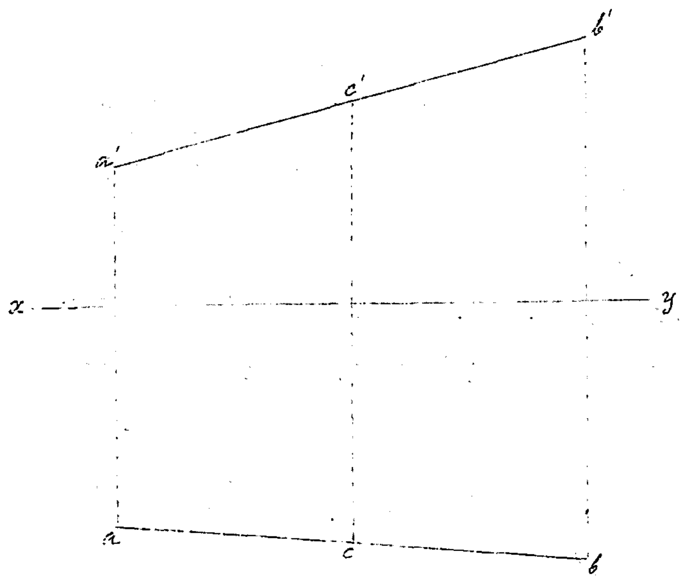


Точно такъ же, если прямая параллельна вертикальной плоскости проекцій, то она имѣетъ только горизонтальный слѣдъ d (черт.29), вертикальная проекція котораго - d'. Если эту прямую продолжимъ за d, то продолженіе ея (dr, d'r') будетъ въ четвертой четверти.

З А Д А Ч А. На прямой, проекціи которой даны, построить точку.

Въ начертательной геометріи подъ построеніемъ точки подразумѣвается построеніе ея проекцій. Положимъ, что дана прямая (ab, a'b') (черт.30). Если точка находится на данной прямой, то и ея проекціи должны лежать на соотвѣтственныхъ проекціяхъ прямой. Такъ какъ въ нашей задачѣ точка берется произвольная, то возьмемъ на горизонтальной проекціи произвольную точку c, которую и будемъ разсматривать, какъ горизонтальную проекцію искомой точки. Вертикальную проекцію точ-

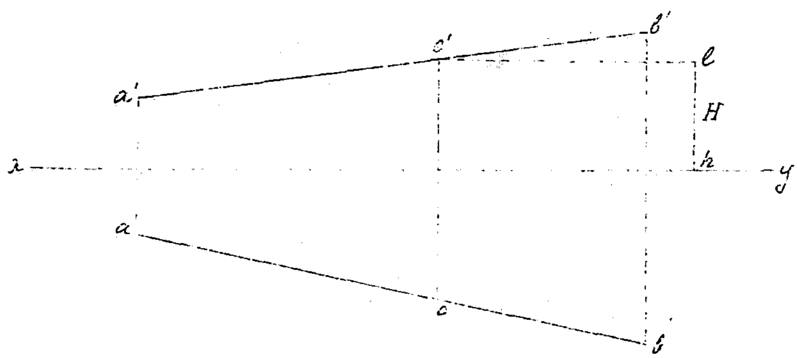
Черт.30.



ки найдемъ, опустивъ перпендикуляръ на ось ху и продолживъ его до пересѣченія съ вертикальной проекціей данной прямой. Полученная точка с' будетъ вертикальной проекціей искомой точки. Итакъ, проекціи с и с' опредѣляютъ точку, лежащую на данной прямой.

З А Д А Ч А. Даны проекціи прямой (ab, a'b'); построить на ней точку, находящуюся отъ горизонтальной плоскости на данномъ разстояніи Н (черт.31).

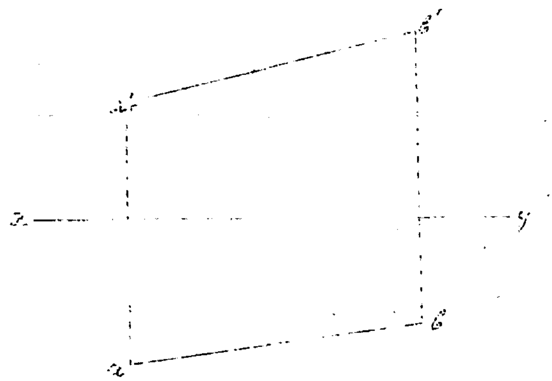
Черт.31.



Возставивъ къ оси ху въ произвольной точкѣ перпендикуляръ вверхъ отложимъ на немъ величину hl =Н и черезъ точку l проведемъ параллель ху до встрѣчи съ a'b' въ точкѣ с', которая будетъ искомой вертикальной проекціей. Другую проекцію точки найдемъ, опустивъ изъ с' перпендикуляръ на ху и продолживъ его до пересѣченія съ ab.

З А Д А Ч А. Провести прямую черезъ двѣ данныя точки (a,a') и (b,b') (черт.32).

Черт.32.

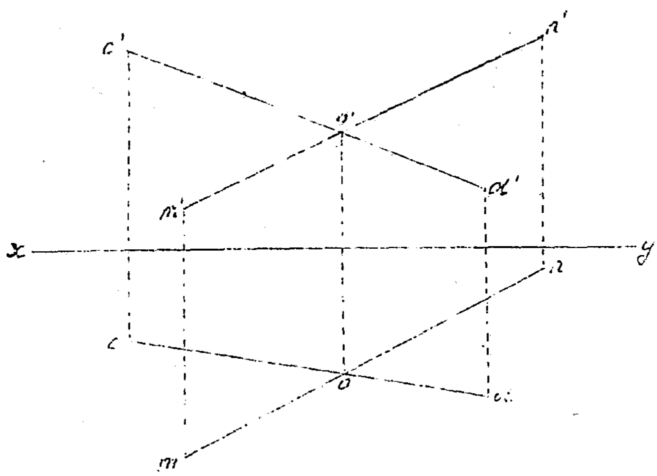


Проекціи искомой прямой проходятъ черезъ соотвѣтствующія проекціи данныхъ точекъ; поэтому, чтобы найти проекцію прямой, a' соединяемъ съ b' и a съ b; получаемъ вертикальную и горизонтальную проекціи искомой прямой.

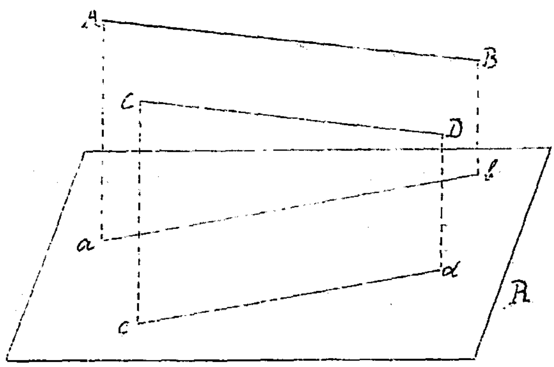
У С Л О В І Я П А Р А Л Л Е Л Ь Н О С Т И И П Е Р Е С Ѣ К А Е М О С Т И П Р Я М Ы Х Ъ В Ъ П Р О С Т Р А Н С Т В Ѣ.

Условіе пересѣкаемости двухъ прямыхъ при всякомъ направленіи проектированія состоитъ въ томъ, что, если прямыя, находящіяся въ пространствѣ, пересѣкаются, то и одноименныя ихъ проекціи тоже пересѣкаются; при чемъ проекціей точки ихъ пересѣченія служитъ точка пересѣченія ихъ проекцій. Въ ортогональной проекціи при совмѣщеніи плоскостей проекцій точки лежатъ на одномъ перпендикулярѣ къ оси xy, какъ проекціи одной и той же точки. Пусть даны двѣ прямыя (cd, c'd') и (mn, m'n'), пересѣкающіяся въ точкѣ o (черт.33); тогда ея проекціи (o,o'), находясь на пересѣченіи проекцій прямыхъ, должны лежать на одномъ перпендикулярѣ къ оси xy. Обратно, если проекціи прямыхъ пересѣкаются и прямая, соединяющая точки ихъ

Черт.33.



Черт.34.



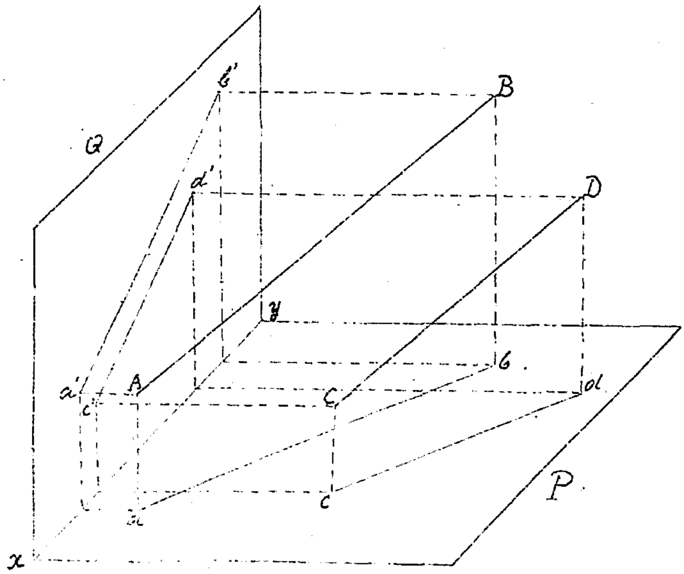
пересѣченія, перпендикулярна къ оси, то и прямыя въ пространствѣ пересѣкаются.

Условіе параллельности прямыхъ состоитъ въ томъ, что, если двѣ прямыя AB и CD параллельны, то и одноименныя ихъ проекціи на всякую плоскость, при всякомъ направленіи проектированія, тоже параллельны.

Положимъ, что проекціи параллельныхъ прямыхъ AB и CD на плоскость R (черт. 34-ый) суть ab и cd; докажемъ, что ab параллельна cd. Замѣтимъ, что проектирующія плоскости CcdD и AabB параллельны, потому что AB параллельна CD и проектирующая Aa параллельна Cc, какъ параллельныя одному и тому же направленію проектированія, и потому двѣ пересѣкающіяся линіи одной плоскости параллельны двумъ пересѣкающимся линіямъ второй и самыя плоскости параллельны; двѣ параллельныя плоскости пересѣкаются третьей по линіямъ параллельнымъ, слѣдовательно ab параллельна cd.

Обратно, если одноименныя ортогональныя проекціи пря-

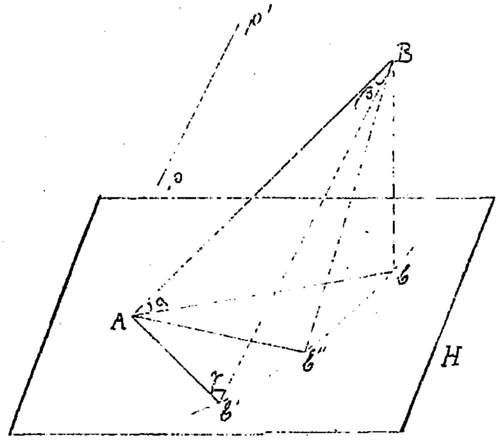
Черт.35.



мыхъ параллельны, то и прямыя, лежащія въ пространствѣ, параллельны. Дано (черт.35), что ab параллельна cd и a'b' параллельн c'd'; докажемъ, что AB параллельна CD. Для этого черезъ ab и cd проведемъ горизонтально-проектирующія плоскости, которыя будутъ параллельны между собой; черезъ a'b' и c'd' проведемъ вертикально-проектирующія плоскости, которыя также параллельны между собой. Такимъ образомъ имѣемъ, что проектирующія плоскости одной соотвѣтственно параллельны проектирующимъ плоскостямъ другой. Эти плоскости пересѣкаются по прямымъ AB и CD. Изъ геометріи извѣстно, что если двугранные углы имѣютъ стороны соотвѣтственно параллельныя, то и ребра ихъ также параллельны. Отсюда видно, что AB параллельна CD. Исключеніе составляютъ прямыя, лежащія въ профильныхъ плоскостяхъ; проекціи такихъ прямыхъ параллельны, но сами прямыя могутъ быть непараллельными, ибо всякая прямая, лежащая въ профильной плоскости, имѣетъ проекціи перпендикулярныя къ оси xy.

Въ ортогональной проекціи, проекція меньше проектируемой прямой, но въ наклонной можетъ быть и больше ея, и меньше.

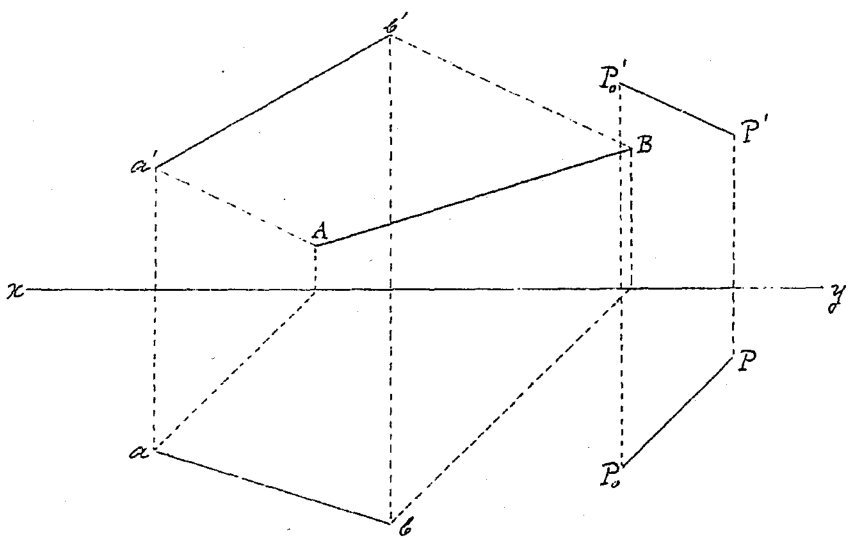
Черт.36.



Чтобы показать это, возьмемъ отрѣзокъ AB и какую-нибудь плоскость проекцій H, при чемъ точка A лежитъ въ плоскости H. Построимъ (черт.36) ортогональную проекцію отрѣзка; для этого изъ точки B опускаемъ перпендикуляръ на плоскость проекцій, подошву его ъ соединяемъ съ точкой A, которая будетъ служить проекціей другой конечной точки отрѣзка AB; прямая Ab будетъ ортогональная проекція даннаго отрѣзка. Если допустимъ, что уголъ, образуемый даннымъ отрѣзкомъ съ его проекціей, т.е. $\angle BAb = \alpha$, то изъ прямоугольнаго треугольника ABЪ имѣемъ: $Ab = AB\cos\alpha$. Если α не равно о, т.е. AB не лежитъ въ плоскости проекцій H и не параллельна ей, то $\cos\alpha < 1$, а слѣдовательно $AB > Ab$, т.е. ортогональная проекція меньше соотвѣтствующаго ей отрѣзка. Теперь построимъ наклонную проекцію AB. Для этого черезъ точку B проведемъ Bъ' параллельно направленію проектированія pp'; точка встрѣчи этой прямой съ плоскостью проекцій H - ъ' будетъ наклонной проекціей точки B, а прямая Ab' - наклонной проекціей даннаго отрѣзка AB. Пусть въ косоугольномъ треугольникѣ ABb' уголъ при вершинѣ ъ' $= \gamma$, а при вершинѣ B $= \beta$. Тогда, если $\beta > \gamma$, то $Ab' > AB$, т.е наклонная проекція больше соотвѣтствующаго ей отрѣзка. Если $\beta = \gamma$, то

Ab' = AB, т.е. проекція равна проектируемому отрѣзку. Если $\beta < \gamma$, то проекція Ab' < отрѣзка AB. Итакъ, наклонная проекція можетъ быть и больше, и равна, и меньше соотвѣтствующаго ей отрѣзка прямой при данномъ направленіи проектированія. Вообще соотношеніе между величинами даннаго отрѣзка и соотвѣтствующей ему проекціи можно выразить равенствомъ: Ab' = nAB, гдѣ n $\lesseqgtr$ 1. Существуетъ много направленій проектированія, при которыхъ сохраняется равенство Ab' = nAB. Дѣйствительно, если изъ точки A, какъ центра, радіусомъ Ab' проведемъ окружность и примемъ произвольную ея точку, напр. b'', за наклонную проекцію точки B, то прямая Ab'' будетъ наклонной проекціей отрѣзка AB, и такъ какъ Ab'' = Ab', какъ радіусы окружности, то Ab'' = nAB - справедливо. Въ этомъ случаѣ проектирующія составляютъ коническую поверхность, у которой вершина - B, а образующія пересѣкаются съ плоскостью H въ точкахъ окружности, центръ которой - A, а радіусъ - Ab'.

Черт.37.

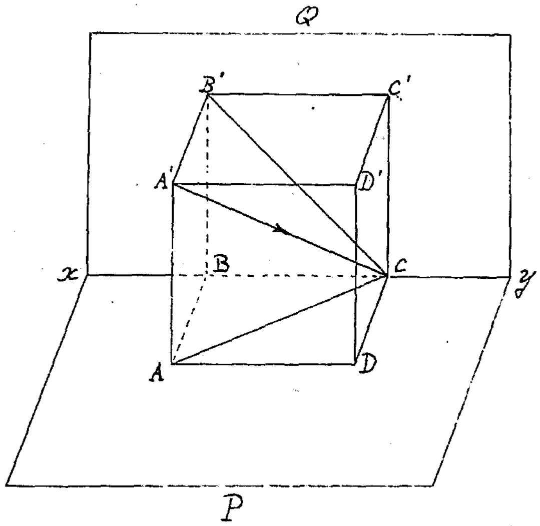


Имѣя ортогональныя проекціи точки или прямой и направленіе проектированія, легко построить ихъ наклонныя проекціи. Пусть (ab, a'b') (черт.37) - проекціи прямой, а (P_0 P,

P_o' P') - направленіе проектированія. Построимъ наклонную проекцію этой прямой. Для этого достаточно построить наклонныя проекціи конечныхъ ея точекъ и соединить ихъ прямой. Построимъ наклонную проекцію конечной точки A. Для этого черезъ точку A проводимъ прямую параллельно направленію проектированія. Чтобы выполнить это на совмѣщенныхъ плоскостяхъ проекцій, надо черезъ a и a' провести прямыя параллельно соотвѣтствующимъ проекціямъ направленія проектированія; эти прямыя будутъ проекціями проектирующей прямой, а построивъ ея слѣдъ на одной изъ плоскостей проекцій, мы получимъ наклонную проекцію точки пространства A. Въ данномъ случаѣ мы беремъ вертикальный слѣдъ потому, что горизонтальный слѣдъ лежитъ на задней горизонтальной плоскости и при допущенной непрозрачности плоскостей проекцій не можетъ служить проекціей точки, лежащей въ первой четверти. Построивъ вертикальный слѣдъ проектирующей, проведенной изъ точки (b,b'), получимъ наклонную проекцію данной прямой. Если допустимъ, что данная точка или прямая матеріальны, проектирующія - солнечные лучи, которые можно принять за параллельные, то наклонная проекція выразитъ падающую тѣнь отрѣзка на вертикальной плоскости.

Въ практикѣ за направленіе солнечнаго луча принимается направленіе діагонали куба, котораго двѣ грани горизонтальны, двѣ параллельны вертикальной плоскости, а остальныя двѣ перпендикулярны оси проекцій. Пусть такой кубъ есть ABCDA'B'C'D' (черт.38), при чемъ грань ABCD совпадаетъ съ го-

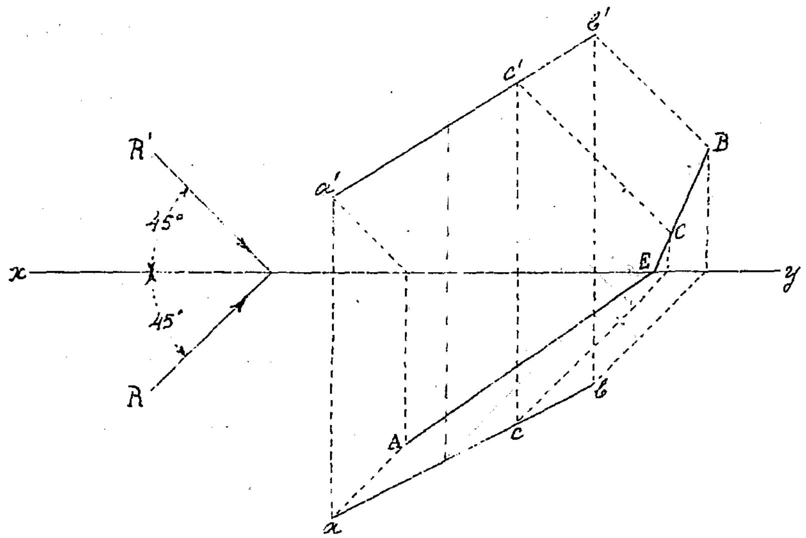
Черт.38.



ризонтальной плоскостью, а ребро БС - съ осью проекцій xy. Діагональ A'C куба принимается за направленіе солнечнаго луча. При такомъ направленіи солнечнаго луча, проекціями его будутъ служить діагонали квадратовъ ABCD и BB'C'C, т.е. прямыя AC и B'C; но такъ какъ діагонали составляютъ со сторонами квадрата углы въ 45°, то проекціи солнечнаго луча будутъ наклонны къ оси проекцій подъ углами въ 45°. Солнечный лучъ одинаково наклоненъ къ обѣимъ плоскостямъ проекцій, что видно изъ равенства угловъ A'CA и A'CB' которые лучъ составляетъ съ плоскостями проекцій. Если примемъ ребро куба за единицу, то $AC = \sqrt{2}$, а изъ треугольника AA'C получимъ: $AC = A'A\,ctg ACA'$; отсюда $ctg ACA' = \frac{AC}{A'A} = \sqrt{2}$, и уголъ ACA' меньше 45°. Такимъ образомъ, проекціи солнечнаго луча наклонены къ оси проекцій подъ углами въ 45°, а самый лучъ съ плоскостью проекцій составляетъ углы A'CA и A'CB', которые меньше 45°. Проекція солнечнаго луча на профильную плоскость DCC'D' выразится діагональю D'C, наклоненной къ плоскостямъ проекцій подъ угломъ въ 45°.

З А Д А Ч А. Построить падающую тѣнь отъ отрѣзка прямой (ab, a'b') на плоскостяхъ проекцій, предполагая, что онъ

Черт.39.

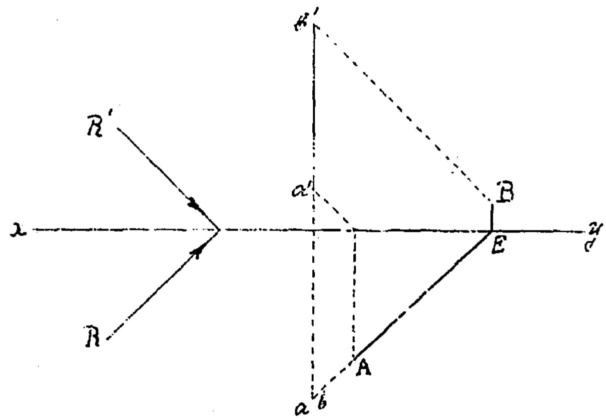


освѣщенъ солнечными лучами (R) (R'). Тѣнь отъ отрѣзка прямой линіи есть прямая, поэтому для построенія тѣни находимъ тѣни отъ крайнихъ точекъ отрѣзка (a,a') и (b,b'), которыми служатъ точки А и В (черт.39). Если бы эти точки помѣстились на одной плоскости, то и падающая тѣнь помѣстилась бы на этой плоскости; въ противномъ случаѣ, какъ это у насъ и есть, тѣнь будетъ лежать на обѣихъ плоскостяхъ проекцій и выразится ломаной линіей АЕВ. Чтобы опредѣлить направленіе тѣни на каждой изъ плоскостей проекцій, беремъ на данной прямой точку (c,c') и строимъ отъ нея тѣнь С, которую соединяемъ съ В, тогда прямая ВЕ выразитъ тѣнь отъ отрѣзка (bc, b'c') на вертикальной плоскости; соединяя Е и А, найдемъ тѣнь на горизонтальной плоскости.

З А Д А Ч А. Построить падающую тѣнь на плоскостяхъ проекцій отъ отрѣзка (ab, a'b'), перпендикулярнаго къ горизонтальной плоскости (черт.40).

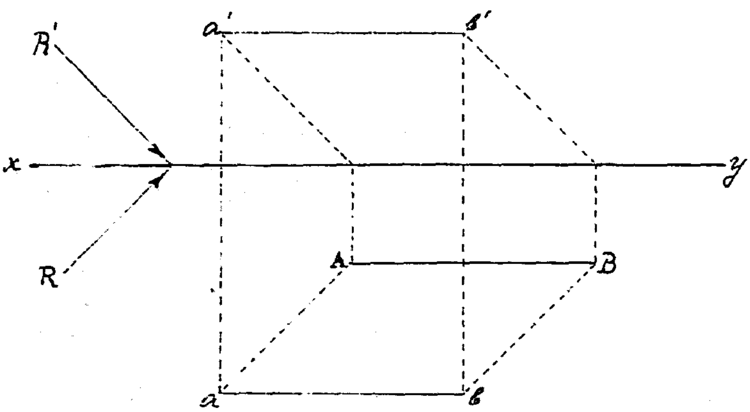
Поступая согласно предыдущему, найдемъ, что падающая тѣнь выразится ломаной АЕВ, при чемъ тѣнь на горизонтальной

Черт.40.



плоскости будетъ параллельна горизонтальной проекціи луча, а на вертикальной - перпендикулярна къ оси ху. Тѣнь отъ отрѣзка (аъ, а'ъ'), параллельнаго (черт.41)

Черт.41.



оси проекцій, выразится прямою АВ, параллельной оси и равной длинѣ самаго отрѣзка, что очевидно.

З А Д А Ч И.

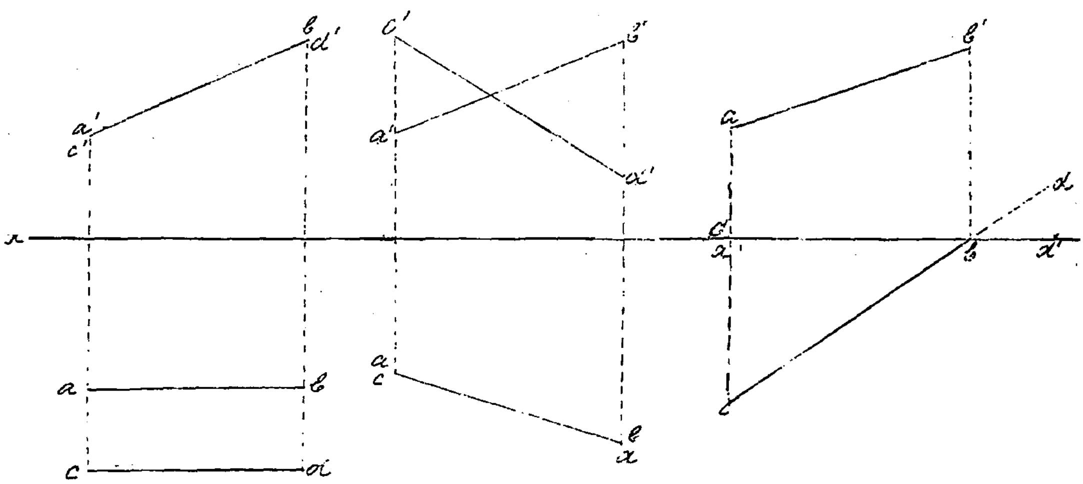
Опредѣлить, какое относительное положеніе занимаютъ линіи:

1) Если ихъ вертикальныя проекціи сливаются, а горизонтальныя параллельны (черт.42).

2) Если горизонтальныя проекціи сливаются, а вертикальныя пересѣкаются (черт.43).

3) Если горизонтальная проекція (аъ) одной и вертикальная (c'd') другой сливаются съ осью, а вертикальная (а'ъ') первой и горизонтальная (cd) второй пересѣкаютъ ось (черт.44).

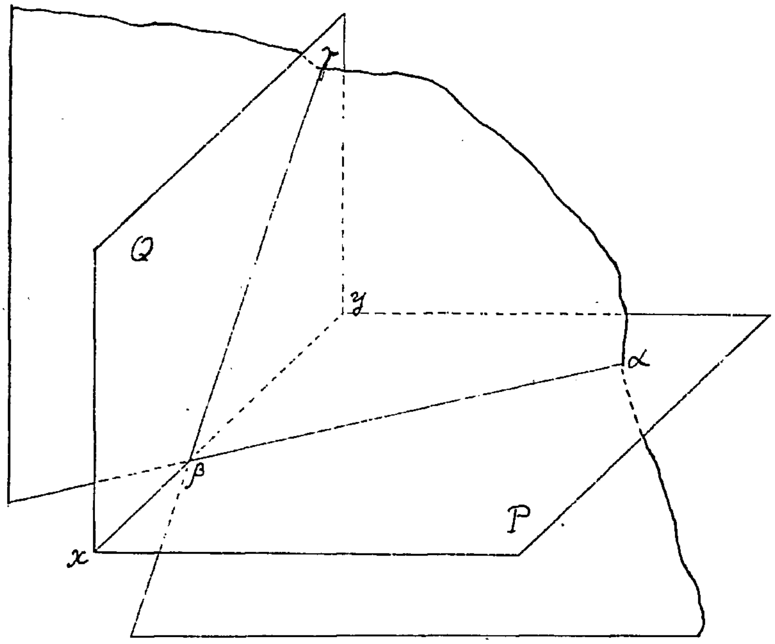
Черт.42. Черт.43. Черт.44.



О ПЛОСКОСТИ.

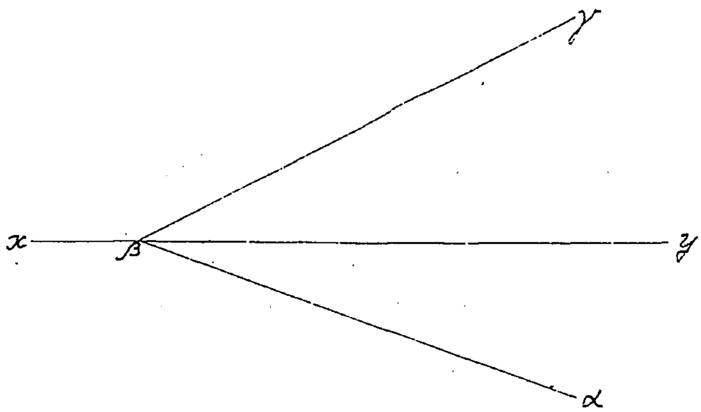
Проекція плоскости на какую-нибудь плоскость есть также плоскость, поэтому она не можетъ быть опредѣлена проекціями. Плоскость опредѣляется тѣми же элементами, какъ и въ геометріи: двумя пересѣкающимися прямыми, прямой и точкой, тремя точками и двумя параллельными прямыми. Чаще плоскость опредѣляется двумя пересѣкающимися прямыми, именно тѣми, по которымъ она пересѣкаетъ плоскости проекцій. Эти прямыя называются слѣдами плоскости. Вообще, плоскость имѣетъ два слѣда -горизонтальный и вертикальный. Пересѣченіе данной плоскости съ горизонтальной плоскостью проекцій называется горизонтальнымъ слѣдомъ, съ вертикальной - вертикальнымъ. Положимъ, разсматривается часть плоскости $\alpha\beta\gamma$, которая лежитъ въ первой четверти (черт.45), тогда $\alpha\beta$ - линія сѣченія съ горизонтальной плоскостью проекцій - будетъ горизонтальнымъ слѣдомъ, а $\beta\gamma$ - линія пересѣченія съ вертикальной плоскостью - вертикальнымъ

Черт.45.



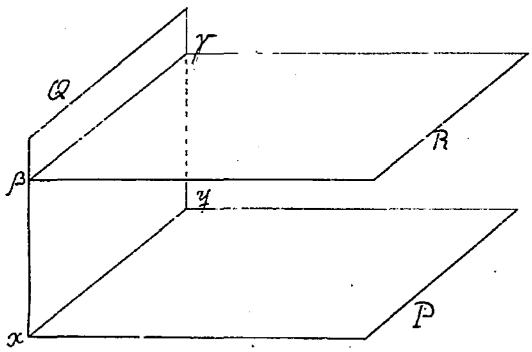
слѣдомъ. Этими линіями и опредѣляется положеніе плоскости, такъ что, если даны слѣды, то дана и плоскость и подъ словами: „построить плоскость"надо подразумѣвать построеніе ея слѣдовъ. Совмѣстимъ плоскости проекцій, тогда въ совмѣщенномъ положеніи слѣды расположатся по обѣ стороны оси ху или по одну; это зависитъ отъ того, въ какой части пространства расположена плоскость (черт. 46-ой), но при этомъ уголъ $\alpha\beta\gamma$ не равенъ углу, который составляютъ слѣды въ пространствѣ, потому что данная плоскость вмѣстѣ съ плоскостями проекцій составляетъ трехгранный уголъ, вершина котораго находится въ β, и уголъ $\alpha\beta\gamma$ (черт.45), одинъ изъ плоскихъ угловъ; но извѣстно, что плоскій уголъ менѣе суммы остальныхъ плоскихъ уг-

Черт.46.



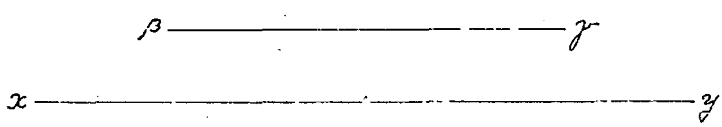
ловъ въ трехгранномъ углѣ, такимъ образомъ $\angle \alpha\beta\gamma < \angle \alpha\beta y + \angle y\beta\gamma$ На совмѣщеннсмъ же положеніи оказывается, что уголъ $\alpha\beta\gamma$ въ нашемъ случаѣ равенъ суммѣ остальныхъ плоскихъ. По расположенію слѣдовъ можно судить и о расположеніи плоскости относительно плоскостей проекцій: если слѣды пересѣкаютъ ось, то плоскость наклонена къ плоскостямъ проекцій, и обратно, если плоскость пересѣкаетъ ось, то слѣды

Черт.47.

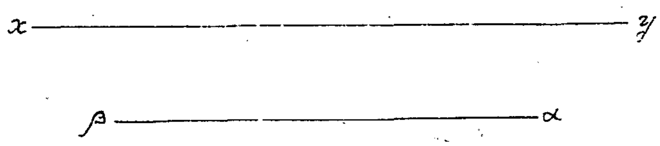


ея пересѣкаютъ ось xy; если плоскость параллельна одной изъ плоскостей проекцій, то слѣдъ на другой параллеленъ xy. Положимъ (черт.47), плоскость R параллельна P, тогда вертикальный слѣдъ $\beta\gamma$ параллеленъ оси, потому что параллельныя плоскости пересѣкаются третьей по линіямъ параллельнымъ. На совмѣщенныхъ плоскостяхъ такая плоскость выразится прямой $\beta\gamma$, параллельной xy (черт.48). На черт. 49

Черт.48.

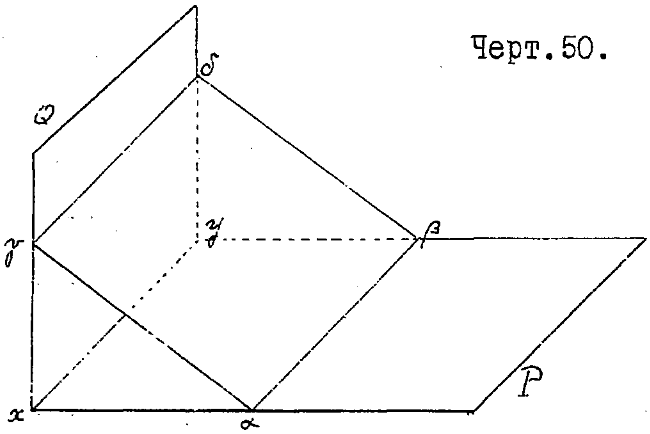


Черт.49.



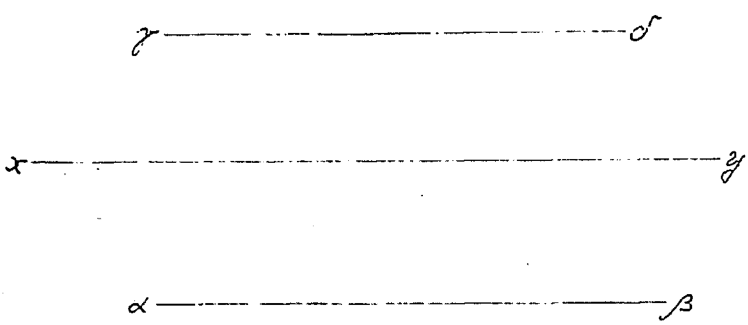
показана плоскость $\alpha\beta$, параллельная вертикальной плоскости. Если плоскость параллельна xy, но не параллельна ни одной изъ плоскостей проекцій, то оба ея слѣда будутъ параллелъ

Черт.50.

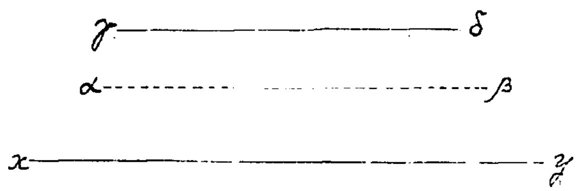


ны оси xy (чертежъ 50-ый) на основаніи теоремы: „если плоскость параллельна прямой, лежащей въ другой плоскости, то она пересѣкается съ другой плоскостью по линіи, параллельной данной прямой"; на совмѣщенныхъ плоскостяхъ такая плоскость выразится прямыми, параллельными xy (черт 51). Если плоскость, параллельная оси проекцій, расположена во 2-ой четверти, то (чертежъ 52) при совмѣщеніи плоскостей проекцій оба слѣда расположатся выше xy, а если при этомъ онѣ равноудалены отъ xy, то при совмѣщеніи плоскостей горизонтальный слѣдъ $\alpha\beta$ (черт.53) совпадетъ съ вертикальнымъ $\gamma\delta$ и плоскость выразится одной прямой. Если плоскость перпендикулярна къ одной изъ плоско-

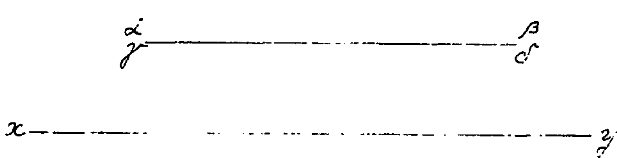
Черт.51.



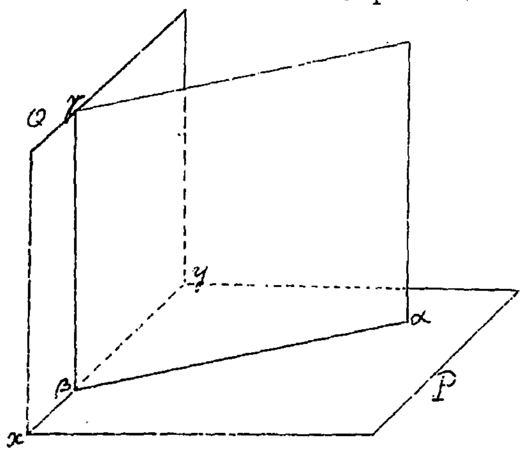
Черт.52.



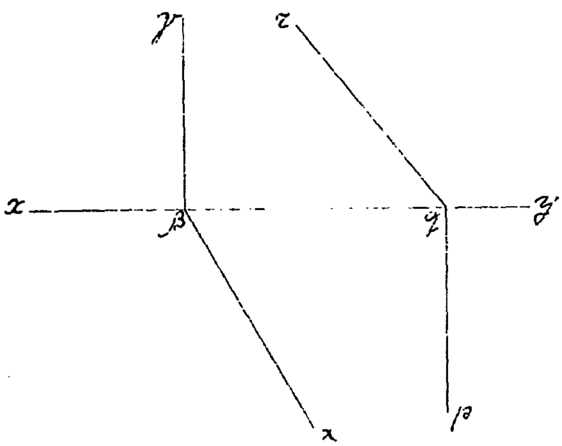
Черт.53.



Черт.54.



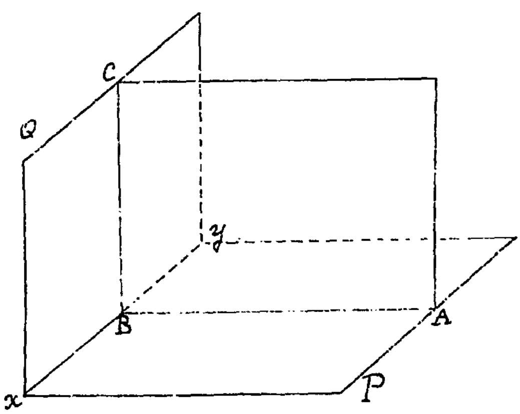
Черт.55.



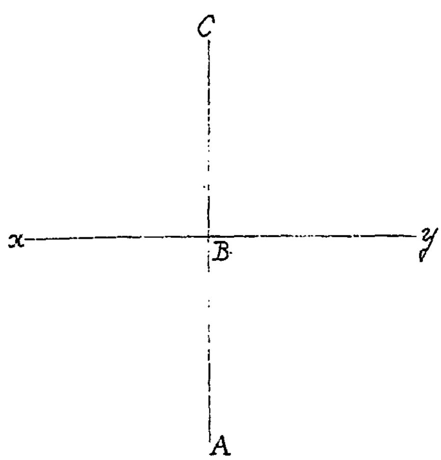
стей проекцій, то слѣдъ ея на другой плоскости перпендикуляренъ къ оси xy.

Положимъ, что $\alpha\beta\gamma$ (черт.54) перпендикулярна къ горизонтальной плоскости, тогда $\beta\gamma \perp$ xy, такъ какъ плоскости $\alpha\beta\gamma$ и Q обѣ перпендикулярны къ P, стало-быть и $\beta\gamma \perp$ P, т.е. $\beta\gamma \perp$ xy. На совмѣщенныхъ плоскостяхъ слѣды расположатся такъ, какъ показано на черт.55-мъ. Точно такъ же, если плоскость перпендикулярна къ Q, то горизонтальный слѣдъ ея pq перпендикуляренъ къ xy (черт.55), а вертикальный можетъ быть рас-

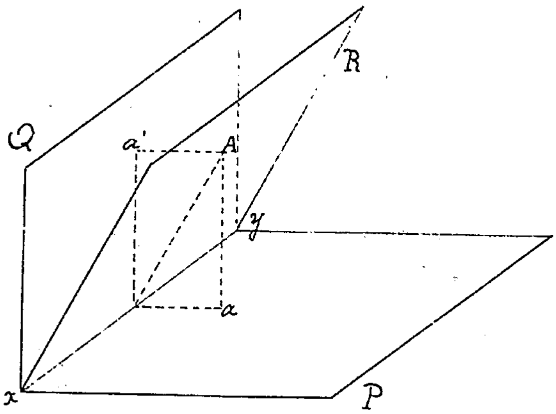
Черт.56.



Черт.57.



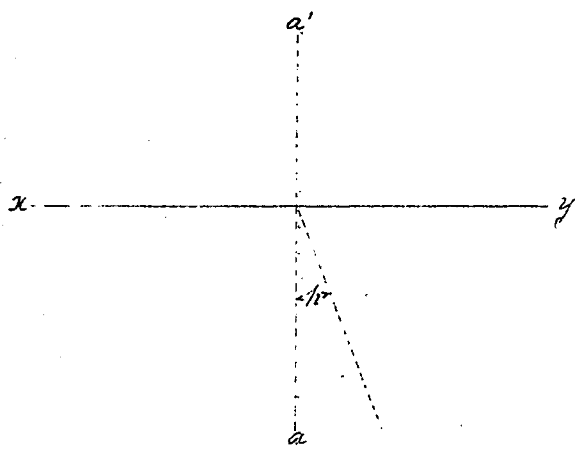
Черт.58.



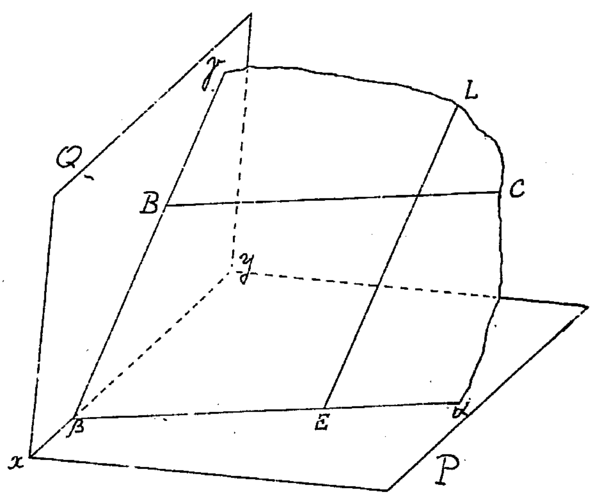
положенъ,какъ угодно. Если плоскость перпендикулярна къ ху, то слѣды ея перпендикулярны къ ху; такая плоскость называется, какъ мы знаемъ, профильною. Положимъ, что плоскость АВС перпендикулярна къ ху (чертежъ 56), тогда слѣды ея - горизонтальный АВ и вертикальный ВС будутъ перпендикулярны къ ху и на совмѣщенныхъ плоскостяхъ составятъ одну прямую АВС (черт.57), перпендикулярную къ оси ху.

Если плоскость проходитъ черезъ ось проекцій (черт.58), тогда слѣды ея совпадутъ съ осью; въ этомъ случаѣ положеніе плоскости не опредѣляется слѣдами, такъ какъ плоскость можетъ вращаться около оси (осевая плоскость); для этого надо знать или уголъ (черт.59), дѣлаемый данной плоскостью съ ка-

Черт.59.



Черт.60.



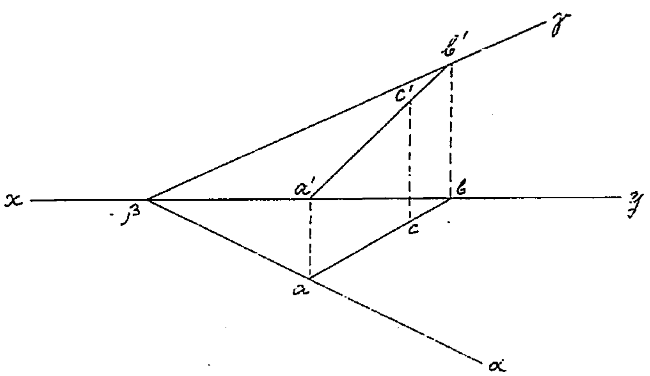
кой-нибудь плоскостью проекцій, или проекціи точки, лежащей въ данной плоскости R; если, напр., даны проекціи точки A, лежащей въ плоскости R, то положеніе плоскости опредѣляется, и на совмѣщенныхъ плоскостяхъ это изобразится, какъ на чертежѣ 59-мъ. Если въ плоскости $\alpha\beta\gamma$ (черт. 60) черезъ точку B, лежащую на вертикальномъ слѣдѣ, проведемъ параллель горизонтальному слѣду, то такая прямая называется горизонталью плоскости; если черезъ точку E, лежащую на горизонтальномъ слѣдѣ, проведемъ параллель вертикальному слѣду, то такая прямая EL называется фронталью или вертикалью плоскости.

ПОСТРОЕНІЕ ПРЯМЫХЪ И ТОЧЕКЪ ВЪ ДАННЫХЪ ПЛОСКОСТЯХЪ.

ЗАДАЧА. Даны слѣды плоскости; построить на ней прямую.

На слѣдахъ плоскости (черт.61) беремъ по точкѣ; на вертикальномъ (b,b') а на горизонтальномъ (a,a'). Соединяемъ a' съ b' и a съ b, получаемъ проекціи искомой прямой. Изъ построенія видно, что (bb') и (aa') суть слѣды прямой; слѣдовательно, когда прямая лежитъ въ плоскости, то слѣды ея лежатъ на слѣдахъ плоскости.

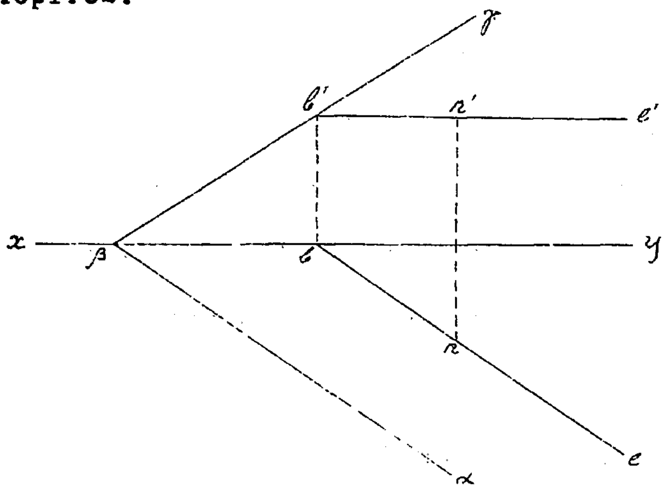
Черт.61.



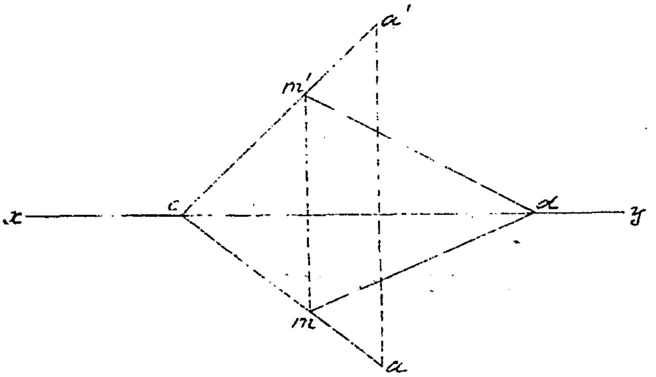
Если плоскость не параллельна оси xy, то возможно другое по-

ТИПО-ЛИТ. Ю. ВЕНЕРЪ ПРЕЕМН. О. ФАЛЬКЪ.
Листъ 4-й

Черт.62.



Черт.63.



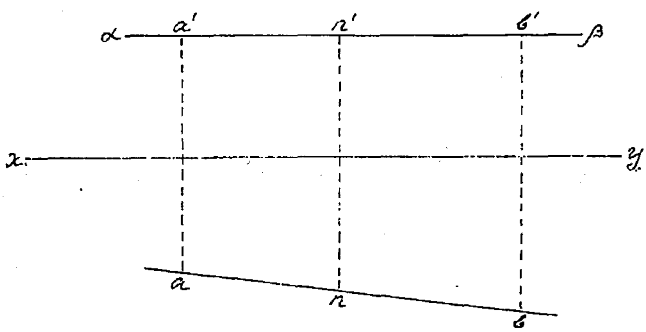
строеніе (черт.62). Возьмемъ на вертикальномъ слѣдѣ точку bb', проведемъ черезъ нее горизонталь и построимъ ея проекціи. Вертикальная проекція горизонтали, какъ линіи параллельной горизонтальной плоскости, должна быть параллельна оси ху, а такъ какъ вертикальная проекція должна проходить черезъ b', то она построится, если черезъ b' проведемъ параллель ху; горизонтальная проекція параллельна $\alpha\beta$, потому что намъ извѣстно, что, если прямыя параллельны, то одноименныя проекціи ихъ параллельны; поэтому, если черезъ b проведемъ параллель $\alpha\beta$, то получимъ be - горизонтальную проекцію горизонтали.

ЗАДАЧА. Построить прямую, лежащую въ осевой плоскости и проходящую черезъ данную точку (a,a') (черт.63).

Возьмемъ какую-ниоудь точку с на оси и соединимъ ее прямыми съ а и а'; полученныя прямыя ас и а'с будутъ проекціями искомой прямой. Эта прямая проходитъ черезъ точку (a,a') осевой плоскости, но чтобы построить произвольную прямую этой плоскости, беремъ на линіи (ac, a'c) точку (m,m') и соединяемъ ее съ точкой d - оси проекцій, тогда прямая (dm, dm')будетъ принадлежать осевой плоскости и не будетъ проходить черезъ данную точку (a,a').

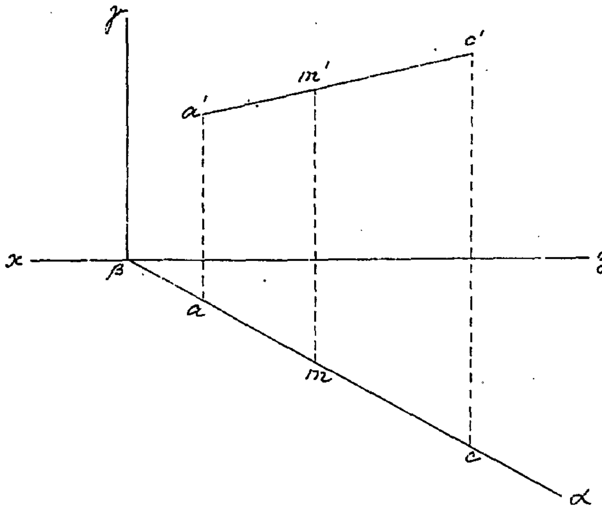
Если дано частное положеніе плоскости, то построеніе прямой, лежащей въ этой плоскости, упрощается. Положимъ, надо построить прямую, лежащую въ плоскости, параллельной горизонтальной плоскости проекцій (черт.64). Такъ какъ данная плоскость, будучи параллельна горизонтальной, перпендикулярна къ вертикальной плоскости, то вертикальная проекція всякой прямой, лежащей въ этой плоскости, будетъ совпадать съ вертикальнымъ слѣдомъ самой плоскости, а горизонтальная можетъ быть расположена, какъ угодно, если только не даны какія-либо условія; поэтому прямая (ab, a'b') лежитъ въ плоскости $\alpha\beta$.

Черт.64.



Если плоскость, въ которой надо построить прямую, перпендикулярна, положимъ, къ горизонтальной плоскости проекцій (черт.65), то горизонтальная проекція прямой совпадетъ съ горизонтальнымъ слѣдомъ самой плоскости, а вертикальная a'c' пойдетъ, какъ угодно. Умѣя строить въ плоскости прямую, легко построить и точку; для этого строимъ прямую въ плоскости и на

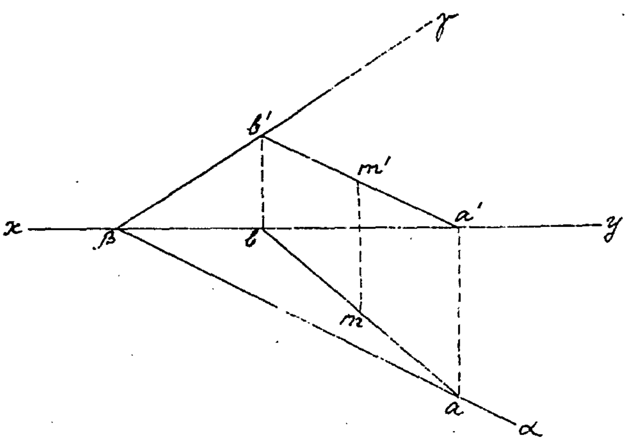
Черт.65.



ней беремъ какую-либо точку (см. черт.61-65, на которыхъ построены точки (c,c') и (m,m') соотвѣтственно въ плоскостяхъ $\alpha\beta\gamma$).

З А Д А Ч А. По данной проекціи отрѣзка прямой, лежащей въ данной плоскости, построить ея другую проекцію (черт.66).

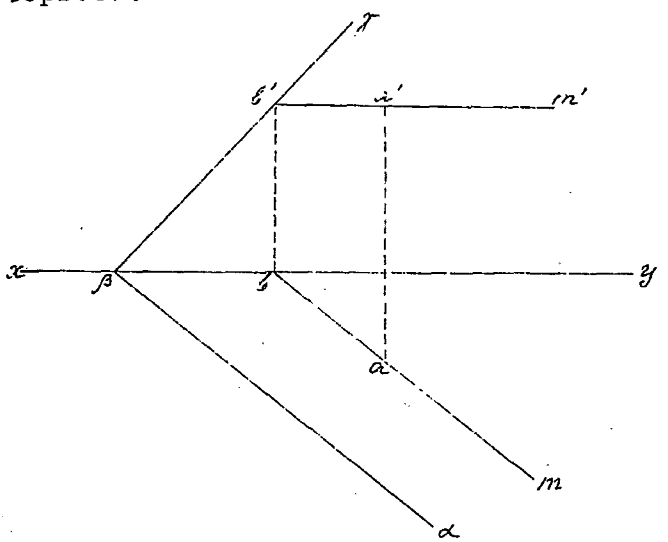
Черт.66.



Пусть требуется по горизонтальной проекціи m прямой, лежащей въ данной плоскости, построить вертикальную. Для этого продолжимъ m до встрѣчи съ горизонтальнымъ слѣдомъ плоскости и до пересѣченія съ xy; получимъ точки a и b, которыя будутъ выражать: a - горизонтальную проекцію горизонтальнаго слѣда прямой. а b - горизонтальную проекцію ея вертикальнаго слѣда; поэтому, если изъ b возставимъ перпендикуляръ къ xy и продолжимъ его до пересѣченія съ вертикальнымъ слѣдомъ плоскости, то получимъ b' - вертикальный слѣдъ искомой прямой. Если изъ a опустимъ перпендикуляръ на xy, то найдемъ вертикальную проекцію горизонтальнаго слѣда. Соединивъ a' съ b', получимъ искомую проекцію.

Рѣшимъ эту задачу для случая, когда проекція отрѣзка прямой, лежащей въ данной плоскости, параллельна одному изъ слѣдовъ плоскости. Пусть данная проекція m параллельна $\alpha\beta$ (черт.67). Продолжимъ проекцію m до встрѣчи съ xy, положимъ, въ точкѣ b, которая будетъ горизонтальной проекціей вертикальнаго слѣда; изъ b возставимъ перпендикуляръ къ xy до пересѣченія съ вертикальнымъ слѣдомъ плоскости; на пересѣченіи найдемъ b' - вертикальный слѣдъ прямой и заключаемъ, что прямая проходитъ черезъ точку (b,b').

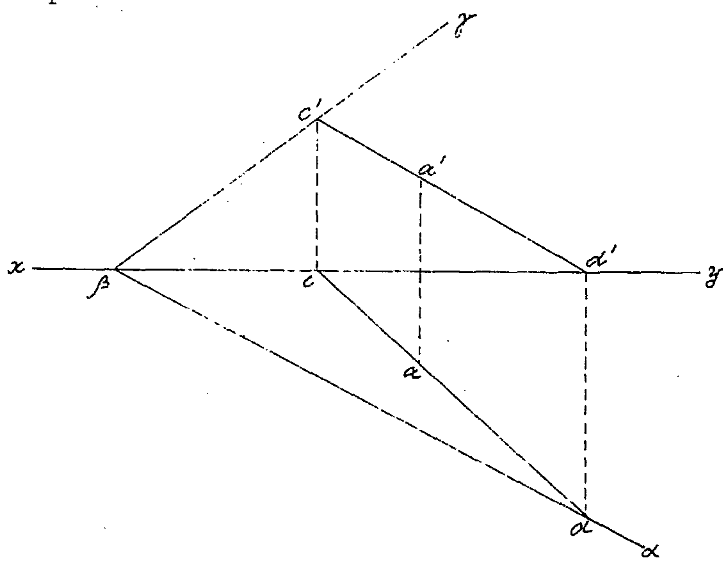
Черт.67.



Опредѣлимъ направленіе вертикальной проекціи прямой; для этого черезъ mb проводимъ горизонтально-проектирующую плоскость, пересѣченіе которой съ плоскостью $\alpha\beta\gamma$ дастъ искомую прямую, параллельную $\alpha\beta$, такъ какъ линія пересѣченія плоскостей, проходящихъ черезъ параллельныя прямыя, параллельна этимъ прямымъ; разъ искомая прямая параллельна $\alpha\beta$, то она есть горизонталь плоскости и потому вертикальная проекція ея параллельна xy. Проведя черезъ b' параллель xy, получимъ искомую проекцію.

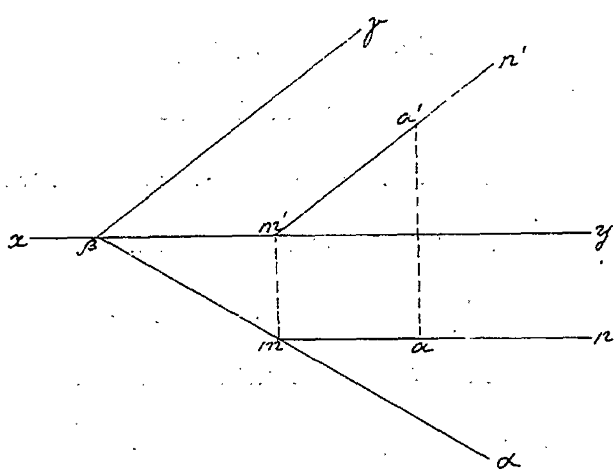
З А Д А Ч А. По данной проекціи точки, лежащей въ данной плоскости, найти другую ея проекцію.

Черт.68.

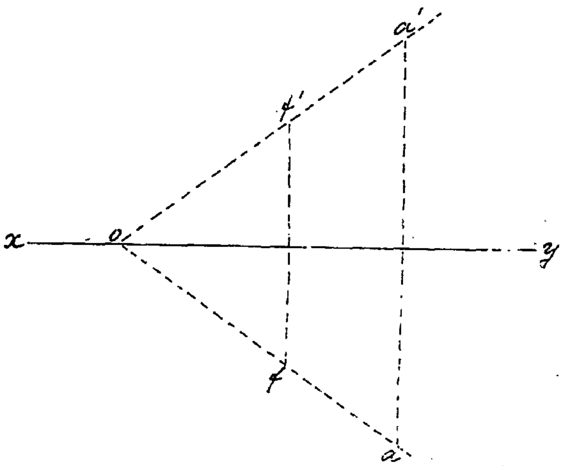


Пусть дана вертикальная проекція a' точки, лежащей въ плоскости $\alpha\beta\gamma$ (черт.68). Чтобы построить ея горизонтальную проекцію, проводимъ черезъ a' произвольную прямую c'd' и принимаемъ ее за вертикальную проекцію прямой, лежащей въ данной плоскости. По вертикальной проекціи c'd' по извѣстному правилу строимъ и горизонтальную проекцію cd. Прямая (cd, c'd'), находясь въ плоскости $\alpha\beta\gamma$, проходитъ черезъ ту точку плоскости, вертикальная проекція которой есть a'. По вертикальной проекціи точки строимъ ея горизонтальную проекцію - a, которая и будетъ искомой. Горизонтальная проекція точки можетъ быть найдена еще такимъ образомъ: через a' (черт.69) проводимъ m'n' параллельно $\beta\gamma$ и, принимая ее за вертикальную проекцію прямой, лежащей въ данной плоскости, строимъ горизонтальную mn параллельно xy, тогда прямая (mn, m'n') пройдетъ черезъ точку пло-

Черт.69.



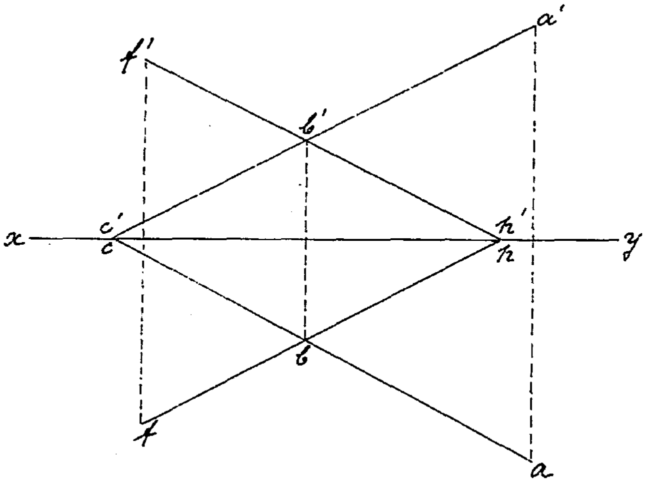
Черт.70.



скости, которой вертикальная проекцiя - a'. По вертикальной проекцiи a' находимъ горизонтальную a, лежащую на прямой mn. Рѣшимъ ту же задачу, предполагая, что плоскость проходитъ черезъ ось и данную точку (черт.70). Положимъ, что дана горизонтальная проекцiя f точки, лежащей въ плоскости, проходящей черезъ ось xy и данную точку a,a'; требуется построить другую ея проекцiю. Соединяемъ точку f съ a; прямую fa продолжаемъ до пересѣченiя съ осью xy въ точкѣ o, которую соединяемъ съ a'. Прямая (ao, a'o) лежитъ въ данной плоскости и проходитъ черезъ точку, которой горизонтальная проекцiя есть f. Опускаемъ изъ f перпендикуляръ на ось xy и, продоливъ его до пересѣченiя съ a'o въ точкѣ f', найдемъ искомую проекцiю. При рѣшенiи этой задачи можетъ случиться, что прямая fa не пересѣчетъ xy въ предѣлахъ чертежа.

Въ этомъ случаѣ поступаемъ такъ: проводимъ черезъ точку (a,a') прямую (ac, a'c') (черт.71) и на ней выбираемъ точку (b,b') такъ, чтобы послѣ соединенiя точекъ b и f, прямая bf пересѣкала ось въ предѣлахъ чертежа въ какой-нибудь точкѣ h; если h соединимъ съ b и b', то получимъ прямую (bh, b'h'), лежащую въ данной плоскости и проходящую черезъ точку, горизонтальная проекцiя которой есть f. По горизонтальной проекцiи

Черт.71.

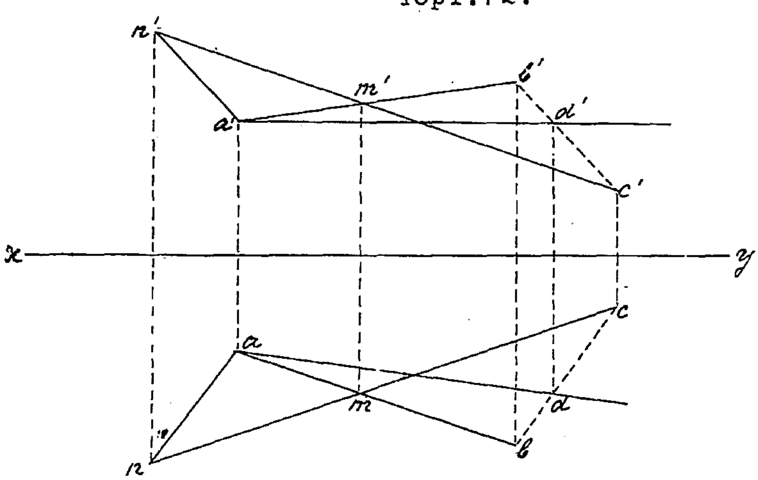


строимъ вертикальную f'.

Такимъ образомъ, когда даны слѣды плоскости, то можемъ построить прямую и точку въ этой плоскости, а слѣдовательно и какой--нибудь многоугольникъ.

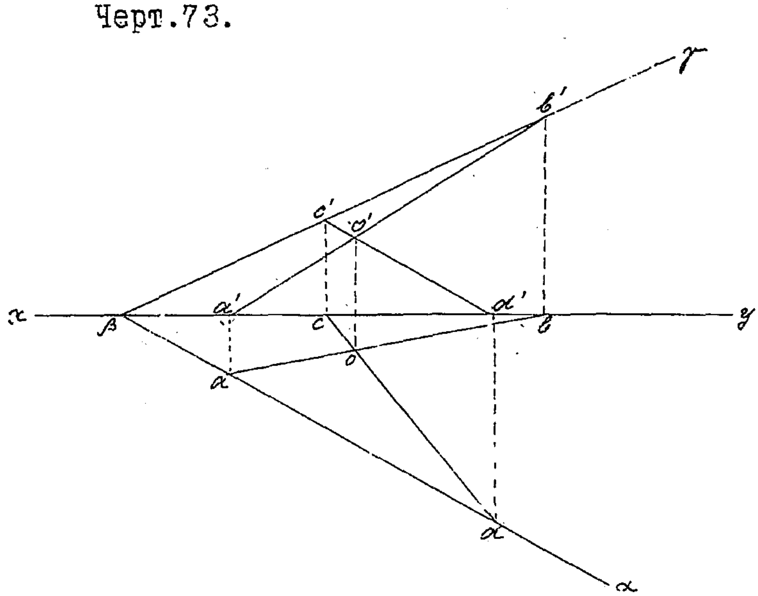
Если плоскость будетъ дана другими условіями, напр. точкой и прямой или двумя пересѣкающимися прямыми, или двумя параллельными прямыми, то также легко построить точку и прямую въ плоскости, а равно и слѣды плоскости. Разсмотримъ, какимъ образомъ въ плоскости, данной какими-нибудь условіями, построить прямую линію или точку, а также слѣды плоскости.

Черт.72.



Пусть плоскость дана прямой (ab, a'b') (черт.72) и точкой (c, c'); требуется на ней построить какую--нибудь прямую или точку. Для этого на данной прямой (ab, a'b') беремъ произвольную точку (m, m'), которую соединяемъ съ данной точкой (c, c'). Тогда прямая (mc, m'c') будетъ лежать въ данной плоскости, потому что имѣетъ съ ней общія точки (c, c') и (m, m'); поэтому всякая точка, взятая на построенной прямой, будетъ принадлежать нашей плоскости, слѣдовательно и точка (n,n'). То же самое, если бы мы точку (n,n') соединили съ точкой (a,a') или какой-нибудь другой точкой прямой (ab, a'b'), то получили бы прямую, принадлежащую данной плоскости; поэтому прямая (na, n'a') будетъ лежать въ данной плоскости и всякая ея точка будетъ принадлежать той же плоскости. Для построенія горизонтали этой плоскости поступаемъ такъ: черезъ точку a' проводимъ a'd' параллельно оси проекцій и принимаемъ ее за вертикальную проекцію горизонтали, а точку d' встрѣчи этой параллели съ b'c' проектируемъ на bc въ точку d, которую и соединяемъ съ a; тогда (ad, a'd') и будетъ искомою горизонталью, потому что она параллельна горизонтальной плоскости и лежитъ въ данной плоскости, какъ прямая, соединяющая двѣ ея точки (a,a') и (d,d'). Обратимся къ построенію слѣдовъ плоскости, полагая, что она дана двумя пересѣкающимися прямыми.

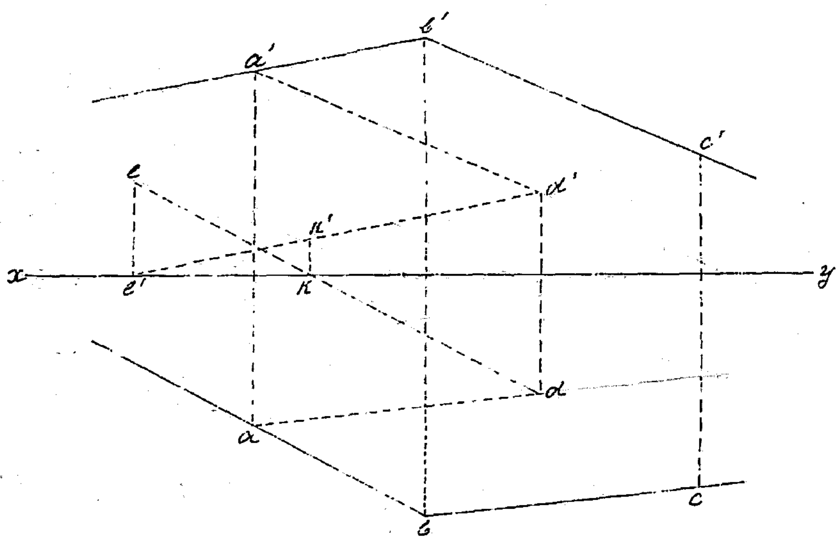
Черт.73.



Пусть даны двѣ прямыя (ab, a'b') и (cd, c'd'), пересѣкающіяся въ точкѣ (o,o') (черт.73); требуется построить слѣды плоскости, опредѣляемой ими.

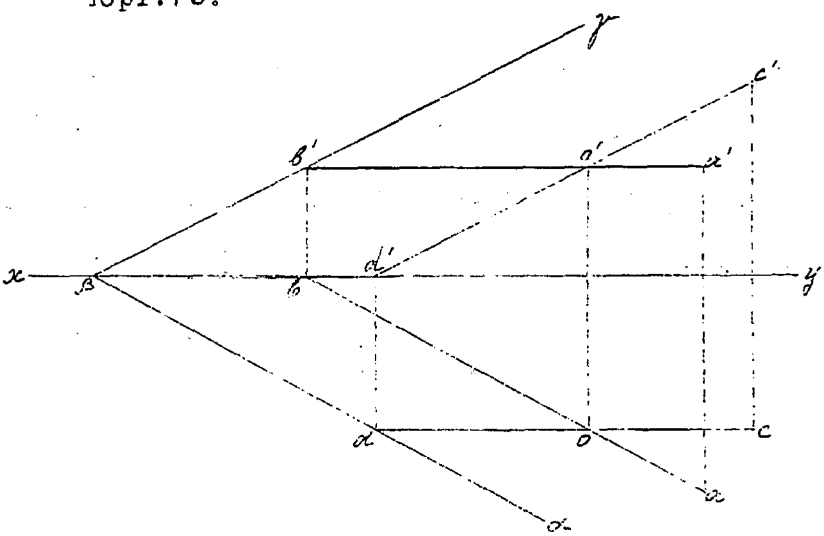
Для этого продолжаемъ эти прямыя до пересѣченія съ плоскостями проекцій, или, что все равно, строимъ ихъ слѣды. Горизонтальный слѣдъ первой прямой (ab, a'b') есть точка (a, a'), а горизонтальный слѣдъ другой прямой (cd, c'd') есть точка (d, d'); соединивъ двѣ полученныя точки a и d прямой ad, находимъ горизонтальный слѣдъ нашей плоскости, который называемъ черезъ $\alpha\beta$. Найдемъ теперь вертикальные слѣды данныхъ прямыхъ, т.е. точки c' и b' и, соединивъ ихъ, получимъ вертикальный слѣдъ $\beta\gamma$ плоскости. Если построеніе сдѣлано вѣрно, то прямыя $\alpha\beta$ и $\beta\gamma$, равно какъ и ось, должны пересѣкаться въ одной точкѣ. Если это не выполнено, то построеніе сдѣлано не вѣрно. Если случится, что слѣды данныхъ прямыхъ въ предѣлахъ чертежа не помѣщаются, тогда рѣшеніе задачи нѣсколько видоизмѣняется.

Черт.74.



Пусть (ab, a'b') и (bc, b'c') расположены такъ, что (черт.74) слѣды ихъ въ предѣлахъ чертежа не помѣщаются, тогда поступаемъ такъ: на первой прямой (ab, a'b') беремъ какую-нибудь точку напр. (a, a') и проводимъ черезъ нее параллель другой прямой (bc, b'c'). Эта параллель, очевидно, будетъ лежать въ данной плоскости, такъ какъ проведена черезъ точку, лежащую въ этой плоскости; если слѣды проведенной прямой (ad, a'd') не получаются въ предѣлахъ чертежа, тогда беремъ на ней точку (d,d') и черезъ нее проводимъ параллель прямой (ab, a'b'), слѣды которой уже могутъ получиться въ предѣлахъ чертежа и будутъ, положимъ, (e,e') и (k,k') и т.д. Соединимъ одноименные слѣды построенныхъ прямыхъ, получимъ слѣды данной плоскости.

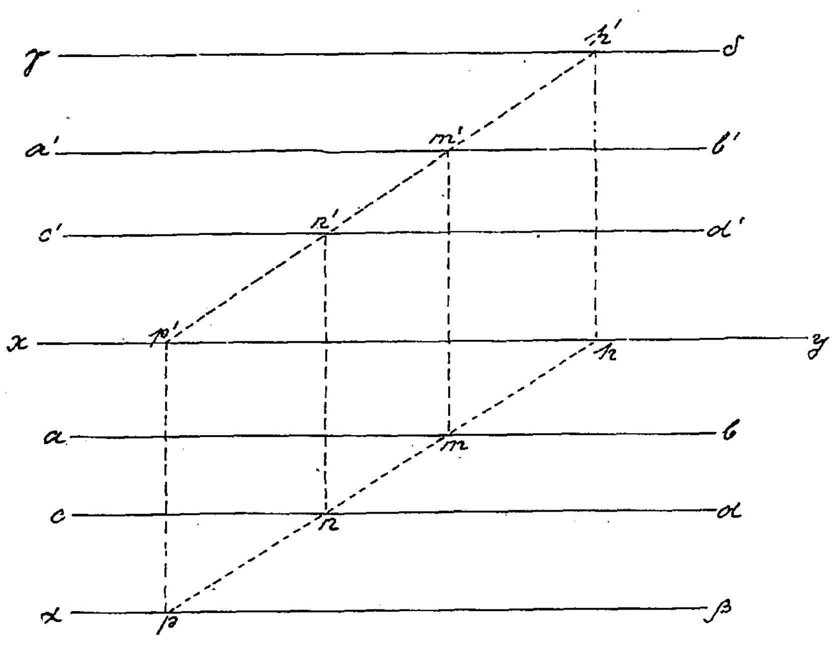
Черт.75.



Положимъ, что плоскость дана такими пересѣкающимися прямыми, одна изъ которыхъ параллельна горизонтальной плоскости, а другая параллельна вертикальной плоскости проекцій. Пусть прямая (ab, a'b') (черт.75) параллельна горизонтальной плоскости, а прямая (cd, c'd') параллельна вертикальной плоскости. Пусть точка пересѣченія этихъ прямыхъ есть (o,o'). Для построенія слѣдовъ плоскости, опредѣляемой данными прямыми, находимъ ихъ слѣды. Но прямая (ab, a'b') параллельна горизонтальной плоскости и потому имѣетъ только одинъ вертикальный слѣдъ, построивъ который, получаемъ точку (b,b'). Прямая (cd, c'd') параллельна вертикальной плоскости и потому имѣетъ одинъ горизонтальный слѣдъ, точку (d,d'). Эти точки (b,b') и (d,d') принадлежатъ слѣдамъ плоскости: первая -вертикальному, а вторая - горизонтальному. Очевидно, что прямая (ab, a'b') есть горизонталь плоскости, а (cd, c'd') - ея фронталь; поэтому, если черезъ точки d и b' проведемъ прямыя $\alpha\beta$ параллельно ab и $\beta\gamma$ параллельно d'c', то и получимъ искомые слѣды $\alpha\beta$ и $\beta\gamma$ нашей плоскости. Если построенiе сдѣлано вѣрно, то слѣды и ось должны пересѣкаться въ одной точкѣ.

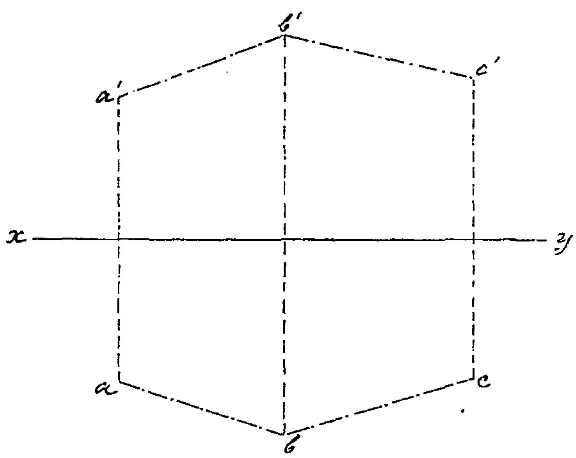
Теперь положимъ, что данныя прямыя будутъ параллельны оси проекцiй. Пусть данныя прямыя (ab, a'b') и (cd, c'd') параллельны оси xy (черт.76); требуется построить слѣды плоскости, опредѣляемые ими.

Черт.76.



Такъ какъ плоскость, проходящая черезъ эти прямыя, параллельна оси проекцiй, то и слѣды ея параллельны оси проекцiй. Такимъ образомъ, направленiе слѣдовъ нашей плоскости извѣстно и для построенiя ихъ достаточно на каждомъ изъ нихъ имѣть по одной точкѣ. Для полученiя этихъ точекъ пересѣчемъ наши прямыя третьей, вспомогательной линiей, выбирая ее такъ, чтобы слѣды ея помѣщались въ предѣлахъ чертежа. Тогда слѣды этой прямой будутъ лежать на слѣдахъ нашей плоскости. Для построенія вспомогательной прямой на линіи (ab, a'b') возьмемъ точку (m,m'), а на прямой (cd, c'd') - точку (n,n'); слѣды прямой (mn, m'n'), т.е. точки (p,p') и (h,h') будутъ лежать на слѣдахъ плоскости. Если черезъ эти точки p и h' проведемъ параллели оси, то получимъ горизонтальный $\alpha\beta$ и вертикальный $\gamma\delta$ слѣды нашей плоскости.

Черт.77.



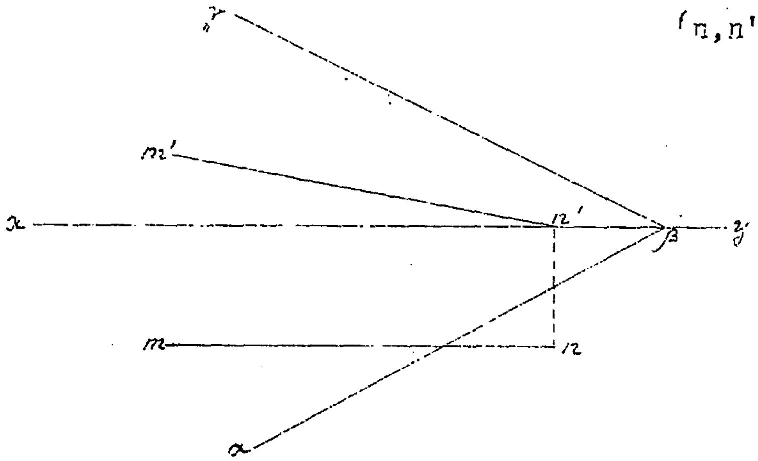
Если плоскость дана точкою и прямою, то это все равно, что плоскость дана тремя точками (a,a'), (b,b') и (c,c') (черт.77); при этомъ предположеніи построимъ слѣды этой плоскости. Для этого соединяемъ точку (b,b') съ двумя остальными и получаемъ двѣ пересѣкающіяся прямыя (ab, a'b') и (bc, b'c'). Построивъ по предыдущему ихъ слѣды и соединивъ полученныя точки, найдемъ слѣды искомой плоскости.

ОБРАТНЫЕ ВОПРОСЫ.

З А Д А Ч А. Дана плоскость $\alpha\beta\gamma$ и проекціи прямой (mn, m'n'). Узнать, находится ли эта прямая въ данной плоскости (черт.78).

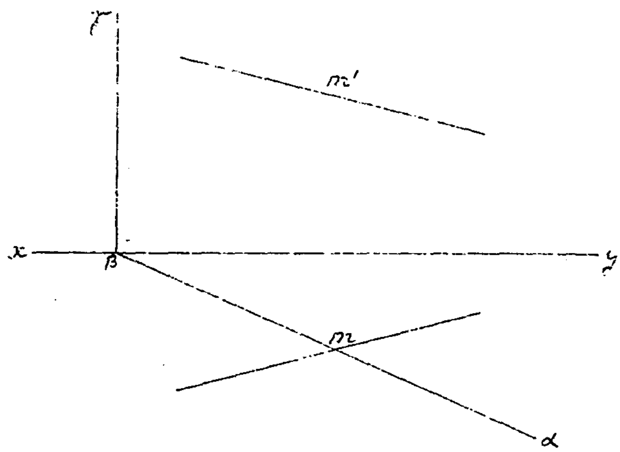
Извѣстно, что, если прямая находится въ плоскости, то и слѣды ея находятся на слѣдахъ плоскости. Найдемъ слѣды пря-

Черт.78.



мой. Горизонтальный слѣдъ (n,n'), какъ видно на чертежѣ, не лежитъ на горизонтальномъ слѣдѣ $\alpha\beta$ данной плоскости, слѣдовательно и прямая не лежитъ на данной плоскости.

Черт.79.

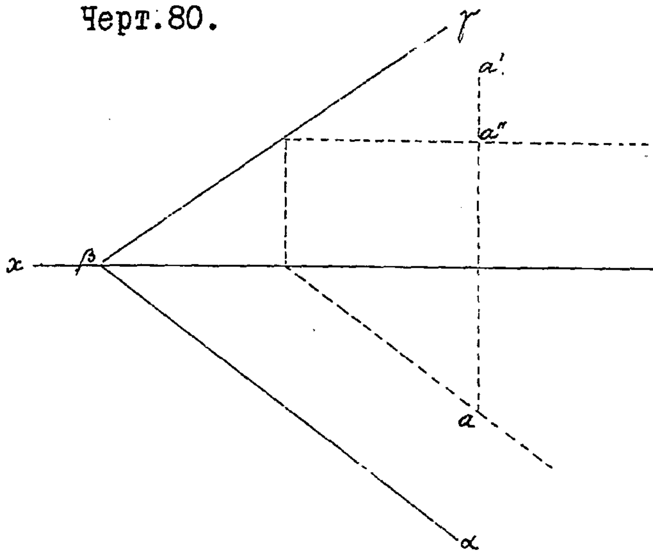


Возьмемъ плоскость $\alpha\beta\gamma$ (черт.79), перпендикулярную къ горизонтальной плоскости, и прямую (m,m'). Всякая прямая, лежащая въ плоскости, перпендикулярной къ горизонтальной плоскости, имѣетъ горизонтальную проекцію на горизонтальномъ слѣдѣ $\alpha\beta$, но такъ какъ m не лежитъ на $\alpha\beta$, то и прямая не лежитъ на плоскости.

З А Д А Ч А. Дана плоскость и проекціи точки; узнать: находится ли точка въ плоскости.

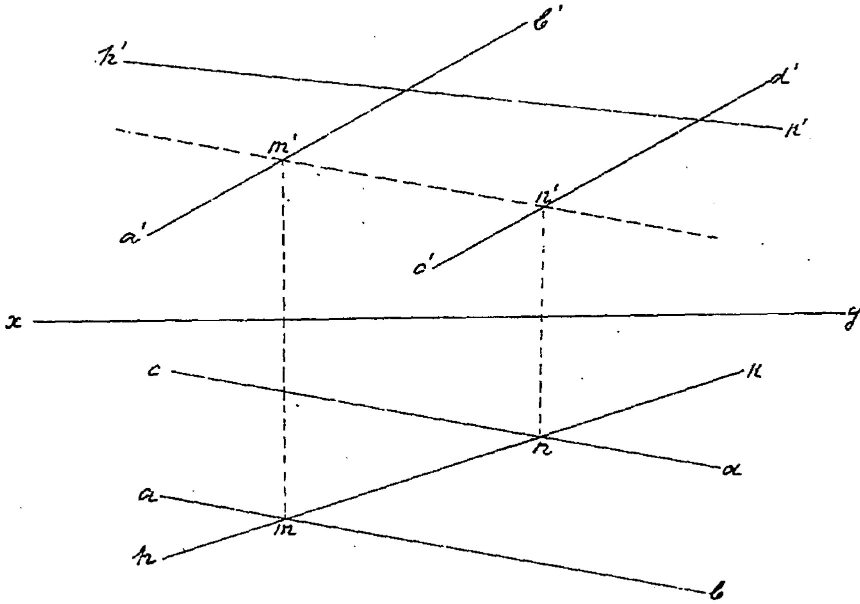
При рѣшеніи задачи поступаемъ такимъ образомъ: по горизонтальной проекціи точки a, предполагая, что a есть горизонтальная проекція точки, лежащей въ данной плоскости (черт.80), строимъ ея вертикальную проекцію a" по извѣстному уже прави-

Черт.80.



лу. Если полученная вертикальная проекція a" совпадаетъ съ вертикальной проекціей a' данной точки, то эта послѣдняя лежитъ въ плоскости; въ противномъ же случаѣ,

Черт.81.



какъ это имѣетъ мѣсто на черт. 81, точка въ плоскости не лежитъ. Если плоскость дана не слѣдами, а другими условіями, напримѣръ прямыми (ab, a'b') и (cd, c'd'), параллельными между собою (чертежъ 81), то, чтобы узнать, лежитъ ли прямая (hk, h'k') въ этой плоскости, поступаемъ такъ: прямую hk принимаемъ за горизонтальную проекцію линіи, лежащей въ данной плоскости, и строимъ соотвѣтствующую ей вертикальную проекцію, для чего точки n и m - пересѣченія hk съ ab и cd проектируемъ на вертикальную плоскость въ точки m' и n'; тогда прямая (mn,m'n') будетъ лежать въ данной плоскости; если окажется, что прямая m'n' совпадетъ съ h'k', то данная прямая лежитъ въ нашей плоскости, въ противномъ случаѣ - нѣтъ. Прямая (hk,h'k'), какъ видно изъ чертежа, не лежитъ въ данной плоскости.

З А Д А Ч И.

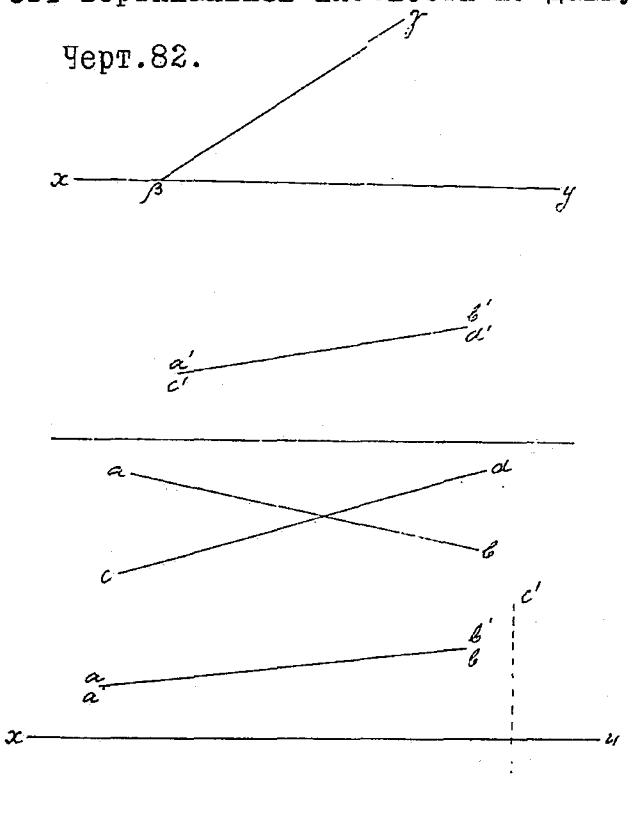
1) Дана осевая плоскость и проекціи точки (f,f'); узнать, лежитъ ли эта точка въ данной плоскости?

2) Даны: осевая плоскость и прямая, параллельная оси проекцій; узнать, лежитъ ли эта прямая въ данной плоскости?

3) Въ плоскости, опредѣляемой тремя точками, построить фронталь (не находя слѣдовъ плоскости).

4) Въ плоскости, выражаемой въ совмѣщеніи одной прямой $\beta\gamma$, построить горизонталь и найти на ней точку, отстоящую отъ вертикальной плоскости на данную длину (черт.82).

Черт.82.



5) Построить слѣды плоскости, проходящей черезъ двѣ пересѣкающіяся прямыя, если одна перпендикулярна къ горизонтальной плоскости, а другая ей параллельна.

6) Построить слѣды плоскости, проходящей черезъ двѣ пересѣкаю-

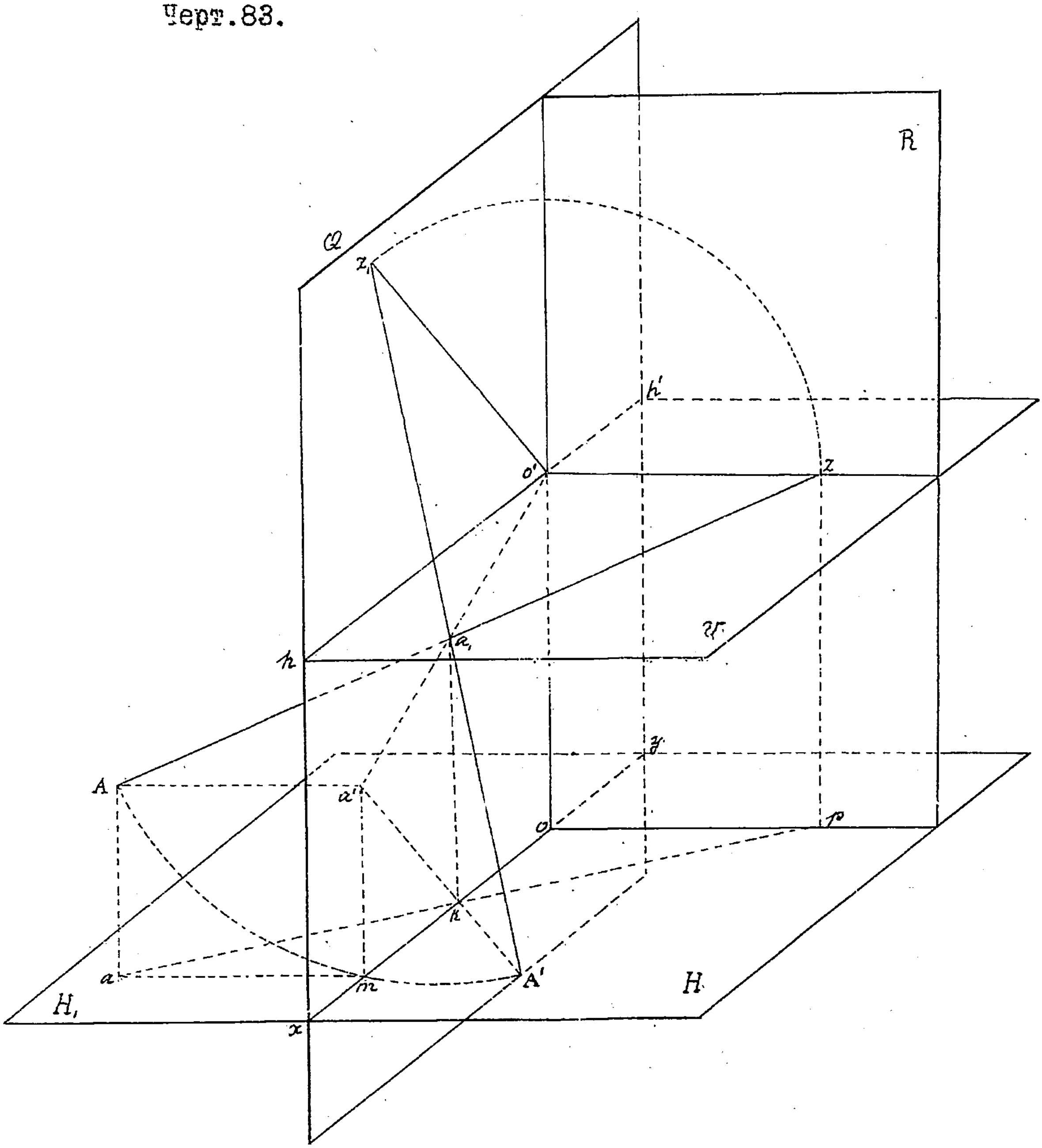
щіяся прямыя, если ихъ вертикальныя проекціи сливаются (чертежъ 82)

7) Построить слѣды плоскости, проходящей черезъ точку (c,c') и прямую (ab, a'b'), которой горизонтальная проекція совпадаетъ съ вертикальной (черт.82).

УСЛОВНЫЯ НАЗВАНІЯ НѢКОТОРЫХЪ ПРЯМЫХЪ И ТОЧЕКЪ ПРИ ПОСТРОЕНІИ ПЕРСПЕКТИВНЫХЪ ИЗОБРАЖЕНІЙ.

Мы видѣли, что центральная проекція обращается въ перспективное изображеніе, когда точка зрѣнія совпадаетъ съ полюсомъ. При построеніи этой проекціи вертикальную плоскость Q (черт.83) называютъ картинною плоскостью, а линію сѣченія ея съ горизонтальною плоскостью H - основаніемъ картины (xy); плоскость H - предметною плоскостью. Точка зрѣнія z дается ортогональными проекціями на плоскостяхъ Q и H; пусть эти проекціи - p и o'. Линія zo', перпендикулярная къ плоскости Q, называется главнымъ лучемъ. Если черезъ точку зрѣнія z проведемъ плоскость R перпендикулярно къ основанію xy, то она будетъ перпендикулярна и предметной плоскости и называется центральною плоскостью. Центральная плоскость пересѣкается съ картинной по линіи oo', перпендикулярной къ xy. Эта линія сѣченія oo' называется центральной линіей. Плоскость V, проведенная черезъ точку зрѣнія параллельно плоскости H, называется плоскостью горизонта; она пересѣкаетъ кар-

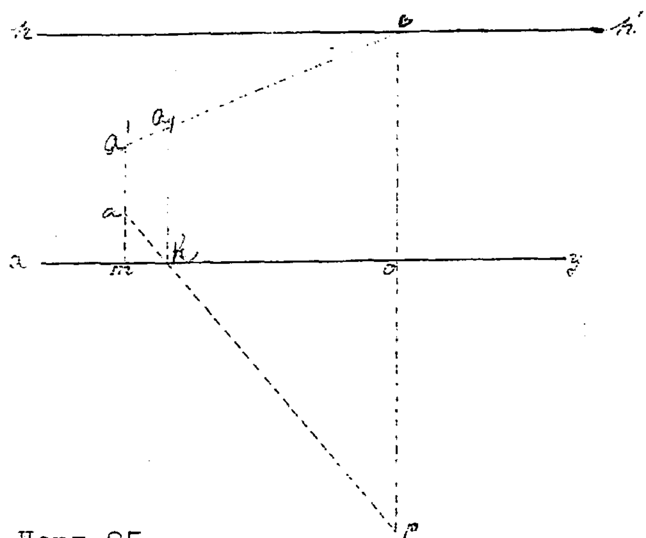
Черт.83.



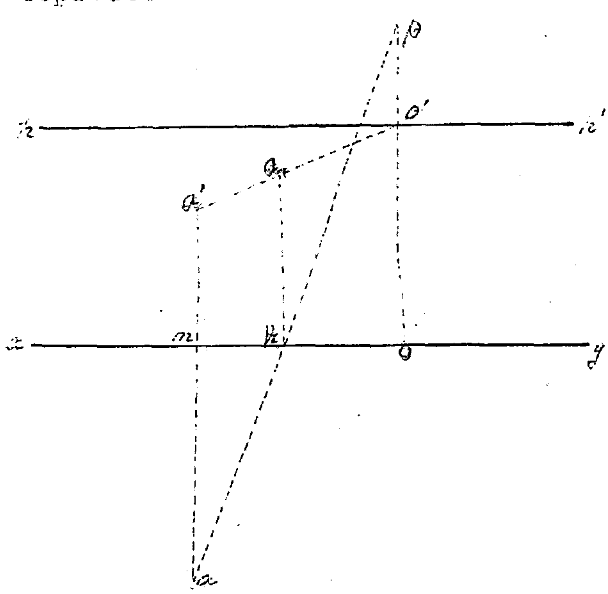
тинную плоскость Q по линіи hh', параллельной xy, и называется линіей горизонта. Линія горизонта отстоитъ отъ основанія картины на разстояніи oo' = zp, т.е. равномъ разстоянію точки зрѣнія отъ предметной плоскости. Точка зрѣнія отъ предметной плоскости обыкновенно отстоитъ на разстояніи, равномъ разстоянію глаза наблюдателя отъ предметной плоскости.

Положимъ, нужно найти центральную проекцію точки A (черт.83). Эта точка опредѣляется или разстояніемъ отъ 3-хъ плоскостей H, Q и R, или же проекціями (ортогональными) относительно плоскостей H и Q, т.е. относительно предметной и картинной плоскостей. Пусть точка A дана проекціями a и a' на плоскостяхъ H и Q, тогда для полученія перспективной проекціи этой точки мы должны изъ A провести лучъ зрѣнія и точка встрѣчи его съ плоскостью Q будетъ искомой точкой. Такъ какъ перспектива данной точки есть точка встрѣчи луча Az съ картинной плоскостью, то можно сказать, что п е р с п е к т и в н а я п р о е к ц і я е с т ь н е ч т о и н о е, к а к ъ с л ѣ д ъ л у ч а н а к а р т и н н о й п л о с к о с т и; горизонтальная проекція этого луча есть ap, а вертикальная - a'o'. Найдя слѣдъ этого луча по извѣстному правилу, получаемъ точку a,, которая и будетъ искомой перспективой данной точки. Чтобы построеніе можно было дѣлать на одной плоскости, совмѣстимъ горизонтальную плоскость H съ картинной плоскостью такъ, чтобы передняя половина H совпала съ той частью картинной плоскости, которая находится выше основанія картины, или же ниже. Если горизонтальную плоскость совмѣстимъ съ картинной, вращая ее около xy въ сторону, лежащую ниже основанія картины, тогда на плоскости картины получатся постоянныя прямыя hh' и xy и постоянныя точки o, o' и p, причемъ op выразитъ разстояніе точки зрѣнія до картинной плоскости; проекціи данной точки расположатся выше основанія картины xy (черт.84) и, положимъ, будутъ a и a'; линія oo опредѣ-

Черт.84.

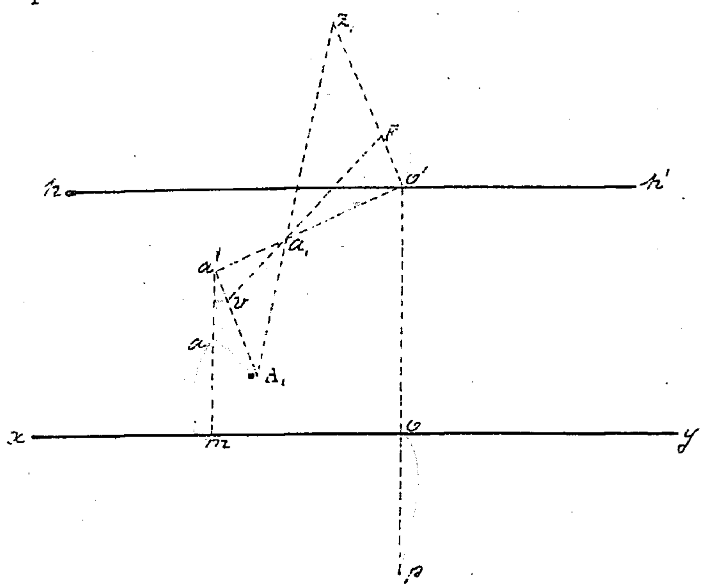


Черт.85.



лить разстоянiе данной точки отъ центральной плоскости. Если а' соединимъ съ о'и а соединимъ съ р и изъ точки к возставимъ перпендикуляръ къ основанiю картины до встрѣчи съ о'а', то въ точкѣ а, получимъ перспективную проекцiю данной точки, или ея перспективу. Если бы горизонтальную плоскость Н совмѣстили съ картинной плоскостью въ сторону, лежащую выше основанiя картины, тогда расположенiе проекцiй какъ точки зрѣнiя, такъ и данной точки было бы другое, а именно, горизонтальная проекцiя данной точки была бы ниже основанiя ху, а вертикальная - выше, и горизонтальная проекцiя точки зрѣнiя р была бы выше ху (черт.85), но правило построенiя перспективы данной точки осталось бы то же самое, что и видно изъ черт. 85.

Черт.86.

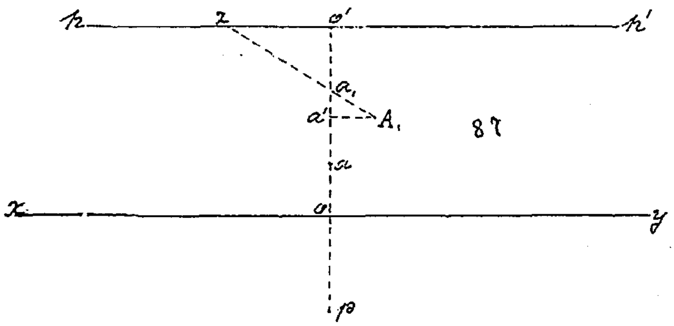


Получить перспективу данной точки можно еще и другимъ способомъ; для этого вообразимъ, что плоскость Aa'zo' (черт.83), вращаясь около a'o', совпадаетъ съ картинной плоскостью, тогда точки A и z будутъ перемѣщаться по окружностямъ, и когда эта плоскость совпадетъ съ картинной, то точка z совпадетъ съ z_1, при чемъ $o'z_1$ будетъ перпендикулярна къ o'a'; лучъ Az приметъ положеніе $A'z_1$ и встрѣтитъ линію o'a' въ точкѣ a_1, т.е. въ искомой перспективѣ. На совмѣщенныхъ плоскостяхъ построеніе дѣлается такимъ образомъ (черт.86): точку a' соединяютъ съ o', въ точкѣ o' къ o'a' возставляютъ перпендикуляръ, на которомъ откладываютъ $o'z_1$ = po, а въ точкѣ a', къ той же линіи a'o', возставляютъ $\perp$ въ противоположномъ направленіи и на немъ откладываютъ разстояніе данной точки отъ картинной плоскости, т.е. разстояніе a'A = am; A_1 соединяютъ съ z_1 и въ точкѣ пересѣченія прямыхъ z_1A_1 и a'o' получаютъ искомую точку a_1. Если бы z_1 въ предѣлахъ чертежа не помѣстилась, тогда на $o'z_1$ отложили бы отрѣзокъ $o'F = \frac{1}{n}$ части линіи op; а на $a'A_1$ - отрѣзокъ a'v, равный $\frac{1}{n}$ части am и, соединивъ F съ v, получили бы ту же точку a_1.

Разсмотримъ построеніе перспективъ точекъ при частныхъ ихъ положеніяхъ.

а) Если точка находится въ центральной плоскости, то ея перспектива находится на центральной линіи (черт.87).

Черт.87.

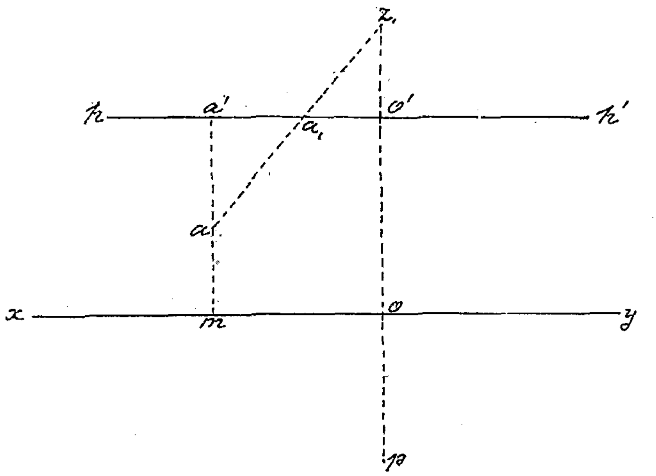


Если точка находится въ центральной плоскости, то ортогональныя проекціи ея расположатся на центральной линіи; пусть проекціи такой точки будутъ (а,а'); для построенія перспективы этой точки пользуемся вторымъ пріемомъ, а именно вертикальную проекцію а' соединяемъ съ центромъ картины о', къ линіи о'а' въ точкѣ о' возставляемъ перпендикуляръ, который совпадетъ съ линіей hh', и на немъ откладываемъ о'z = ор, т.е. разстоянію точки зрѣнія до картинной плоскости, затѣмъ къ линіи о'а' въ точкѣ а' возставляемъ ⊥ въ противоположную сторону и на немъ откладываемъ величину $a'A_1$, равную ао, т.е. равную разстоянію данной точки отъ картинной плоскости; соединивъ полученныя точки z и A_1, въ пересѣченіи съ а'о' - получимъ точку a_1 -искомую перспективу.

b) Если данная точка (а,а') находится въ плоскости горизонта, то ея перспектива будетъ на линіи горизонта (черт.88).

Дѣйствительно, если воспользуемся первымъ или вторымъ способомъ построенія перспективы точки (на черт.88 употребленъ

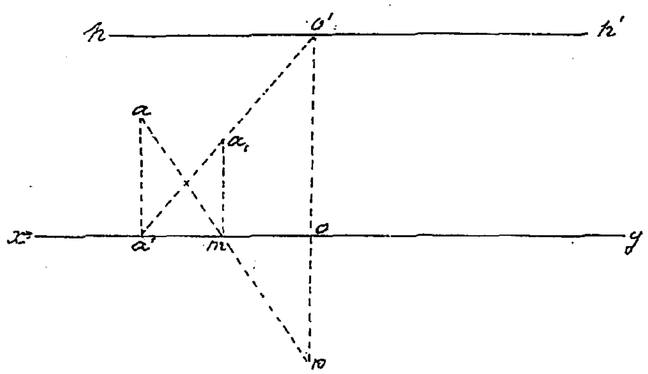
Черт.88.



второй способъ), то найдемъ, что перспектива данной точки(a,a') есть точка $a_,$, лежащая на линіи горизонта.

c) Если точка(a,a') находится на горизонтальной или предметной плоскости, то ея перспектива будетъ лежать между основаніемъ картины и линіей горизонта (черт.89).

Черт.89.

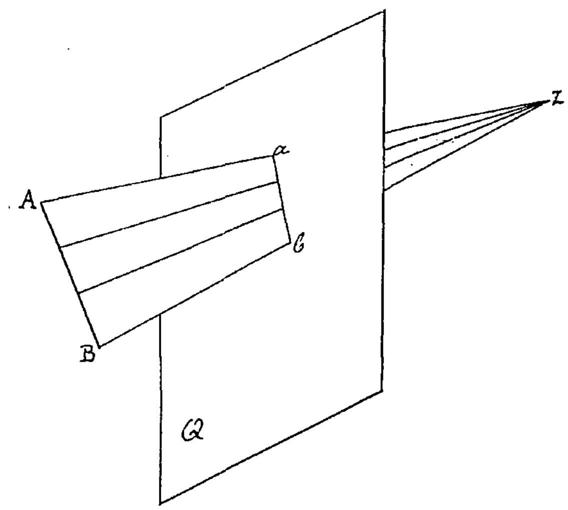


Дѣйствительно, найдя слѣдъ луча (ap, a'o'), получимъ точку $a_,$ - искомую перспективу, находящуюся между основаніемъ картины и линіей горизонта.

ПЕРСПЕКТИВА ОТРѢЗКА ПРЯМОЙ.

Пусть AB есть данный отрѣзокъ, Q - картинная плоскость и z - точка зрѣнія. Чтобы построить перспективу отрѣзка AB, соединимъ различныя его точки съ точкой зрѣнія z (черт.90), черезъ что получимъ плоскость zAB, сѣченіе которой съ картинной плоскостью Q дастъ перспективную проекцію данной прямой; отсюда и видно, что перспективой прямой служитъ прямая. Но, такъ какъ прямая опредѣляется двумя точками, то поэтому для получе-

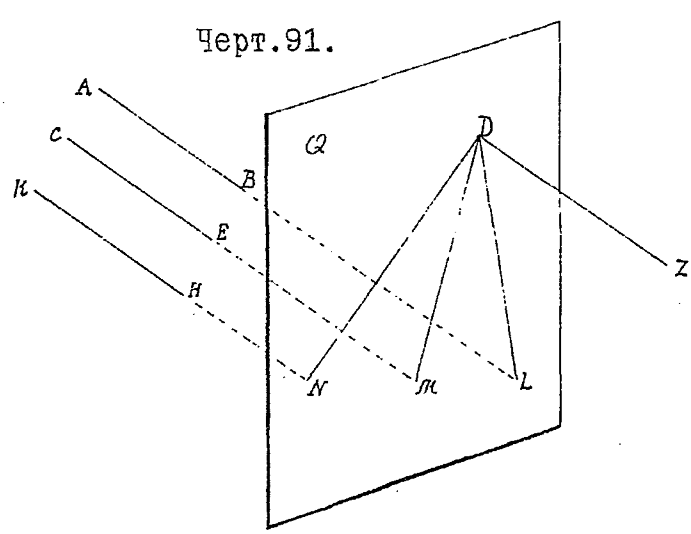
Черт.90.



нія перспективы даннаго отрѣзка достаточно найти перспективы крайнихъ его точекъ и соединить ихъ прямой. Въ нашемъ случаѣ ab есть перспектива AB.

Во многихъ случаяхъ приходится строить перспективу параллельныхъ между собою прямыхъ, и въ такихъ случаяхъ построеніе упрощается при помощи особыхъ точекъ, называемыхъ точками схода; по поводу этихъ точекъ докажемъ слѣдующее предложеніе. Перспективы прямыхъ, параллельныхъ между собою, но не параллельныхъ картинной плоскости, пересѣкаются въ одной точкѣ, которая называется точкою схода. Положимъ, дана система прямыхъ, параллельныхъ между собой, но не параллельныхъ картинной плоскости, такъ что AB паралл. CE паралл. HK

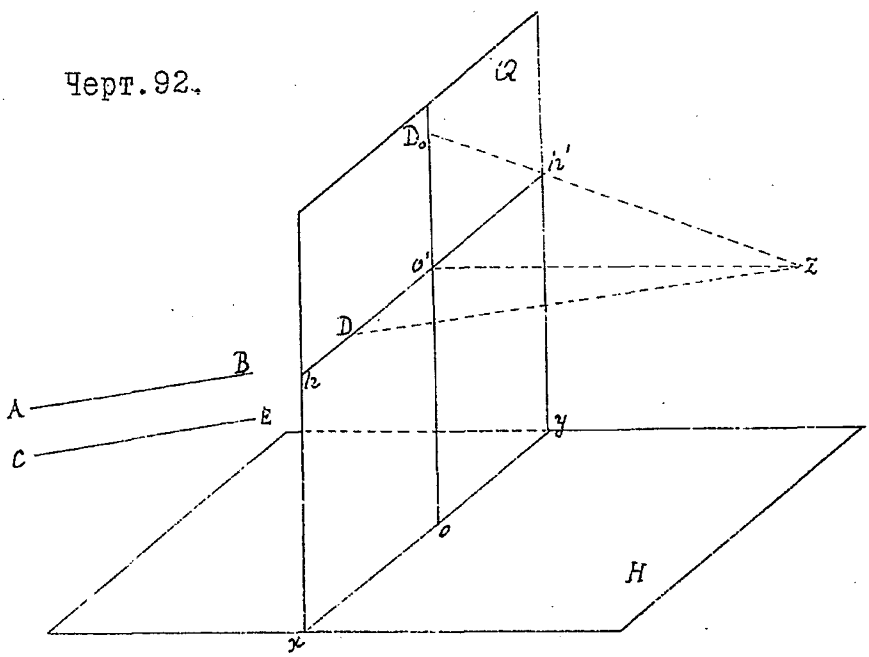
Черт.91.



(черт.91); требуется доказать, что перспективы ихъ пересѣкаются въ одной точкѣ; для этого проводимъ черезъ z прямую zD параллельно данной системѣ прямыхъ; тогда она будетъ принадлежать каждой изъ плоскостей zKH, zCE, zAB....; слѣдовательно, эти плоскости пересѣкутся по прямой zD, а линіи сѣченія ихъ съ картинной плоскостью или перспективы данныхъ прямыхъ пройдутъ черезъ точку D, которая и будетъ точкой схода. Зная точку схода, легко опредѣлить направленіе перспективъ данныхъ прямыхъ; для этого нужно найти слѣды ихъ N,M,L..... на картинной плоскости и соединить съ точкой D. Точка D выражаетъ перспективу такой точки каждаго изъ отрѣзковъ данныхъ прямыхъ, которая удалена отъ картинной плоскости на безконечно большое разстояніе, а поэтому, напр., прямая LD выражаетъ перспективу данной прямой отъ точки встрѣчи съ картинной плоскостью до точки, удаленной на безконечно большое разстояніе.

Разсмотримъ построеніе точки схода при различныхъ положеніяхъ данныхъ прямыхъ.

Черт.92.



а) Если дана система горизонтальныхъ прямыхъ, параллельныхъ между собою, но не параллельныхъ картинной плоскости, то точка схода будетъ лежать на линіи горизонта (черт.92).

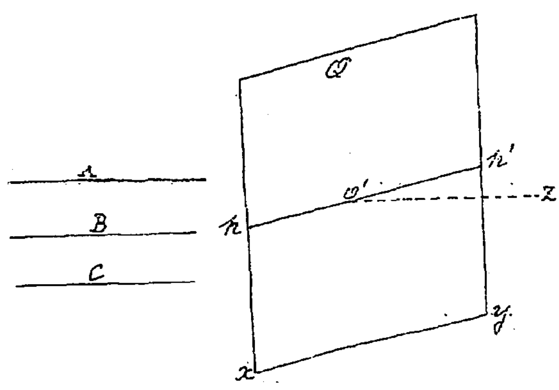
Пусть горизонтальныя прямыя AB и CE параллельны между собою, тогда онѣ будутъ параллельны и предметной плоскости H; для полученія точки схода ихъ перспективныхъ проекцій, нужно изъ точки зрѣнія z провести прямую параллельно даннымъ, но очевидно эта параллель zD будетъ параллельна плоскости H, т.е. будетъ лежать въ плоскости видимаго горизонта и потому встрѣтитъ картинную плоскость въ точкѣ, лежащей на линіи горизонта

ъ) Если данныя прямыя, кромѣ того, что горизонтальны, еще будутъ наклонены къ картинной плоскости подъ угломъ въ 45°, то точка схода, находящаяся на линіи горизонта, будетъ отстоять отъ центра картины o' на разстояніи, равномъ разстоянію точки зрѣнія до картинной плоскости; дѣйствительно, положивъ, что AB (черт.92) составляетъ съ плоскостью картины уголъ въ 45°, тогда и линія zD, параллельная AE, составитъ съ плоскостью картины уголъ 45°. Треугольникъ zo'D прямоуголенъ при точкѣ o', и слѣдовательно уголъ o'zD будетъ также равенъ 45°, а потому треугольникъ o'zD равнобедренный и o'D = o'z и для полученія точки схода такихъ прямыхъ нужно на линіи горизонта отъ центра картины o' отложить разстояніе, равное разстоянію точки зрѣнія до картинной плоскости. П о д о б н ы я т о ч к и н а з ы в а ю т с я т о ч к а м и р а з с т о я н і й.

c) Если прямыя параллельны центральной плоскости или, все равно, находятся въ профильныхъ плоскостяхъ, то точка ихъ схода будетъ лежать на центральной линіи oo'. Дѣйствительно, если черезъ точку зрѣнія z (черт.92) провести прямую, параллельную одной изъ данныхъ прямыхъ, то эта послѣдняя будетъ лежать въ центральной плоскости и встрѣтитъ картинную плоскость въ точкѣ, лежащей на линіи oo', т.е. на центральной линіи. Эта точка D_o будетъ или выше горизонта, или ниже, смотря по направленію данной системы параллельныхъ прямыхъ; если же данная система параллельныхъ прямыхъ будетъ кромѣ того наклонена къ картинной плоскости подъ угломъ въ 45°, то точка схода, находясь на центральной линіи, будетъ отстоять отъ центра картины на разстояніи, равномъ разстоянію точки зрѣнія до картинной плоскости.

d) Если прямыя перпендикулярны къ картинной плоскости, то точкой ихъ схода будетъ служить центръ картины (черт.93).

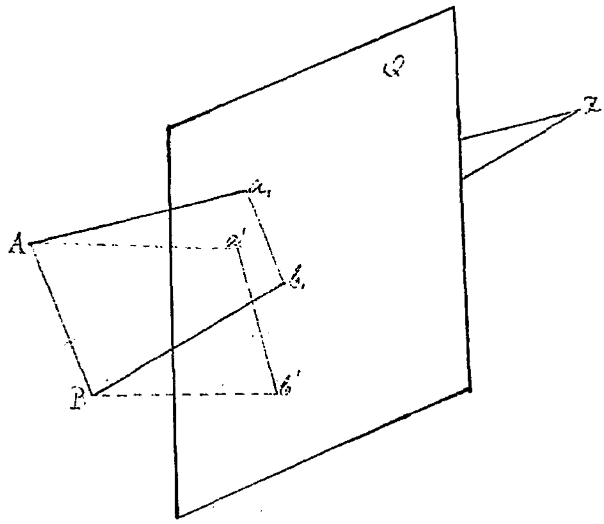
Черт.93.



Пусть прямыя A, B и C перпендикулярны къ картинной плоскости Q, тогда лучъ, проведенный черезъ точку зрѣнія параллельно даннымъ прямымъ, совпадетъ съ главнымъ лучомъ zo' и потому встрѣтитъ картинную плоскость въ точкѣ o', которая и будетъ точкой схода.

e) Если прямая параллельна картинной плоскости, то ея перспектива будетъ параллельна ортогональной проекціи, а точка схода системы такихъ прямыхъ на безконечно большомъ разстояніи отъ центра картины, или все равно - перспективы прямыхъ,

Черт.94.



параллельныхъ между собою и параллельныхъ картинной плоскости, будутъ параллельны между собой (черт.94).

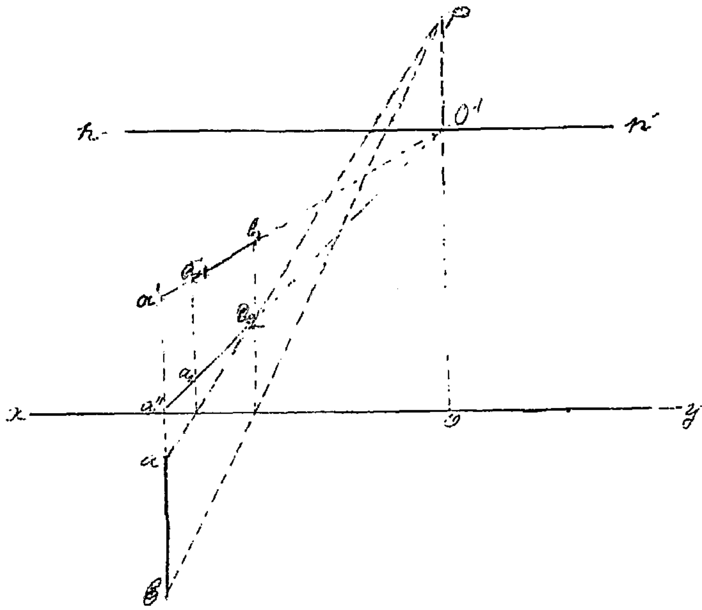
Положимъ, прямая AB параллельна картинной плоскости Q; пусть a'b' - ея ортогональная проекція, тогда a'b' будетъ параллельна AB. Положимъ, что a,b, есть перспектива того же отрѣзка, тогда a,b, будетъ параллельна a'b' потому, что плоскость ABz проходитъ черезъ прямую AB, параллельную картинной плоскости, а слѣдовательно пересѣчетъ ее по прямой, параллельной данной прямой AB, и потому a,b, параллельна a'b'.

Разсмотримъ примѣры построенія перспективъ прямолинейныхъ отрѣзковъ, данныхъ ортогональными проекціями, пользуясь точками сходовъ.

1) Построимъ перспективу отрѣзка (ab, a'), перпендикулярнаго къ картинной плоскости, предполагая, что предметная плоскость совмѣщена съ картинной въ сторону, лежащую выше основанія картины (черт.95).

Точка схода прямыхъ, перпендикулярныхъ къ картинѣ, находится въ центрѣ, т.е. въ точкѣ o', а слѣдъ данной прямой на картинной плоскости есть точка a'; поэтому, соединивъ a' съ o' получимъ направленіе перспективы даннаго отрѣзка, а чтобы по-

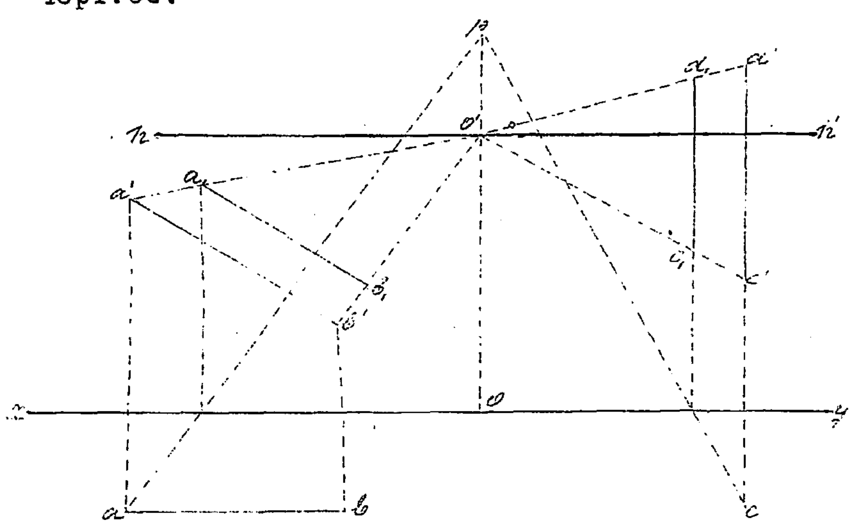
Черт.95.



лучить длину перспективнаго отрѣзка, находимъ слѣды a_1 и b_1 лучей (ар, а'о') и (bр, а'о') на картинной плоскости, черезъ что получаемъ перспективу a_1b_1 даннаго отрѣзка.

Если бы данный отрѣзокъ лежалъ въ предметной плоскости, какъ, напр., отрѣзокъ (аb, а"), то его перспектива выразилась бы отрѣзкомъ a_2b_2 (черт.95).

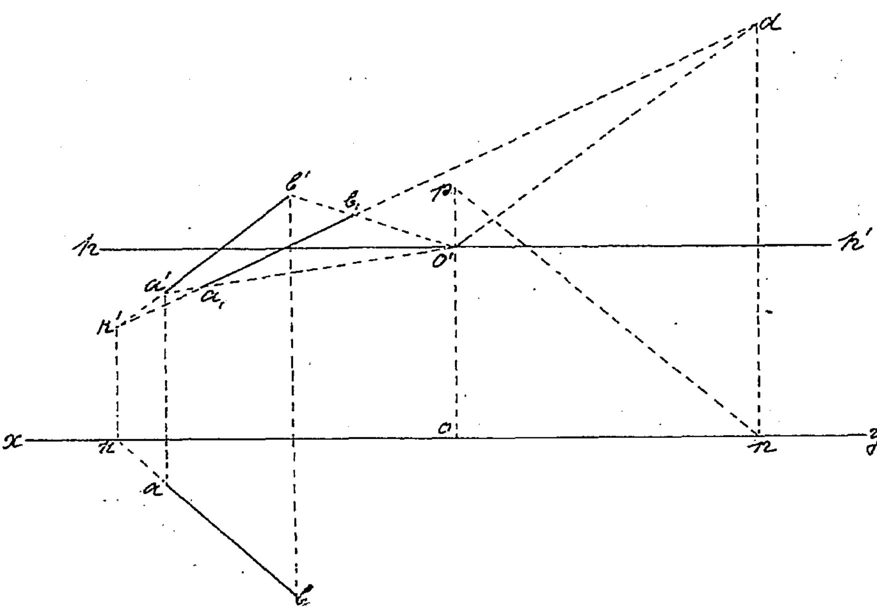
Черт.96.



Если прямая параллельна картинной плоскости(черт. 96-ой), то, какъ мы знаемъ, ея перспектива будетъ параллельна ортогональной проекціи на плоскости Q, т.е. a_1b_1 будетъ параллельна а'b'; поэтому для полученія перспективы даннаго отрѣзка достаточно построить перспективу одной его точки. Найдемъ перспективу точки (а,а'), т.е. точку a_1, и проведемъ черезъ нее a_1b_1 параллельно $a'b'$ до встрѣчи съ $b'o'$, тогда полученный отрѣзокъ a_1b_1 и будетъ искомою перспективою. Такимъ же образомъ поступимъ при построенiи перспективы c_1d_1 отрѣзка (c, $c'd'$), перпендикулярнаго къ предметной плоскости. Изъ послѣдняго примѣра видно, что, если прямая перпендикулярна къ предметной плоскости, то ея перспектива перпендикулярна къ основанiю картины.

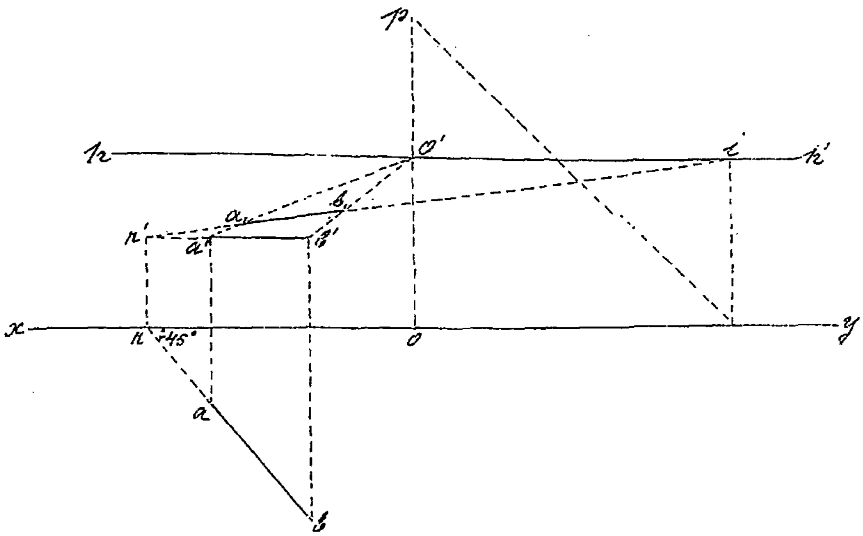
2) Построить перспективу отрѣзка (ab, $a'b'$) (черт.97).

Черт.97.



Строимъ точку схода d прямыхъ, параллельныхъ данному отрѣзку; для этого черезъ p проводимъ pn параллельно горизонтальной проекцiи ab данной прямой, а черезъ o' - параллель $o'd$ вертикальной проекцiи $a'b'$; вертикальный слѣдъ d этой параллели и будетъ искомой точкой схода; соединивши эту послѣднюю съ точкой k', въ которой данная прямая пересѣкаетъ картинную плоскость, получимъ направленiе перспективы нашего отрѣзка; точки же a_1 и b_1 пересѣченiя $k'd$ съ прямыми $a'o'$ и $b'o'$ будутъ перспективами крайнихъ точекъ даннаго отрѣзка, а слѣдовательно a_1b_1 - его перспективою.

Черт.98.



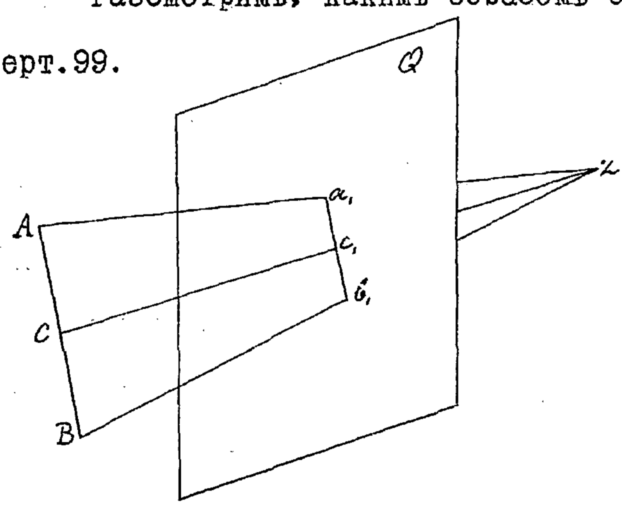
3) Построить перспективу данной горизонтальной прямой, наклоненной къ картинной плоскости подъ угломъ въ 45° (черт.98).

Точка схода получится, когда отложимъ на линіи горизонта отрѣзокъ o'i = op, т.е. разстояніе точки зрѣнія до картинной плоскости; остальное построеніе одинаково съ предыдущимъ.

ДѢЛЕНІЕ ОТРѢЗКА, ВЫРАЖЕННАГО ПЕРСПЕКТИВОЮ, НА РАВНЫЯ И ПРОПОРЦІОНАЛЬНЫЯ ЧАСТИ.

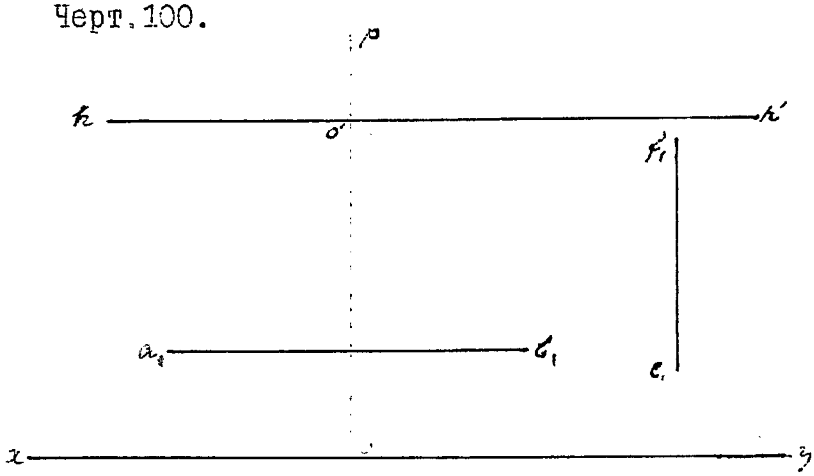
Разсмотримъ, какимъ образомъ отрѣзокъ, данный перспективою, дѣлится на равныя и пропорціональныя части. Допустимъ, что данный отрѣзокъ AB параллеленъ картинной плоскости Q, тогда его перспектива a,b, (черт.

Черт.99.



99-ый) будетъ параллельна самому отрѣзку АВ и, если его въ точкѣ С раздѣлимъ пополамъ, или въ данномъ отношенiи, и найдемъ перспективу c_1 точки С, то она раздѣлитъ a_1b_1 на части равныя, или въ томъ же отношенiи, что слѣдуетъ изъ подобiя треугольниковъ. Такимъ образомъ, если дана перспектива отрѣзка, параллельнаго картинной плоскости, то вмѣсто дѣленiя самаго отрѣзка можно дѣлить его перспективу.

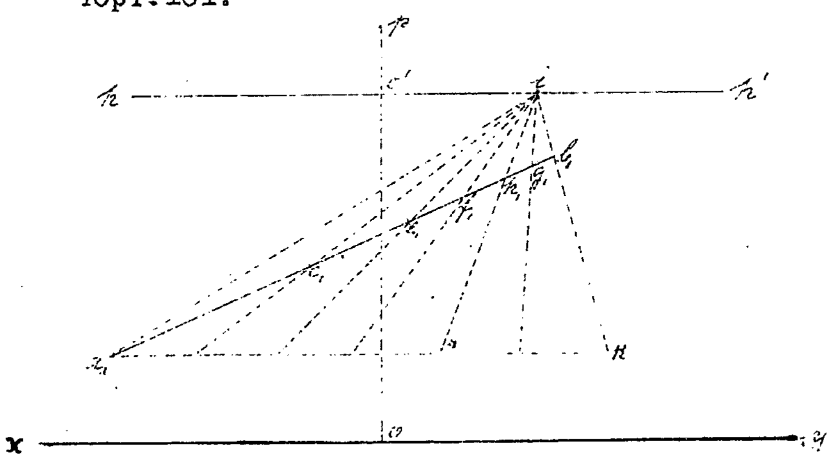
Черт.100.



Такимъ же образомъ поступаютъ, когда перспектива a_1b_1 параллельна основанiю картины, или перпендикулярна къ тому же основанiю (черт.100), напр. e_1f_1.

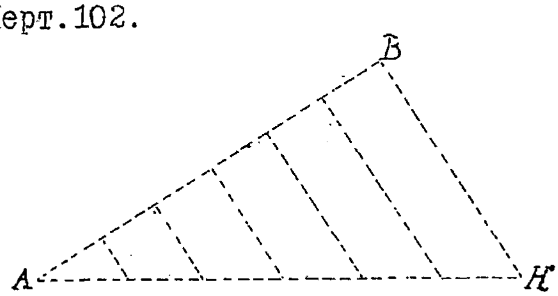
Если a_1b_1 означаетъ перспективу отрѣзка (черт.101), лежащаго въ предметной плоскости, но не параллельнаго картинной, то при дѣленiи его поступаютъ такъ: черезъ a_1 проводятъ параллель основанiю картины и на ней откладываютъ столько равныхъ частей (произ-

Черт.101.



вольныхъ), на сколько желаютъ раздѣлить данный отрѣзокъ; послѣднюю точку k соединяютъ съ другой конечной точкой b, и линію $kb_{,}$ продолжаютъ до встрѣчи съ линіею горизонта hh' въ точкѣ i. Линіи $a_{,}b_{,}$ и $a_{,}k$, какъ извѣстно, - перспективы линій, лежащихъ въ предметной плоскости, а потому и линія ki, проходящая черезъ точки $b_{,}$ и k, будетъ перспективою прямой, лежащей въ предметной плоскости; такимъ образомъ точка i, лежащая на линіи горизонта hh', будетъ точкою схода всѣхъ прямыхъ, параллельныхъ той линіи, которой перспектива есть ki. Соединивъ точку i съ остальными точками дѣленія линіи $a_{,}k$ въ пересѣченіи съ $a_{,}b_{,}$, получаемъ точки $c_{,}$, $e_{,}$, $f_{,}$, $h_{,}$, $g_{,}$, обозначающія перспективы тѣхъ точекъ, въ которыхъ данный отрѣзокъ дѣлится на равныя части линіями, параллельными той, которой перспектива есть ki. Этотъ способъ дѣленія основанъ на геометрическомъ дѣленіи отрѣзка на равныя части (черт. 102),

Черт.102.

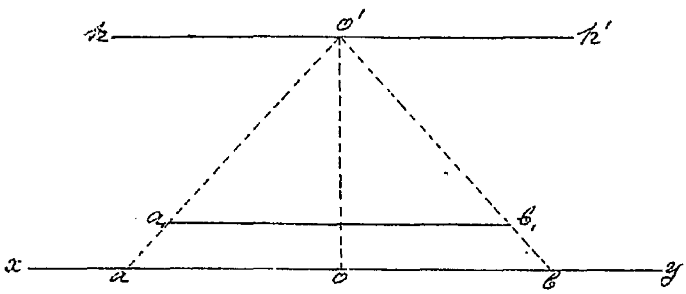


только вмѣсто самихъ линій въ данномъ случаѣ (черт.101) мы употребляемъ ихъ перспективы.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ ДЛИНЫ ОТРѢЗКА ПО ЕГО ПЕРСПЕКТИВѢ.

Разсмотримъ вопросы, относящіеся къ опредѣленію длины отрѣзка по его перспективѣ. Пусть $a_{,}b_{,}$ есть перспектива отрѣзка, лежащаго въ предметной плоскости и параллельнаго основанію картины; требуется найти его на-

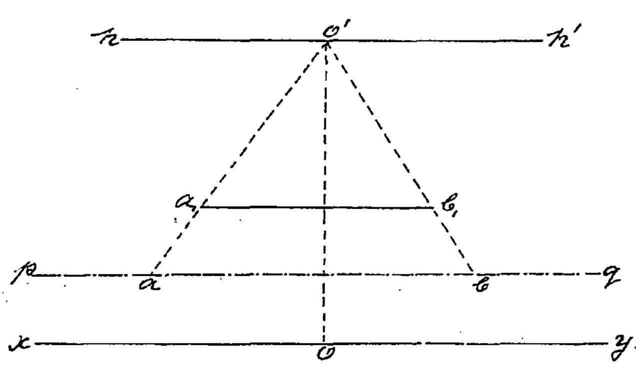
Черт.103.



туральную длину.

Для рѣшенія задачи (черт.103) конечныя точки отрѣзка соединяемъ съ центромъ картины и продолжаемъ до встрѣчи съ основаніемъ xy въ точкахъ a и b; тогда отрѣзокъ ab и будетъ выражать натуральную длину отрѣзка,даннаго перспективою. Это слѣдуетъ изъ того, что a,o' и b,o' означаютъ перспективы прямыхъ, перпендикулярныхъ къ картинной плоскости и проходящихъ черезъ крайнія точки отрѣзка, и слѣдовательно, продолжая эти перпендикуляры до встрѣчи съ основаніемъ картины, мы получимъ натуральную длину отрѣзка.

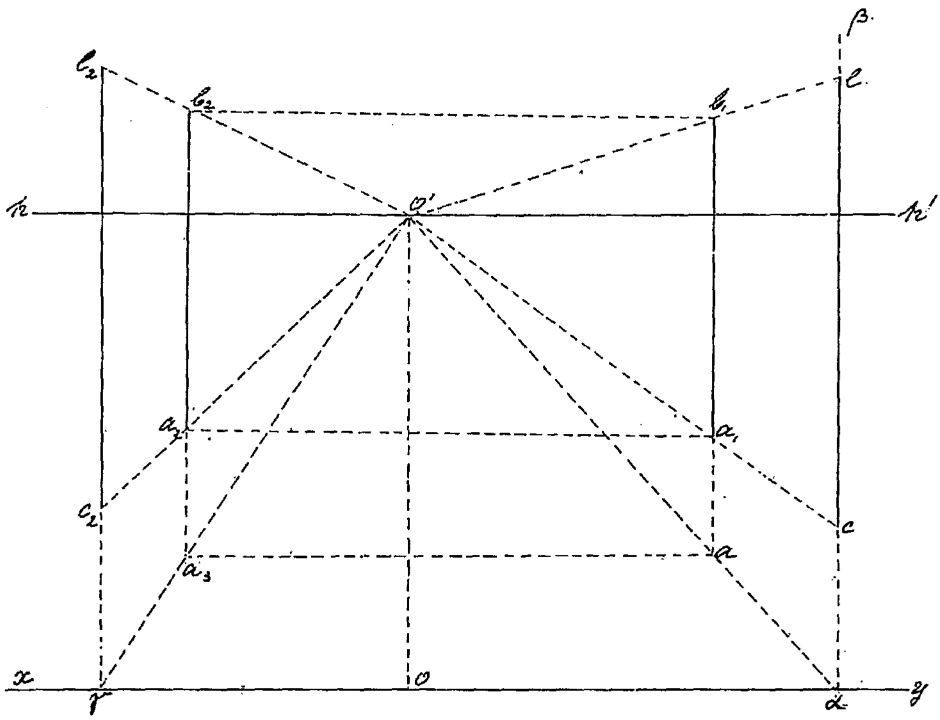
Черт.104.



Если данный отрѣзокъ,параллельный основанію картины, находится не въ предметной плоскости, а въ плоскости ей параллельной, то для опредѣленія длины его мы должны знать вертикальный слѣдъ той плоскости,въ которой онъ находится. Пусть этотъ слѣдъ есть pq (черт.104), тогда, соединивъ a, и b, съ центромъ картины o' и продоливъ прямыя a,o' и b,o' до пересѣченія съ pq, мы получимъ отрѣзокъ ab, который и будетъ искомымъ.

Если дана перспектива отрѣзка, перпендикулярнаго къ пред

Черт. 105.

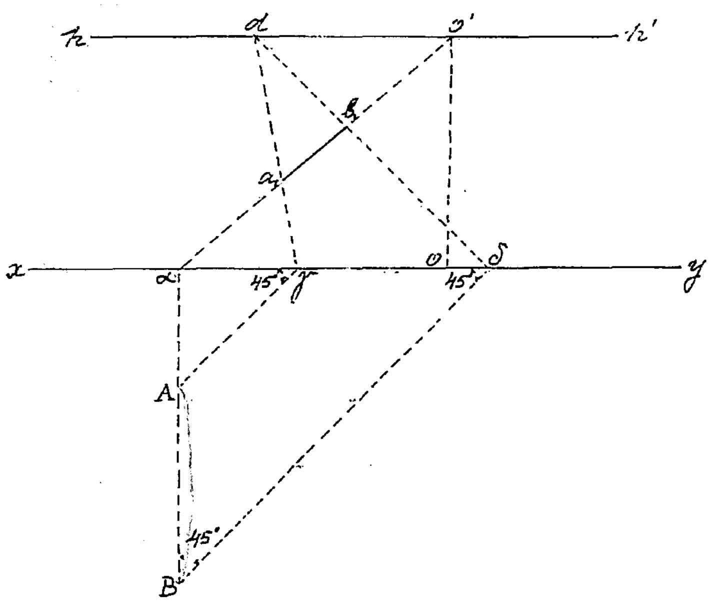


метной плоскости, то для определенія его натуральной длины нужно знать перспективу точки, въ которой онъ пересѣкаетъ предметную плоскость. Пусть a есть перспектива этой точки, а a_1b_1 – перспектива даннаго отрѣзка (черт.105). Для опредѣленія длины отрѣзка соединяемъ o' съ a, тогда линія o'a выразитъ перспективу слѣда плоскости, проведенной черезъ данный отрѣзокъ перпендикулярно къ картинной плоскости. Эта плоскость пересѣчетъ картинную плоскость по $\alpha\beta$. Соединивъ конечныя точки даннаго отрѣзка, т.е. a_1 и b_1 съ центромъ картины o', и продолжаемъ прямыя $o'a_1$ и $o'b_1$ до встрѣчи съ $\alpha\beta$ въ точкахъ c и l; тогда на $\alpha\beta$ получится отрѣзокъ cl, который и выразитъ натуральную длину даннаго отрѣзка.

Если линія o'a не пересѣкаетъ основаніе картины въ предѣлахъ чертежа, то поступаютъ такъ: произвольную точку γ линіи xy соединяютъ съ точкой o' (черт.105), а черезъ точку a проводятъ параллель xy до встрѣчи съ $\gamma o'$ въ точкѣ a_3, изъ которой возставляютъ перпендикуляръ къ основанію xy и потомъ точки $a_{,}$ и $b_{,}$ переносятъ на этотъ перпендикуляръ посредствомъ параллелей xy. Такимъ образомъ получимъ отрѣзокъ $a_2b_2 = a_{,}b_{,}$, и по перспективѣ a_2b_2 находимъ, по предыдущему, натуральную длину отрѣзка, которая и будетъ l_2c_2, равная lc.

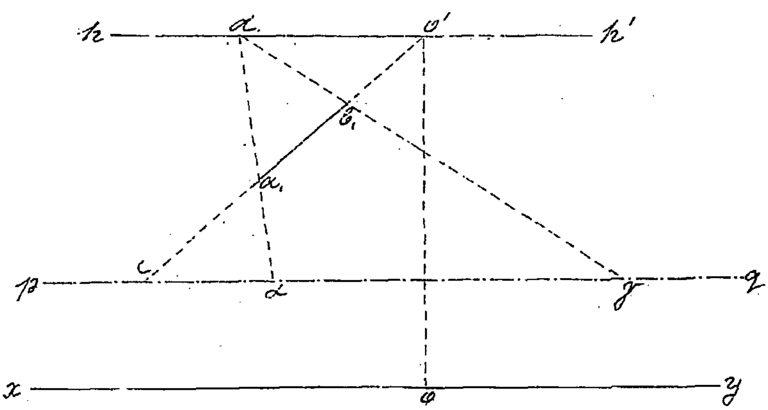
Положимъ, дана перспектива отрѣзка $a_{,}b_{,}$, лежащаго въ предметной плоскости и перпендикулярнаго къ картинной плоскости; требуется найти его натуральную длину (черт.106).

Черт.106.

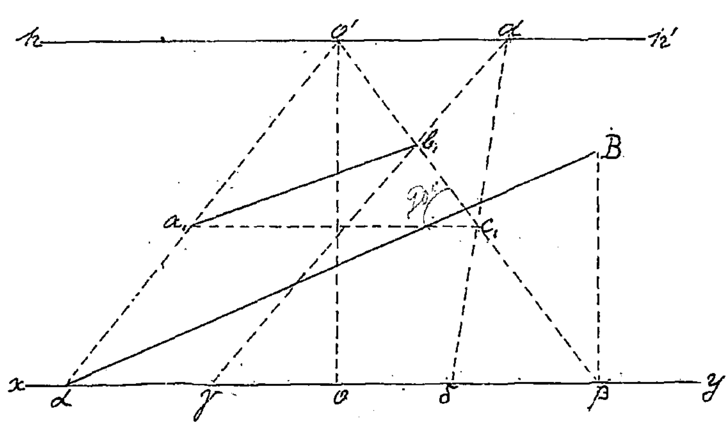


Для этого поступаемъ такимъ образомъ: точку схода d горизонтальныхъ линій, составляющихъ углы въ 45° съ картинной плоскостью, соединяемъ съ конечными точками отрѣзка $a_{,}b_{,}$, черезъ что получаемъ перспективы прямыхъ, проведенныхъ черезъ концы даннаго отрѣзка и наклоненныхъ къ картинной плоскости подъ угломъ въ 45°. Продолживъ эти прямыя до встрѣчи съ xy въ точкахъ γ и δ, получимъ отрѣзокъ $\gamma\delta$, который и опредѣлитъ натуральную длину даннаго отрѣзка. Дѣйствительно, прямая $\alpha o'$ выражаетъ перспективу прямой αB, перпендикулярной къ картинной плоскости въ точкѣ α, а линіи $d\delta$ и $d\gamma$ - перспективы линій γA и δB, наклоненныхъ къ картинѣ подъ угломъ въ 45°, и поэтому отрѣзокъ a_1b_1 будетъ перспективой отрѣзка AB. Но такъ какъ отрѣзки AB и $\gamma\delta$ равны между собой, то, слѣдовательно, отрѣзокъ $\gamma\delta$ выражаетъ натуральную величину даннаго отрѣзка.

Черт.107.



Черт.108.



Если отрѣзокъ, котораго перспектива a_1b_1 (черт.107), лежитъ не въ предметной плоскости, а въ плоскости ей параллельной, то для построенія его натуральной длины необходимо знать вертикальный слѣдъ этой плоскости. Пусть этотъ слѣдъ есть pq; тогда, построивъ точку разстояній d и соединивъ ее съ a_1 и b_1, мы на pq получимъ отрѣзокъ $\alpha\gamma$, который и выразитъ искомую натуральную длину.

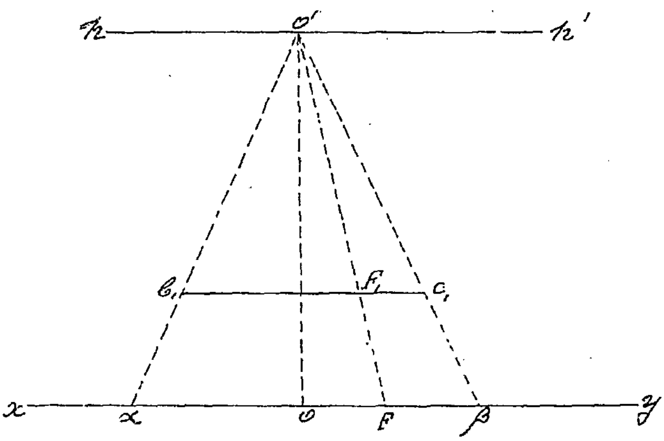
Положимъ, дана перспектива a_1b_1 (черт.108) отрѣзка, лежащаго въ предметной плоскости, но не параллельнаго основанію картины; тогда при опредѣленіи его натуральной длины поступаемъ такъ: точки a_1 и b_1 соединяемъ съ центромъ картины o', черезъ a_1 проводимъ параллель основанію картины; тогда треугольникъ $a_1 b_1 c_1$ будетъ представлять центральную проекцію такого прямоугольнаго треугольника, у котораго $a_1 b_1$ будетъ выражать перспективу гипотенузы, $a_1 c_1$ - перспективу одного катета, а $b_1 c_1$ - перспективу другого катета, и потому, если найдемъ натуральную длину отрѣзковъ $b_1 c_1$ и $a_1 c_1$ и на нихъ построимъ прямоугольный треугольникъ, то его гипотенуза и выразитъ натуральную длину отрѣзка $a_1 b_1$. Отрѣзокъ $\alpha\beta$, лежащій на основаніи картины, выражаетъ натуральную длину отрѣзка $a_1 c_1$, а чтобы получить натуральную длину другого катета, мы, согласно предыдущему, соединяемъ точку разстояній d съ b_1 и c_1, и тогда $\gamma\delta$ будетъ длиной другого катета. Построивши на этихъ катетахъ прямоугольный треугольникъ $\alpha B \beta$, построимъ и натуральную длину отрѣзка, которая будетъ равна αB.

Если бы данный отрѣзокъ находился не въ предметной плоскости, а въ плоскости ей параллельной, то подобное построеніе мы сдѣлали бы относительно вертикальнаго слѣда той плоскости, въ которой онъ находится.

Разсмотримъ, какъ на перспективѣ даннаго отрѣзка, лежащаго на предметной плоскости, отложить отъ какой-нибудь точки данную длину.

Положимъ, что на перспективѣ $b_1 c_1$ отрѣзка, лежащаго въ предметной плоскости и параллельнаго картинной плоскости, нужно отложить отъ точки b_1 (черт.109) данную длину. Для этого точку o' соединяемъ съ b_1 и c_1 и прямыя $b_1 o'$ и $c_1 o'$ продолжаемъ до встрѣчи съ xy въ точкахъ α и β; тогда отрѣзокъ $\alpha\beta$

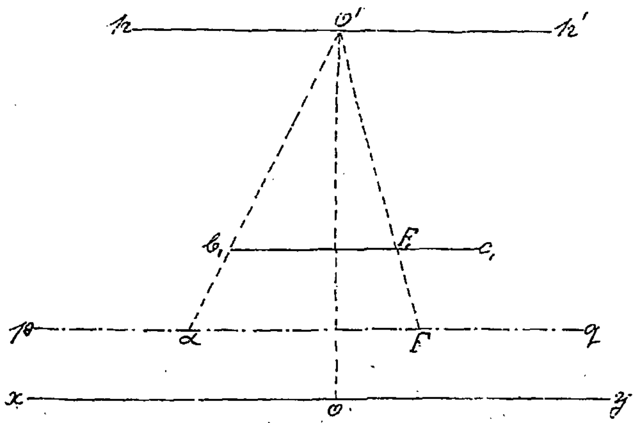
Черт.109.



выразить натуральную длину отрѣзка ъ,с, . Отъ точки α на линіи xy откладываемъ отрѣзокъ αF, равный данной длинѣ и точку F соединяемъ съ центромъ картины о';отрѣзокъ b,F, и будетъ искомымъ.

Если отрѣзокъ b,c, (черт.110) означаетъ перспективу отрѣзка, лежащаго въ плоскости, параллельной предметной плоскости, то для рѣшенія той же задачи необходимо знать вертикальный слѣдъ pq плоскости, въ которой онъ находится, и разсмотрѣнное построеніе въ этомъ случаѣ относить къ линіи pq, такъ что отъ точки α на pq надо отложить отрѣзокъ αF, равный данной длинѣ, и о' соединить съ F, тогда отрѣзокъ ъ,F, будетъ искомымъ.

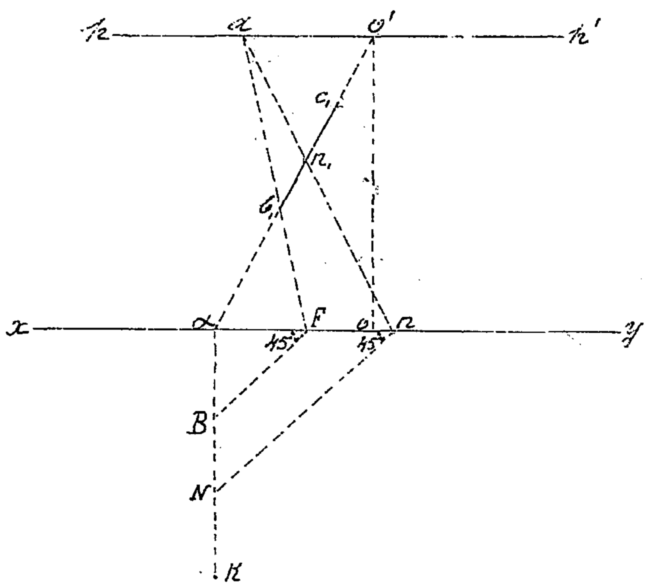
Черт.110.



Рѣшеніе той же задачи для случая, когда данный отрѣзокъ, находящійся въ предметной плоскости, перпендикуляренъ къ картинной плоскости (черт.111).

Въ этомъ случаѣ поступаемъ такъ: на линіи горизонта отъ

Черт.111.

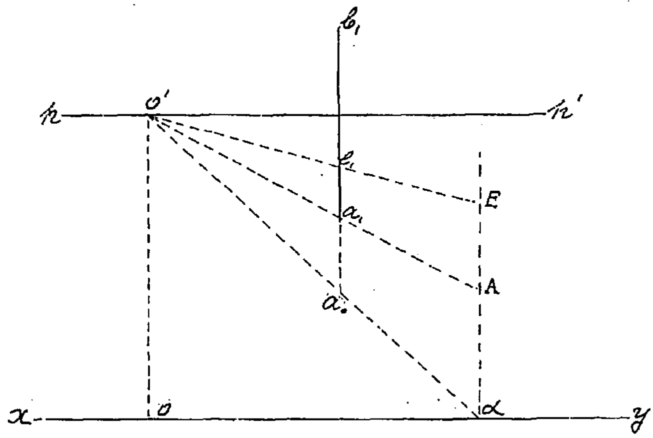


точки o' откладываемъ разстоянiе o'd, равное разстоянiю точки зрѣнiя до картины, и полученную точку d соединяемъ съ b,, а отъ точки F на линiи xy откладываемъ отрѣзокъ Fn, равный данной длинѣ; точку n соединяемъ съ точкой d; тогда отрѣзокъ b,n, и будетъ искомымъ. Дѣйствительно, αo' есть перспектива прямой αK, перпендикулярной къ xy, а dn и dF - перспективы прямыхъ nN и BF, наклоненныхъ къ картинѣ подъ угломъ въ 45°; но Fn = NB, а потому отрѣзокъ b,n, - искомый.

Если данный отрѣзокъ, будучи перпендикуляренъ къ картинной плоскости, будетъ лежать въ плоскости, параллельной предметной плоскости, то для рѣшенiя предыдущей задачи нужно знать вертикальный слѣдъ pq этой плоскости и построенiе дѣлать такъ же, какъ въ только что разсмотрѣнномъ случаѣ, но только α, F и n будутъ получаться не на xy, а на pq.

Рѣшенiе этого вопроса для случая, когда данный отрѣзокъ перпендикуляренъ къ предметной плоскости. В ъ э т о м ъ с л у ч а ѣ н у ж н о з н а т ь п е р с п е к т и в у г о р и з о н т а л ь н а г о с л ѣ д а д а н н а г о о т р ѣ з к а. Пусть a,b, (черт.112) есть перспектива отрѣзка,

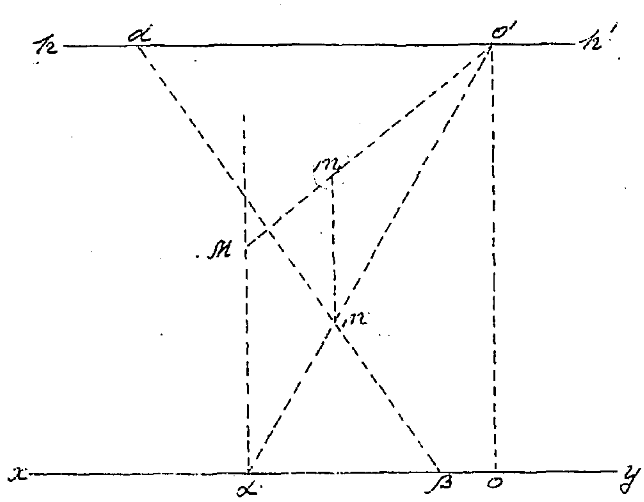
Черт. 112.



перпендикулярнаго къ предметной плоскости, а a_0 - перспектива его горизонтальнаго слѣда; положимъ, данную длину надо отложить отъ точки a_1; тогда o' соединяемъ съ a_0 и a_1, въ точкѣ α возставляемъ перпендикуляръ къ xy и продолжаемъ его до встрѣчи съ o'a_1 въ точкѣ A; на линіи αA откладываемъ отрѣзокъ AE, равный данной длинѣ, полученную точку E соединяемъ съ o' и въ пересѣченіи съ a_1b_1 получаемъ точку e_1. Отрѣзокъ a_1e_1 и будетъ искомымъ.

Если даны перспектива точки, лежащей въ пространствѣ и

Черт. 113.

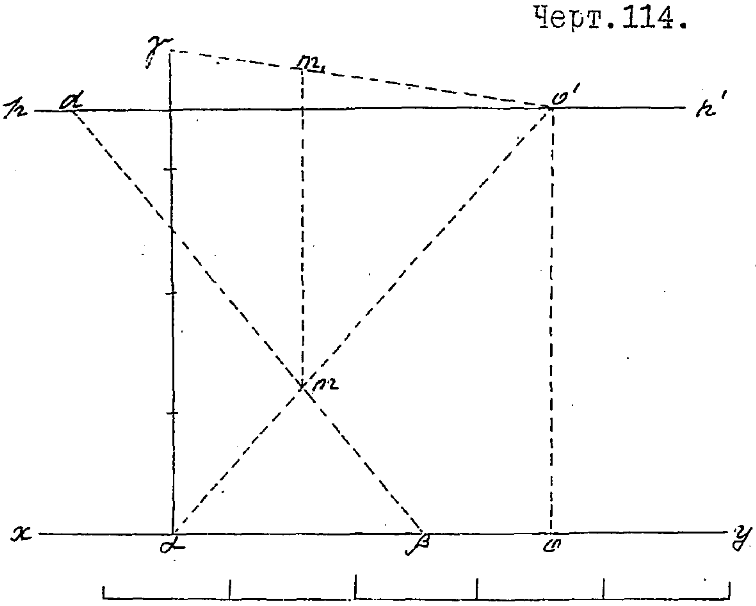


перспектива ея горизонтальной проекціи, то мы можемъ найти разстоянія этой точки отъ центральной, предметной и картинной плоскостей (черт. 113).

Пусть m_1 означаетъ перспективу точки, лежащей въ пространствѣ, а m - перспективу ея горизонтальной проекціи; требуется опредѣлить разстояніе этой точки отъ центральной, предметной и картинной плоскостей. Для этого o' соединяемъ съ m, тогда отрѣзокъ оα опредѣлитъ разстояніе точки отъ центральной плоскости; если же въ точкѣ α возставимъ къ xy перпендикуляръ и точку o' соединимъ съ m, и o'm, продолжимъ до встрѣчи съ этимъ перпендикуляромъ въ точкѣ M, то отрѣзокъ Mα выразитъ разстояніе точки до предметной плоскости, а чтобы опредѣлить разстояніе точки до картинной плоскости, мы точку разстояній d соединяемъ съ m и тогда отрѣзокъ $\alpha\beta$ опредѣлитъ разстояніе точки до картинной плоскости.

Обратно, зная разстоянія точки отъ плоскостей: центральной, картинной и предметной, можно построить перспективу этой точки. Пусть точка отстоитъ отъ центральной плоскости влѣво на разстояніи трехъ единицъ (черт.114), отъ картинной -на разстояніи двухъ единицъ и отъ предметной - на разстояніи четырехъ единицъ; требуется построить ея перспективу. Для этого изъ точки o влѣво на линіи xy откладываемъ три единицы длины и полученную точку α соединяемъ съ o'; тогда на этой прямой будетъ лежать перспектива горизонтальной проекціи точки. Чтобы ее найти, мы отъ α откладываемъ двѣ единицы длины и точку β соединяемъ съ точкой разстояній d,

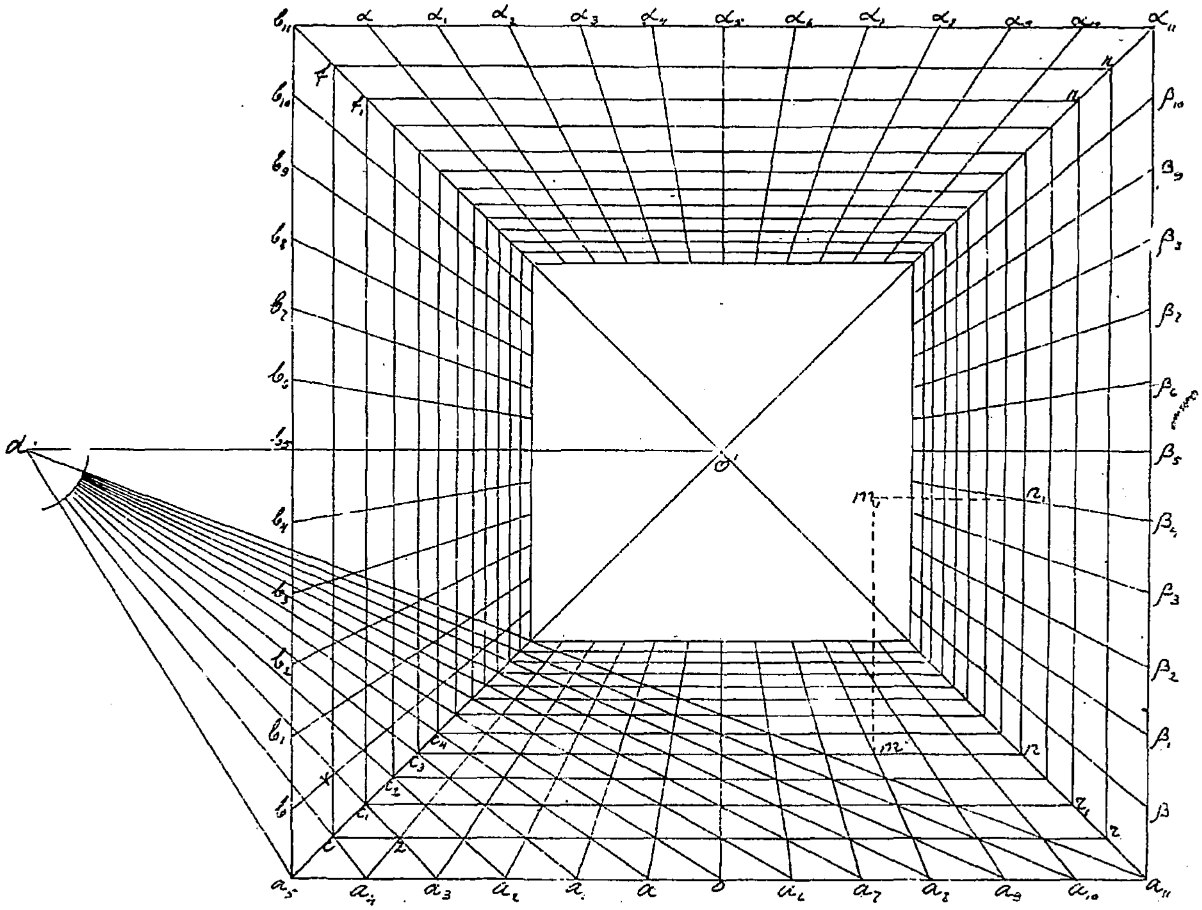
Черт.114.



тогда въ пересѣченіи прямыхъ α o' съ βd получится точка m, которая и будетъ перспективою горизонтальной проекціи точки; черезъ точку m проводимъ перпендикуляръ къ основанію картины xy; на этомъ перпендикулярѣ будетъ лежать перспектива самой точки, а чтобы ее получить, въ точкѣ α возставляемъ перпендикуляръ къ xy, на которомъ и откладываемъ четыре единицы длины; полученную точку γ соединяемъ съ o', тогда на прямой γo' будетъ лежать перспектива нашей точки; пересѣченіе mm_1 съ γo' дастъ искомую точку m_1.

При построеніи перспективъ различныхъ фигуръ или тѣлъ, лежащихъ въ пространствѣ, иногда бываетъ нужно знать перспективу единицы длины, отложенной по тремъ главнымъ направленіямъ: вертикальному - для измѣренія высоты, горизонтальному и параллельному xy - для измѣренія широты и по перпендикулярному къ картинной плоскости - для измѣренія разстоянія отъ картинной плоскости. П е р с п е к т и в а е д и н и ц ъ д л и н ы, о т л о ж е н н ы х ъ п о э т и м ъ т р е м ъ г л а в н ы м ъ н а п р а в л е н і я м ъ, с о с т а в л я е т ъ т а к ъ н а з ы в а е м ы й п е р с п е к т и в н ы й м а с ш т а б ъ. Этотъ масштабъ строится слѣдующимъ образомъ: на основаніи картины xy отъ точки o въ ту и въ другую сторону откладываются отрѣзки $oa = aa_1 = a_1a_2 = \dots = oa_6 = a_6a_7 = \dots \dots = 1$ полученныя точки соединяемъ съ центромъ o' (черт.115). Тогда прямыя $o'a_6$, $o'a_5$, $o'a_4 \dots$ будутъ перспективами перпендикуляровъ къ картинной плоскости въ точкахъ a_6, $a_5 \dots$, а прямыя $o'\alpha$, $o'\alpha_1$, $o'\alpha_2 \dots$ - перспективами перпендикуляровъ

Черт.115.



къ картинной плоскости въ точкахъ α , α_1 , α_2 ..... Разстояніе между какими-нибудь смежными прямыми о'a_2 и о'a_1 будетъ имѣть длину, равную 1, поэтому каждый изъ треугольниковъ a_1о'a_2, a_2о'a_3 и т.д. называется треугольникомъ масштаба широты. Если черезъ точку a_5 линіи ху возставимъ къ ней перпендикуляръ и на немъ отложимъ отрѣзки $a_5b = bb_1 = b_1b_2 = \ldots\ldots$, равные той же единицѣ и точки b, b_1, b_2 и т.д. соединимъ съ центромъ картины о', то получимъ перспективы перпендикуляровъ къ картинной плоскости въ точкахъ b, b_1, b_2....; совокупность этихъ линій составляетъ масштабъ, служащій для измѣренія высотъ. Каждый изъ треугольниковъ bо'b_1, b_1о'b_2 и т.д. называется масштабомъ высоты. Треугольникъ $a_5o'b_{//}$ служитъ масштабомъ только для вертикальныхъ линій, лежащихъ въ профильной плоскости, вертикальный слѣдъ которой - $a_5b_{//}$.

Если точку разстояній d соединить съ точками a_4, a_3, a_2 ...., то эти прямыя отсѣкутъ на $o'a_5$ отрѣзки a_5c, $cc_/$, $c_/c_2$ ... , натуральная длина которыхъ равна отложенной единицѣ. Помощью дѣленій линіи a_5o' измѣряется разстояніе точекъ отъ картинной плоскости, а совокупность такихъ дѣленій составляетъ масштабъ, служащій для измѣренія удаленій точекъ отъ картинной плоскости. Точки c, $c_/$, c_2.... отстоятъ отъ картинной плоскости соотвѣтственно на разстояніяхъ единицы, двухъ единицъ, трехъ ..... и т.д.

На основаніи всего сказаннаго, если четыреугольникъ $a_5b_{//}\alpha_{//}a_{//}$, лежащій на картинной плоскости, есть квадратъ, то четыреугольникъ cfkr выразитъ перспективу этого квадрата, но только отодвинутаго отъ картинной плоскости на разстояніе, равное единицѣ длины, четыреугольникъ $c_/f_/k_/r_/$ выразитъ перспективу того же квадрата, но только отодвинутаго отъ картинной плоскости на двѣ единицы и т.д. Такъ какъ четыреугольники **cfkr**, $c_/f_/k_/r_/$ и т.д. тоже квадраты, то заключаемъ, что п е р с п е к т и в ы ф и г у р ъ, л е ж а щ и х ъ в ъ п л о с к о с т я х ъ, п а р а л л е л ь н ы х ъ к а р т и н н о й п л о с к о с т и, т о л ь к о с о к р а щ а ю т с я в ъ р а з м ѣ р а х ъ, о с т а в а я с ь ф и г у р а м и, п о д о б н ы м и м е ж д у с о б о ю.

Отношеніе $\frac{cz}{a_5a_4}$ называется перспективнымъ сокращеніемъ по горизонтальному направленію, $\frac{cv}{ba_5}$ - по вертикальному; но изъ подобія треугольниковъ $o'a_5a_4$ и $co'z$ съ одной стороны и треугольниковъ ba_5o' и $vo'c$ - съ другой видно, что отношеніе $\frac{cz}{a_5a_4} = \frac{cv}{a_5b} = \frac{o'c}{o'a_5}$, т.е. что сокращенія въ плоскости cfkr по двумъ взаимно-перпендикулярнымъ направленіямъ равны.

Пользуясь перспективнымъ масштабомъ, легко опредѣлить координаты точки относительно плоскостей: картинной, предметной и центральной, если даны перспектива точки, положимъ m_1, и перспектива m - ея горизонтальной проекціи.

Для этого o' соединяемъ съ m; тогда oa_8 выразитъ разстояніе точки отъ центральной плоскости. Затѣмъ черезъ m проводимъ параллель xy до пересѣченія съ $o'a_5$ въ точкѣ c_3 или съ $o'a_{11}$ въ точкѣ n; тогда отрѣзокъ $a_5c_3 = a_{11}n$ опредѣлитъ разстояніе точки до картинной плоскости, равное 4 единицамъ длины. Чтобы найти разстояніе точки отъ предметной плоскости, надо въ точкѣ n возставить перпендикуляръ къ xy, а черезъ m_1 провести параллель xy до встрѣчи ея съ этимъ перпендикуляромъ въ точкѣ n_1, которую надо соединить съ o' и продолжить до встрѣчи съ $a_{11}\alpha_{11}$ въ точкѣ β_4; тогда отрѣзокъ $a_{11}\beta_4$ выразитъ искомое разстояніе.

Обратно, если даны разстоянія точки отъ плоскостей: центральной, картинной и предметной, то при посредствѣ этого масштаба легко найти перспективу этой точки. Пусть точка отстоитъ отъ центральной плоскости вправо на 3 един., отъ предметной - на 5 единицъ и отъ картинной - на 4 единицы. Тогда откладываемъ на основанiи картины вправо отъ точки о отрѣзокъ oa_3 = 3 ед. и точку o' соединяемъ съ a_3, далѣе на линiи $o'a_5$ беремъ точку c_3, отстоящую отъ картины на 4 ед., и проводимъ черезъ нее параллель ху до пересѣченiя $o'a_3$; получаемъ точку m, изъ которой проводимъ mm_1 перпендикулярно къ ху и на немъ откладываемъ $mm_1 = nn_1$; точка m_1 будетъ искомой.

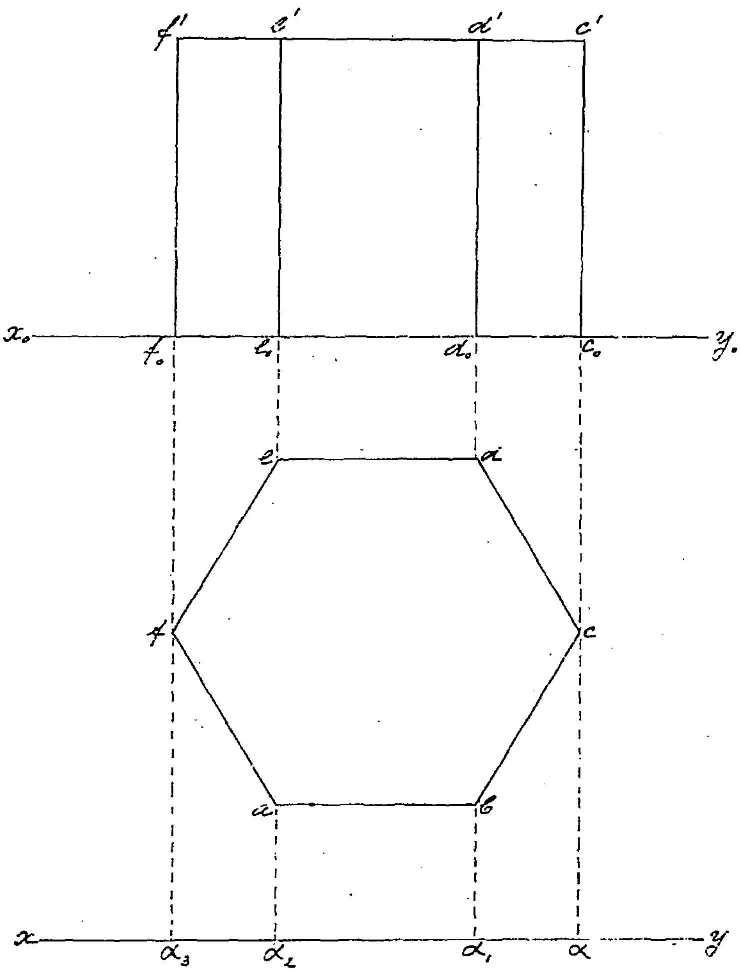
ПОСТРОЕНIЕ ПЕРСПЕКТИВЫ ТѢЛЪ.

Построенiе перспективы тѣлъ сводится къ построенiю точекъ и линiй, лежащихъ на ихъ поверхностяхъ; при этомъ находятъ перспективы такихъ линiй, которыя служатъ очеркомъ видимой части даннаго тѣла. Мы разсмотримъ построенiя перспективы призмы, пирамиды, цилиндра и конуса.

Построимъ перспективу прямой призмы, данной ортогональными проекцiями (черт.116).

Пусть abcdef - горизонтальная проекцiя прямой призмы, а $f_o e_o d_o c_o c'd'e'f'$ - вертикальная, при чемъ $f_o e_o d_o c_o$ - вертикальная проекцiя нижняго основанiя, а $f'e'd'c'$ - верхняго. Проекцiи призмы могутъ быть даны или относительно картинной и предметной плоскостей, или же относительно произвольныхъ плоскостей проекцiй. Въ послѣднемъ случаѣ должно быть опредѣлено положенiе картинной плоскости относительно выбранной системы плоскостей проекцiй. Если предположимъ, что призменная плоскость совпадаетъ съ горизонтальной выбранной системы, то положенiе картинной плоскости опредѣляется положенiемъ эя основанiя ху

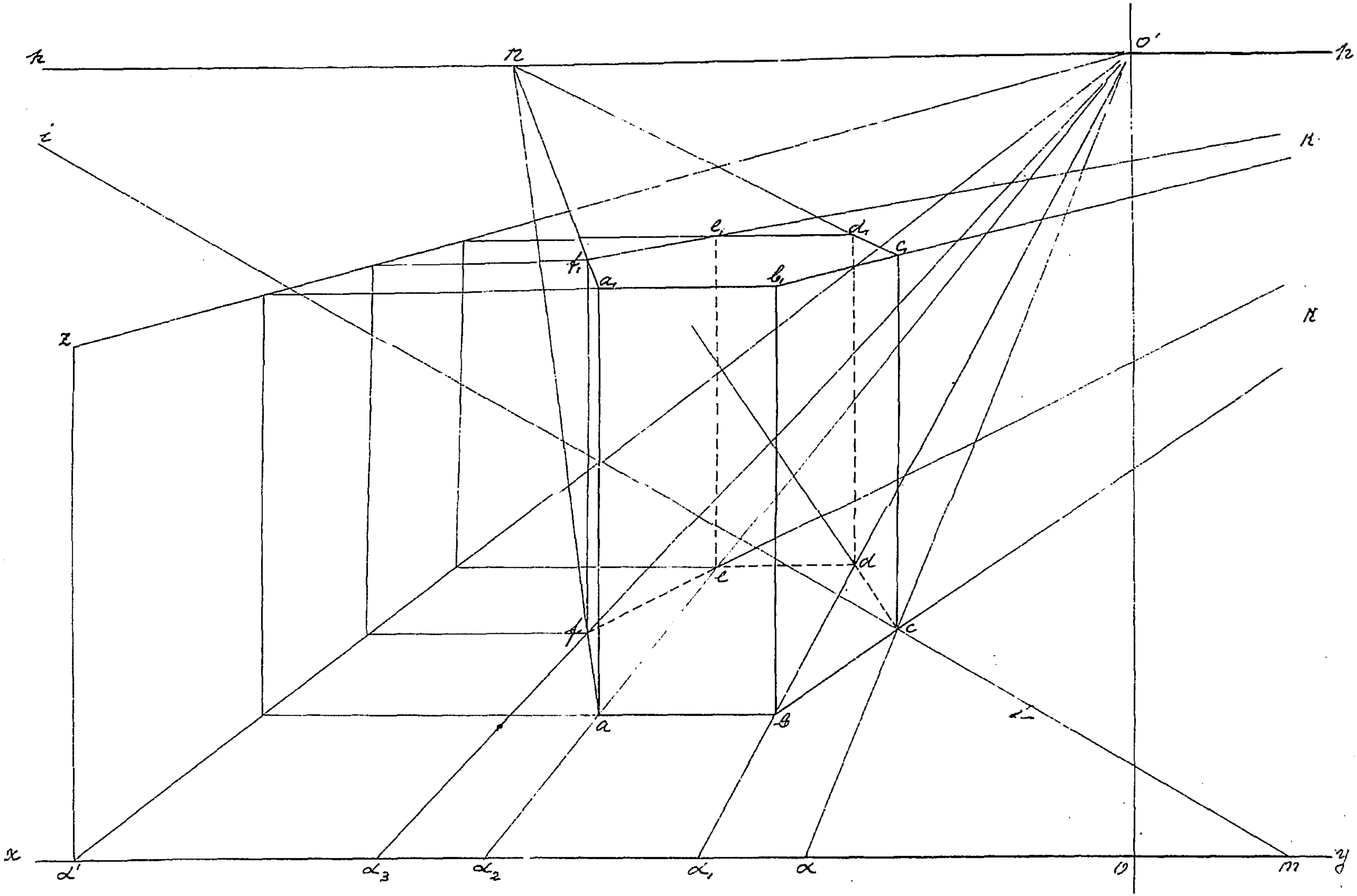
Черт.116.



на этой плоскости, а положенiе центральной плоскости - точкою с. произвольно взятою на линiи xy. Перспективное изображенiе удобнѣе дѣлать на отдѣльномъ чертежѣ (117).

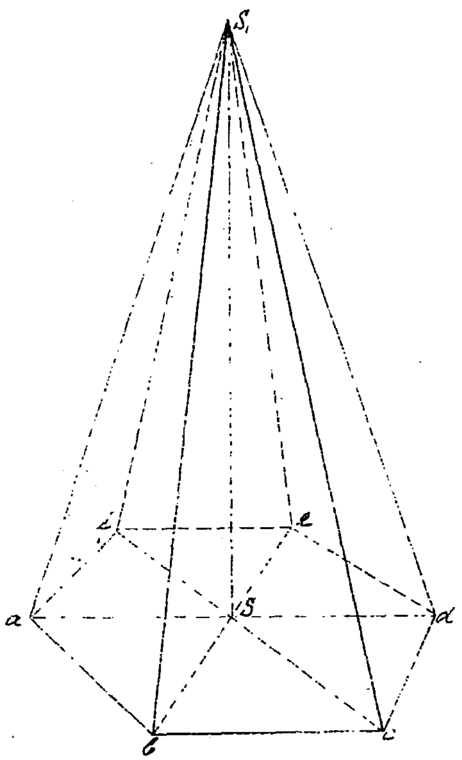
Линiя горизонта hh' проводится отъ xy на разстоянiи точки зрѣнiя отъ предметной плоскости. Разстоянiе точки зрѣнiя отъ изображаемаго тѣла выбирается такъ, чтобы можно было, какъ говорится, окинуть однимъ взглядомъ весь предметъ, не поворачивая головы въ разныя стороны. Этому требованiю удовлетворяетъ разстоянiе, которое будетъ отъ двухъ и даже трехъ разъ болѣе наибольшаго размѣра въ ширину или вышину разсматриваемаго тѣла. Если мѣстныя условiя мѣшаютъ зрителю на наивыгоднѣйшемъ разстоянiи отъ 2-хъ до 3-хъ разъ большаго размѣра въ ширину или вышину тѣла, то ограничиваются разстоянiемъ, равнымъ разстоянiю возможнаго положенiя зрителя.

Когда картинная плоскость проходитъ черезъ точку тѣла, ближайшую къ точкѣ зрѣнія, то перспектива называется перспективою въ натуральную величину, въ противномъ случаѣ - уменьшенною. Разстояніе точки зрѣнія до картинной плоскости получится, когда изъ разстоянія точки зрѣнія до изображаемаго предмета отнимемъ разстояніе этого послѣдняго до картинной плоскости. Это разстояніе откладывается на линіи горизонта отъ точки o'; такимъ образомъ, на нашемъ чертежѣ получена точка i. Построивши главныя точки и линіи, переходимъ къ построенію призмы. При заданіи тѣла ортогональными проекціями, легко находятся координаты какой угодно ея точки; такъ координаты точки (c, c') призмы (чертежъ 116) будутъ: $x = o\alpha$, $y = \alpha c$, $z = c'c_0$, а по координатамъ точки мы можемъ построить ея перспективу. Для этого изъ вершины горизонтальной проекціи призмы опускаемъ перпендикуляръ на xy, съ черт. 116 переносимъ на черт. 117 на соотвѣтствующую линію длины: $o\alpha$, $o\alpha_1$, $o\alpha_2$, $o\alpha_3$ и полученныя точки α, α_1, α_2 и α_3 соединяемъ съ o'. Пользуясь перспективнымъ масштабомъ, находимъ перспективы вершинъ c и b (или откладываемъ отъ α вправо по xy длину $\alpha m = \alpha c$ и точку m соединяемъ съ точкой разстояній i; пересѣченіе $\alpha o'$ съ im дастъ искомую перспективу c; подобно этому находится и перспектива b другихъ вершинъ). Проводя изъ b параллель xy до встрѣчи съ $o'\alpha_2$, получимъ ba - перспективу прямой $(ab, e_0 d_0)$ паралл. xy (черт. 116). Точки e и f (черт. 116) лежатъ на линіи, параллельной xy; поэтому перспектива f построится, если изъ c проведемъ параллель xy



Черт.117.

Черт.118.

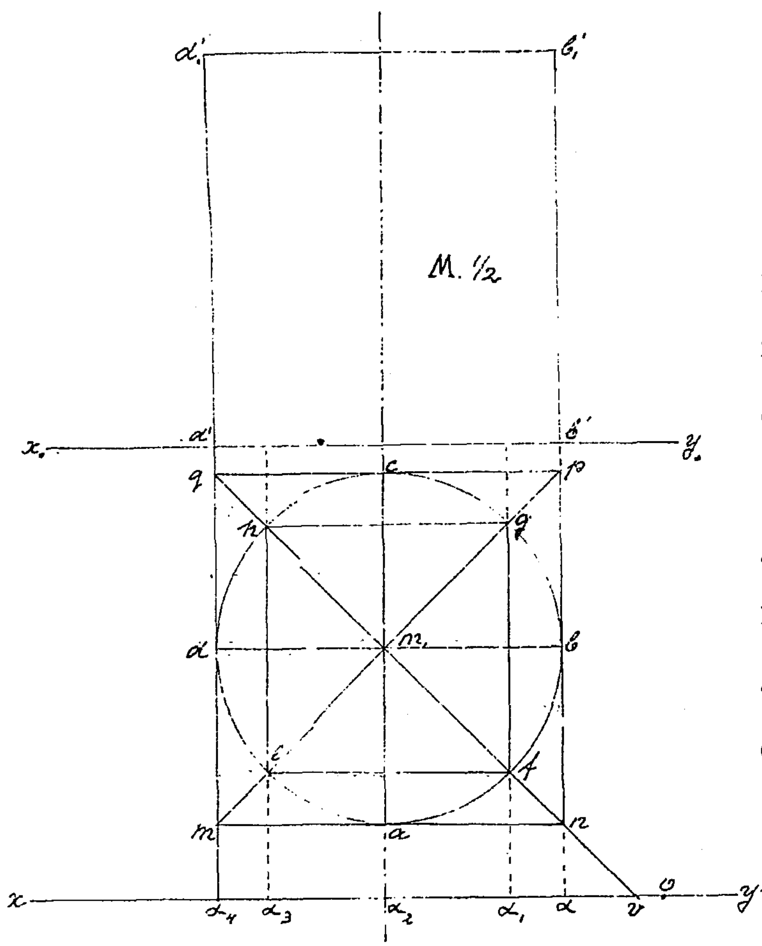


до встрѣчи съ $o'\alpha_3$. Продолжая af до встрѣчи съ линіей горизонта въ точкѣ n, получимъ точку схода прямыхъ, параллельныхъ af (черт.116); поэтому, соединивъ n съ c (черт.117) въ пересѣченіи съ $o'\alpha_1$ – получимъ перспективу **d**: перспектива de параллельна xy. Если bc продолжимъ до встрѣчи съ линіей горизонта въ точкѣ к, то получимъ точку схода прямыхъ, параллельныхъ bc (черт.116), поэтому продолженіе перспективы fe должно пройти черезъ точку к. Построивши перспективу основанія призмы, строимъ перспективу боковыхъ реберъ, пользуясь масштабомъ высотъ и точками схода n и к. Это построеніе ясно изъ чертежа 117. Перспектива крайнихъ реберъ cc_1 и aa_1, очевидно, принадлежитъ очерку видимой части боковой поверхности призмы.

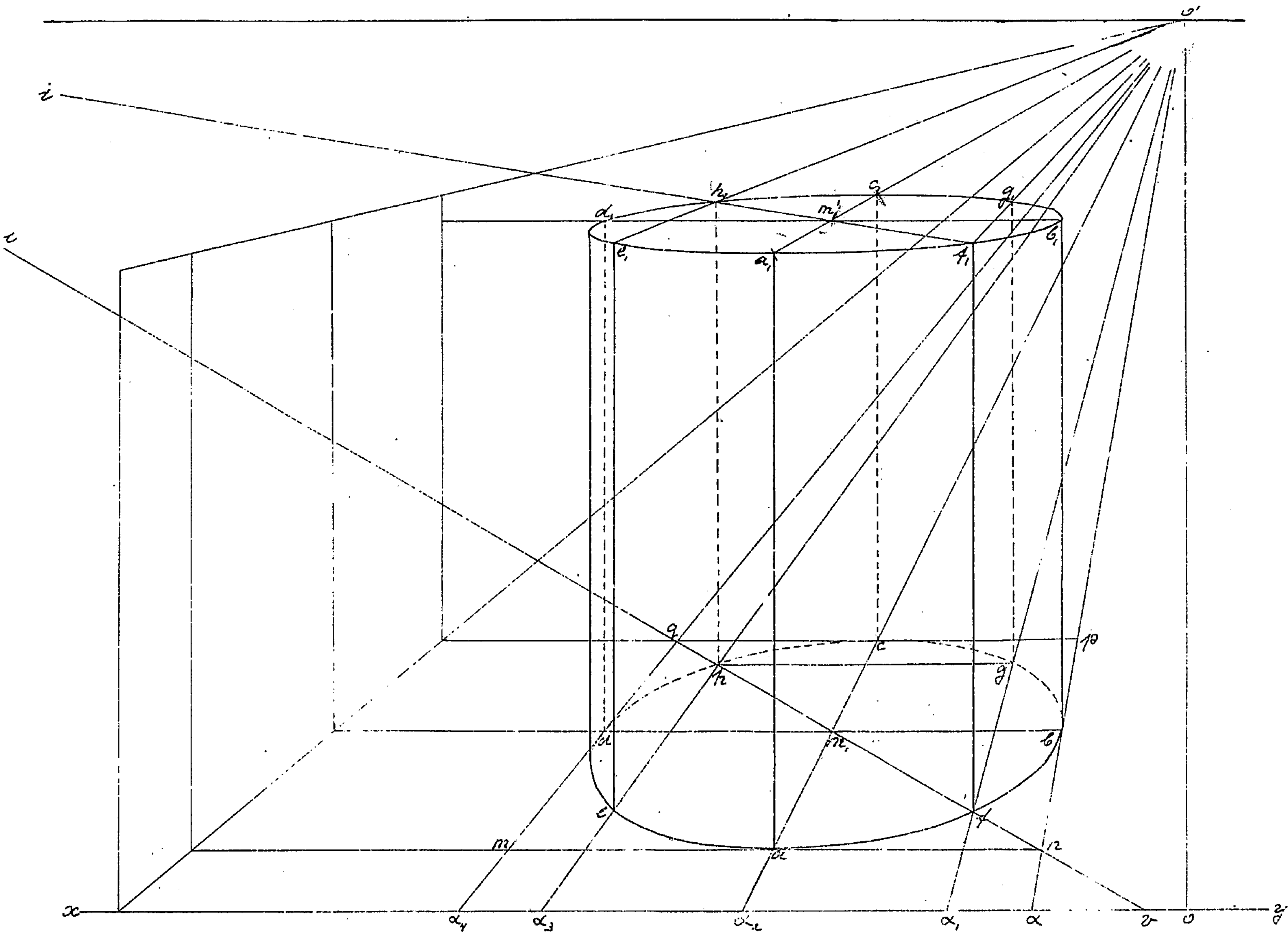
При построеніи перспективы пирамиды строятъ по предъидущему перспективу многоугольника основанія, затѣмъ перспективу S — основанія высоты (черт.118) и направленіе перспективы высоты, на которой помощью перспективнаго масштаба откладываютъ длину высоты и получаютъ перспективу вершины S_1; соединивъ S_1 съ точками a, b, c, d, e и f, получимъ перспективу боковыхъ реберъ, а слѣдовательно и перспективу пирамиды. Очерками боковой поверхности будутъ служить ребра S_1a и S_1d.

Построимъ перспективу прямого цилиндра, даннаго ортогональными проекціями (черт.119).

Черт.119.



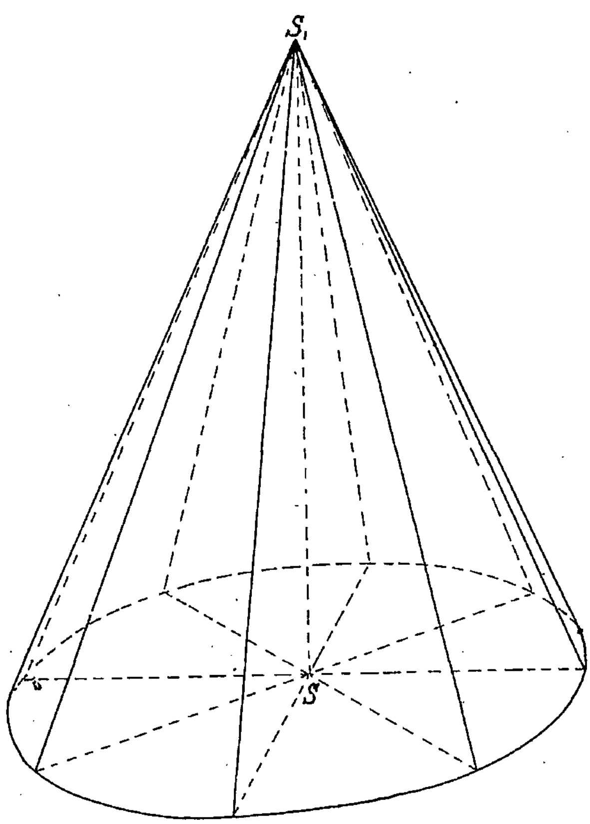
Прежде строимъ перспективу основанія по точкамъ, для чего описываемъ около круга квадратъ mnpq и вписываемъ квадратъ efgh такъ, чтобы по двѣ противоположныхъ стороны были параллельны основанію xy и по двѣ — перпендикулярны xy, тогда получимъ 8 точекъ a, b, c, d и e, f, g, h, изъ которыхъ первыя четыре - точки касанія описаннаго квадрата, а послѣднія четыре - вершины вписаннаго квадрата. Общая діагональ qn этихъ квадратовъ наклонена къ xy подъ угломъ въ 45°, поэтому перспектива е'я пройдетъ черезъ точку разстояній i; зная это, продолжимъ qn до встрѣчи съ xy въ точкѣ v, которую переносимъ вмѣстѣ съ точками α, α_1, α_2 ..... съ чертежа 119-го на соотвѣтствующую линію чертежа 120. Соединивши v съ i (черт.120), получимъ въ пересѣченіи съ перспективами перпендикуляровъ $o\alpha$, $o\alpha_1$, $o\alpha_2$..... перспективы n, f, m_1, h и g; проведя изъ этихъ точекъ параллели xy до пересѣченія съ соотвѣтствующими перпендикулярами, получимъ перспективы a, e, d, h, c, g, b и f, по которымъ и строимъ перспективу окружности основанія цилиндра; кривая afbgchde (черт.120) есть эллипсъ. Для построенія перспективы верхняго основанія поступаемъ такъ: на перпендикулярѣ изъ m_1 къ xy откладываемъ перспективно высоту цилиндра и черезъ полученную точку m_1', которая будетъ перспективою центра верхняго основанія, проводимъ прямую $m_1'o'$, обозначающую перспективу перпендикуляра, опущеннаго изъ центра верхняго основанія на картинную плоскость; прямыя m_1o', $m_1'o'$ выражаютъ перспективы параллельныхъ прямыхъ. Проводя изъ a и c перпендикуляры къ xy до пересѣченія $m_1'o'$ - найдемъ точки a_1 и c_1 - перспективы точекъ верхняго основанія. Соединивши m_1' съ i (точкой разстояній), получимъ перспективы m_1i и $m_1'i$ - параллельныхъ прямыхъ, а опустивши перпендикуляры изъ h и f на xy до встрѣчи съ $m_1'i$, найдемъ



Черт.120.

еще двѣ точки $h_{,}$ и $f_{,}$, принадлежащія перспективѣ верхняго основанія. Для дальнѣйшаго полученія точекъ этого основанія соединяемъ $f_{,}$ съ o' и изъ g опускаемъ перпендикуляръ на xy до встрѣчи съ $f_{,}o'$ въ точкѣ $g_{,}$, которая будетъ принадлежать верхнему основанію и т.д. Соединивши построенныя точки непрерывной чертой, получимъ эллипсъ, перспективу верхняго основанія. Построивши перспективы верхняго и нижняго основанія, проводимъ къ нимъ касательныя, перпендикулярныя къ xy, тогда эти послѣднія составятъ очеркъ боковой поверхности цилиндра и вмѣстѣ съ перспективами основаній - перспективу цилиндра.

Черт.121.



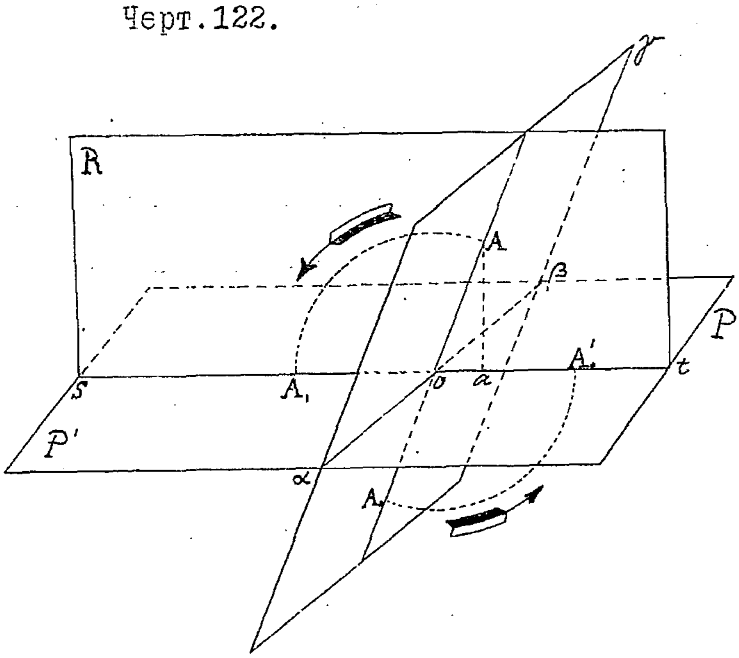
При построеніи перспективы конуса прежде строятъ перспективу основанія, затѣмъ перспективу вершины, изъ которой проводятъ касательныя къ кривой, выражающей перспективу основанія, и такимъ образомъ получаютъ перспективу даннаго конуса. На черт 121-мъ построена перспектива прямого конуса, поставленнаго на предметную плоскость.

О МѢТОДАХЪ, УПОТРЕБЛЯЕМЫХЪ ВЪ НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРІИ.

При рѣшеніи различныхъ вопросовъ въ начертательной геометріи употребляются слѣдующіе методы: 1) методъ совмѣщенія, 2) методъ вращенія и 3) методъ перемѣны плоскостей проекцій.

МЕТОДЪ СОВМѢЩЕНІЯ состоитъ въ томъ, что по данному положенію плоскости и фигуры, находящейся на ней, находится положеніе, которое займетъ фигура, когда ея плоскость совпадетъ съ одной изъ плоскостей проекцій. Для этого плоскость фигуры $\alpha\beta\gamma$ вращаютъ около одного изъ слѣдовъ ея до совпаденія съ плоскостью PP' (черт.122), тогда фигура займетъ на плоскости PP' опредѣленное положеніе, которое и называется совмѣщеніемъ. Нахожденіе совмѣщенія фигуры сводится къ нахожденію совмѣщенія точки, поэтому мы разсмотримъ сначала совмѣщеніе точки, лежащей въ данной плоскости $\alpha\beta\gamma$ (черт.122). Линія $\alpha\beta$ сѣченія плоскости, въ которой находится точка, съ плоскостью проек-

Черт.122.

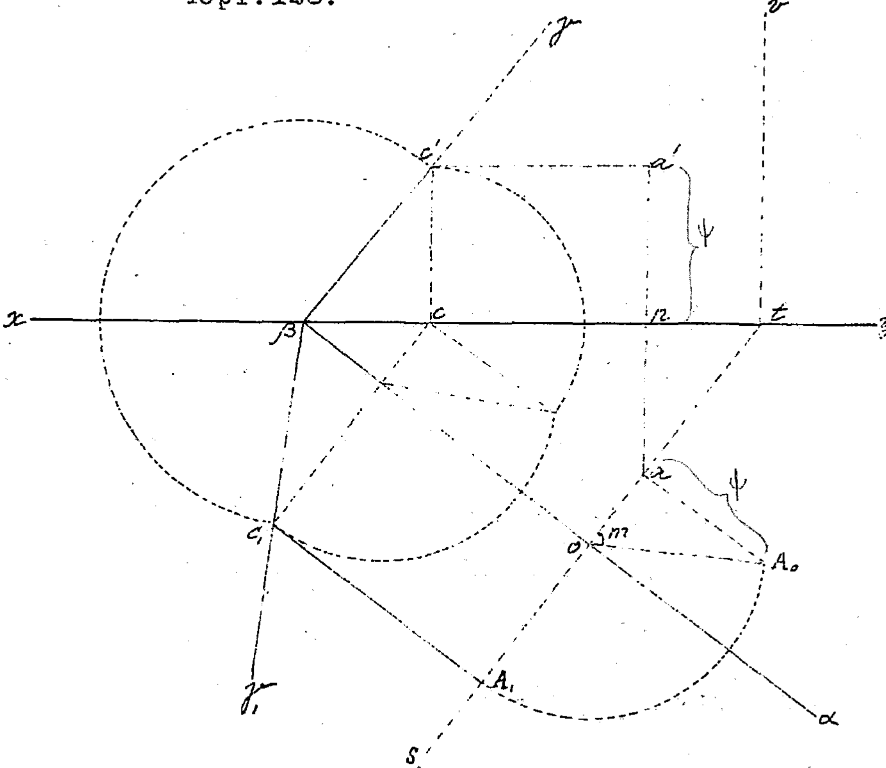


цій PP' - называется о с ь ю в р а щ е н і я. Плоскость $\alpha\beta\gamma$ можемъ вращать въ ту или другую сторону, и поэтому совмѣщеніе точки A будетъ на той или другой сторонѣ плоскости PP'. Будемъ вращать плоскость $\alpha\beta\gamma$ по направленію, указанному стрѣлкою. При такомъ вращеніи точка A постоянно будетъ находиться въ плоскости, перпендикулярной къ $\alpha\beta$. Пусть эта плоскость - R, она называется плоскостью вращенія точки A. Точка встрѣчи этой плоскости съ линіей $\alpha\beta$, т.е. точка o называется ц е н т р о м ъ в р а щ е н і я. Разстояніе oA называется р а д і у с о м ъ в р а щ е н і я. Если плоскость $\alpha\beta\gamma$ совмѣстимъ съ PP', то точка A, описавши дугу, совпадетъ съ точкой A_1, лежащей на слѣдѣ плоскости вращенія и отстоящей отъ центра на разстояніи A_1o = Ao. Точка A_1 называется с о в м ѣ щ е н і е м ъ точки A. Такимъ образомъ, чтобы построить совмѣщеніе точки, лежащей въ данной плоскости, необходимо знать: 1) плоскость вращенія, 2) центръ вращенія, 3) радіусъ вращенія и 4) направленіе вращенія. Если всѣ эти элементы совмѣщенія извѣстны, то для построенія совмѣщенія точки достаточно отъ центра вращенія въ сторону совмѣщенія отложить величину радіуса вращенія на слѣдъ плоскости вращенія. Центръ вращенія опредѣляется пересѣченіемъ плоскости вращенія съ осью вращенія. Разсмотримъ, какъ находится радіусъ вращенія. Для этого изъ точки A (черт.122) спускаемъ на плоскость PP' перпендикуляръ Aa, который будетъ лежать въ плоскости R, поэтому подошва его находится на слѣдѣ st плоскости вращенія. Изъ треугольника oAa оказывается, что радіусъ вращенія есть гипотенуза прямоугольнаго треугольника, у котораго одинъ катетъ Aa - есть разстояніе точки отъ данной плоскости проекцій, а другой катетъ oa - есть разстояніе проекцій той же точки отъ центра вращенія. Иногда величина радіуса не требуетъ сказаннаго построенія, а опредѣляется изъ данныхъ условій. Такой случай можетъ встрѣтиться тогда, когда направленіе радіуса вращенія параллельно одной изъ плоскостей проекцій, ибо тогда радіусъ проектируется на плоскость въ натуральную величину. При построеніи совмѣщенія точки A мы предполагали, что она находится въ верхней части плоскости $\alpha\beta\gamma$. Возьмемъ точку A_o, лежащую въ нижней части той же плоскости. Точка A_o при вращеніи $\alpha\beta\gamma$ будетъ перемѣщаться по окружности oA_o въ противоположную сторону перемѣщенія точки A и въ совмѣщенномъ положеніи совпадетъ съ A_o'. Здѣсь радіусъ вращенія откладывается въ противоположномъ направленіи, а именно въ направленіи ot.

Примѣнимъ общій способъ построенія совмѣщенія точки, когда плоскость $\alpha\beta\gamma$ дана слѣдами на совмѣщенныхъ плоскостяхъ, а точка ея проекціями (aa').

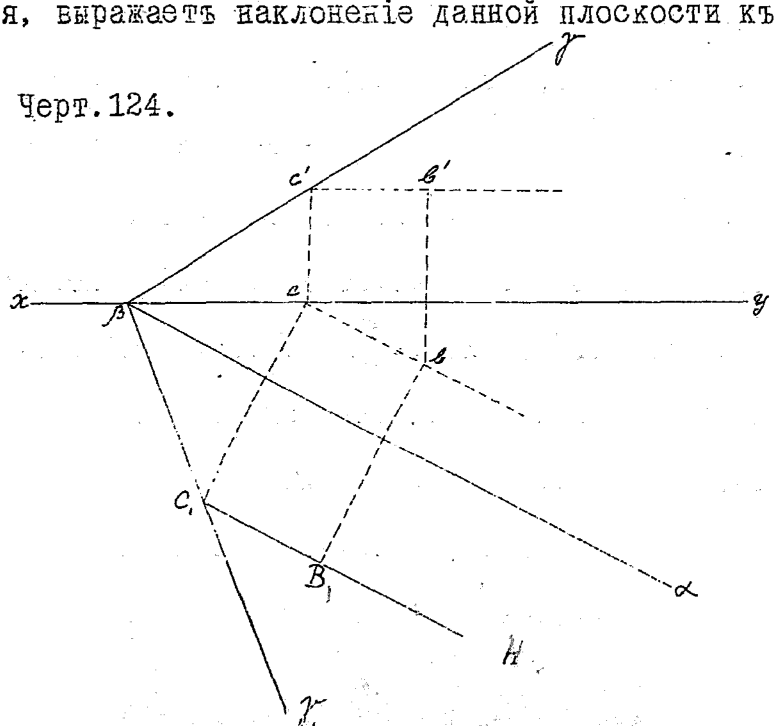
Изъ чертежа 123-го замѣчаемъ, что точка (a,a') дѣйствительно находится въ плоскости $\alpha\beta\gamma$. Построимъ плоскость вращенія этой точки, полагая, что совмѣщеніе производится съ горизонтальной плоскостью проекцій. Для это-

Черт.123.



го изъ точки а опускаемъ перпендикуляръ на $\alpha\beta$. Тогда st будетъ горизонтальнымъ слѣдомъ плоскости вращенія, а tv, перпендикулярная къ xy, - вертикальнымъ слѣдомъ. Точка о будетъ центромъ вращенія. Опредѣлимъ радіусъ вращенія; для этого строимъ на горизонтальной плоскости прямоугольный треугольникъ aoA_0, однимъ катетомъ котораго будетъ ао -разстояніе горизонтальной проекціи отъ центра, а другимъ - A_0a = a'n - разстоянію точки А отъ горизонтальной плоскости проекціи; oA_0 будетъ радіусомъ вращенія. Плоскость $\alpha\beta\gamma$ можно вращать около слѣда $\alpha\beta$ справа налѣво и слѣва направо; будемъ вращать справа налѣво. Такъ какъ совмѣщеніе точки находится на слѣдѣ плоскости вращенія, то, отложивъ на os радіусъ oA_0, получимъ точку A_1 - искомое совмѣщеніе данной точки. Такимъ же образомъ найдемъ совмѣщеніе С, точки (c,c'), лежащей на $\beta\gamma$; совмѣщеніе этой точки можетъ быть построено еще такъ: изъ точки с опускаемъ перпендикуляръ на $\alpha\beta$, а изъ β радіусомъ $\beta c'$ пересѣкаемъ его въ точкѣ C_1, которая и будетъ искомой. Такъ какъ точка (c,c') принадлежитъ вертикальному слѣду плоскости $\alpha\beta\gamma$, то, соединивъ точки β и C_1, получимъ совмѣщеніе вертикальнаго слѣда данной плоскости $\beta\gamma_1$; въ этомъ случаѣ уголъ $\alpha\beta\gamma_1$ есть натуральная величина угла, образуемаго въ пространствѣ слѣдами плоскости. Прямая A_1C_1, параллельная $\alpha\beta$, есть совмѣщеніе горизонтали (ac, a'c'). Вслѣдствіе перпендикулярности къ $\alpha\beta$ плоскости stv вращенія точки (a',a), она есть плоскость линейнаго угла, образуемаго данной плоскостью $\alpha\beta\gamma$ съ горизонтальной. Такимъ образомъ уголъ m, составленный слѣдомъ плоскости вращенія и радіусомъ вращенія, который есть линія сѣченія данной плоскости съ плоскостью вращенія, выражаетъ наклоненіе данной плоскости къ горизонту.

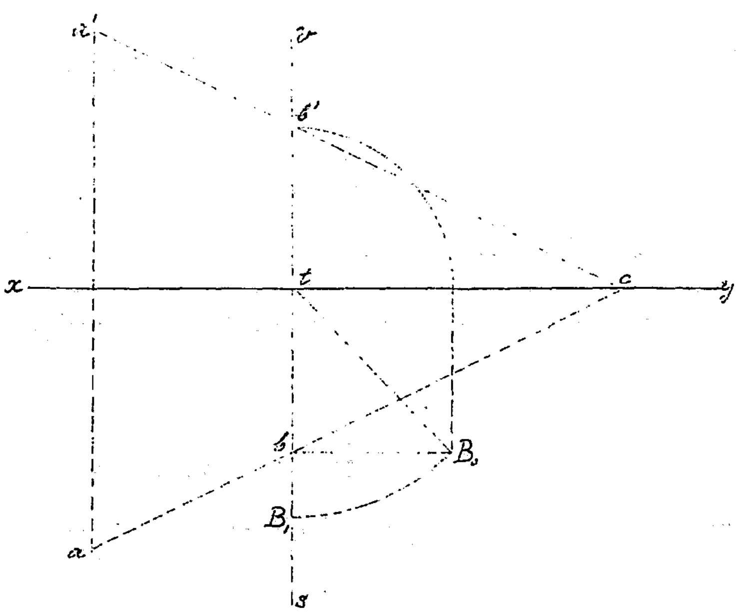
Черт.124.



Имѣя совмѣщеніе $\beta\gamma_1$ вертикальнаго слѣда плоскости, совмѣщеніе какой-либо ея точки (b,b') на горизонтальной плоскости можетъ быть найдено такъ: изъ b' проводимъ линію b'c' параллельно оси вращенія до встрѣчи (черт.124) съ $\beta\gamma$ въ точкѣ c', которую проектируемъ на ось xy въ точку c; изъ этой послѣдней опускаемъ перпендикуляръ на $\alpha\beta$ до пересѣченія съ $\beta\gamma_1$ въ точкѣ C_1; тогда C_1H, проведенная параллельно $\alpha\beta$, выразитъ совмѣщеніе горизонтали (bc, b'c'); опустивъ перпендикуляръ изъ точки b на $\alpha\beta$ до пересѣченія съ C_1H въ точкѣ B_1, найдемъ искомое совмѣщеніе разсматриваемой точки (b,b').

З А Д А Ч А. Найти совмѣщеніе на одной изъ плоскостей проекцій точки (b,b'), лежащей въ осевой плоскости (черт. 125).

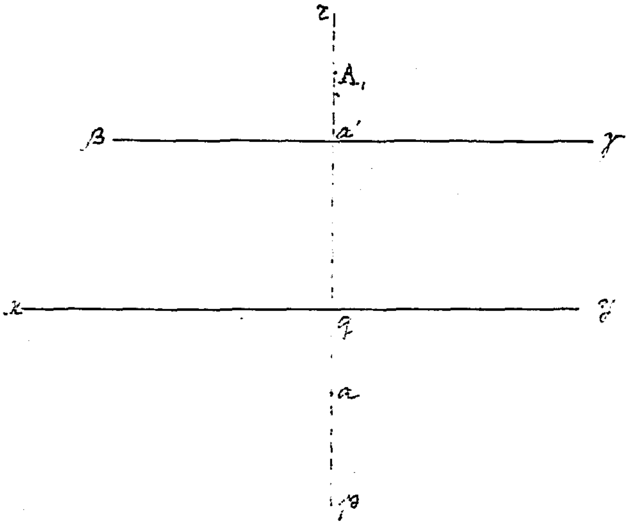
Черт.125.



Пусть осевая плоскость опредѣляется точкой (a,a'). Въ данномъ случаѣ плоскость вращенія точки (b,b') перпендикулярна къ xy и слѣды ея st и tv проходятъ черезъ проекціи точки (b,b'). Центромъ вращенія будетъ служить точка t. Для нахожденія радіуса вращенія точки (b,b') строимъ прямоугольный треугольникъ tbB_0 на катетахъ bt и $b't$; полученная гипотенуза tB_0 будетъ радiусомъ вращенiя; отложивъ tB_0 на st отъ точки t, получимъ точку B, - искомое совмѣщенiе на горизонтальной плоскости.

З А Д А Ч А. Найти совмѣщенiе на вертикальной плоскости точки (a, a'), лежащей въ плоскости, параллельной горизонтальной плоскости проекцiи (черт.126).

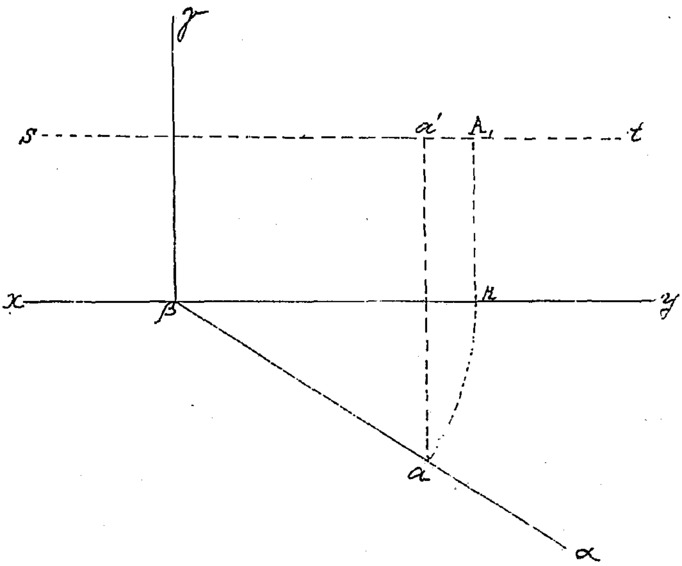
Черт.126.



Въ данномъ случаѣ плоскость вращенiя pqr перпендикулярна къ $\beta\gamma$, а потому перпендикулярна и къ xy. Центръ вращенiя - точка a' радiусъ вращенiя есть qa, т.е. разстоянiе точки отъ вертикальной плоскости. Отложивъ отъ точки a' на слѣдѣ плоскости вращенiя величину $a'A_1 = aq$, получимъ A_1 - совмѣщенiе данной точки.

Если точка (a, a') будетъ лежать въ плоскости $\alpha\beta\gamma$, перпендикулярной къ горизонтальной, а совмѣщать ее будемъ съ вертикальной, то плоскость вращенiя этой точки будетъ параллельна горизонтальной плоскости проекцiй, и потому радiусъ вращенiя проектируется на горизонтальную плоскость въ натуральную величину, равную $a\beta$. Вслѣдствiе чего для

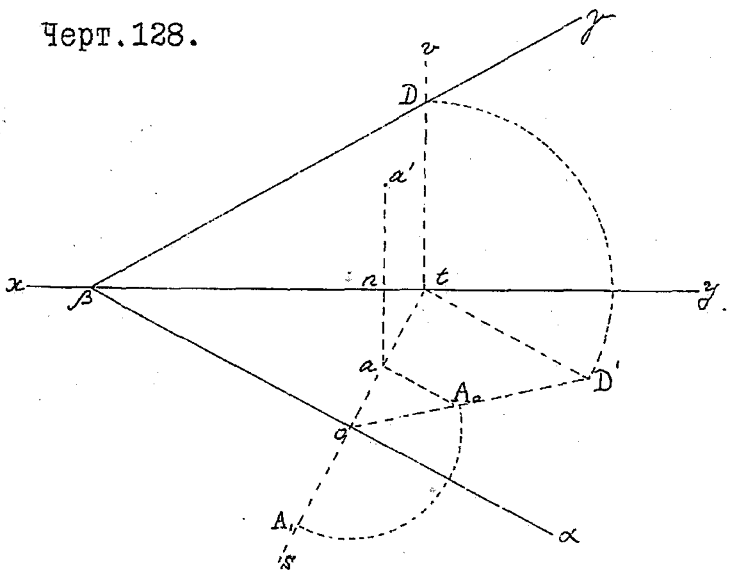
Черт.127.



построенія совмѣщенія точки (a,a') (черт. 127-ой) поступаемъ такъ: изъ точки β радіусомъ β a описываемъ дугу до пересѣченія съ осью въ точкѣ k, изъ которой возставимъ ⊥ къ оси до пересѣченія съ st въ точкѣ A,. Эта послѣдняя и выразитъ искомое совмѣщеніе точки (a,a').

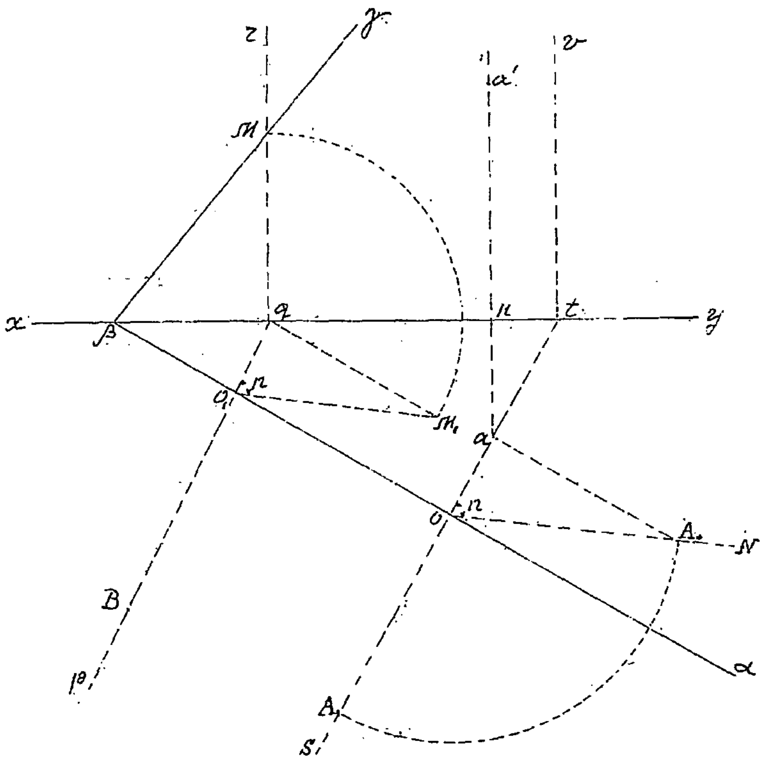
Разсмотримъ, какъ по совмѣщенію точки, лежащей въ какой-нибудь плоскости, найти ея проекціи, когда эта плоскость приходитъ въ первоначальное положеніе. Положимъ, что A, (черт.128) есть совмѣщеніе точки по горизонтальной плоскости.

Черт.128.



Если плоскость изъ совмѣщеннаго положенія приходитъ въ первоначальное, то точка A, вращается (поднимается) въ плоскости перпендикулярной къ $\alpha\beta$, а слѣдовательно и къ горизонтальной плоскости. Слѣды этой плоскости вращенія суть: горизонтальный - $st \perp \alpha\beta$ и вертикальный - $tv \perp xy$. Когда плоскость $\alpha\beta\gamma$ придетъ въ первоначальное положеніе, прямая A_1o совпадетъ съ линіей сѣченія плоскости $\alpha\beta\gamma$ съ плоскостью вращенія. Эта линія пройдетъ черезъ точки o и D и искомая точка будетъ находиться на этой прямой на разстояніи радіуса вращенія отъ точки o. Чтобы построить эту точку, построимъ на горизонтальной плоскости треугольникъ, полученный въ сѣченіи плоскости вращенія съ плоскостью $\alpha\beta\gamma$ и плоскостями проекцій, т.е. треугольникъ otD'. Для этого изъ точки t возставляемъ перпендикуляръ къ st и на немъ откладываемъ $tD' = tD$. Точку o соединяемъ съ D'; на линію oD' можно смотрѣть какъ на совмѣщеніе прямой oD, когда плоскость stv, вращаясь около st, совпадетъ съ горизонтальной плоскостью. Построивши oD', переносимъ на нее точку A_1, для чего изъ o радіусомъ oA_1 описываемъ дугу до пересѣченія съ oD' въ точкѣ A_0, изъ которой опускаемъ перпендикуляръ на st и получаемъ искомую горизонтальную проекцію $\bar{a}$. Чтобы получить вертикальную проекцію, изъ $\bar{a}$ опускаемъ перпендикуляръ на xy и отъ точки n откладываемъ $a'n = A_0a$; a' - искомая вертикальная проекція. Если точка D въ предѣлахъ чертежа не помѣщается, тогда берутъ вспомогательную точку B, чтобы вертикальный слѣдъ плоскости ея вращенія пересѣкся съ вертикальнымъ слѣдомъ нашей плоскости.

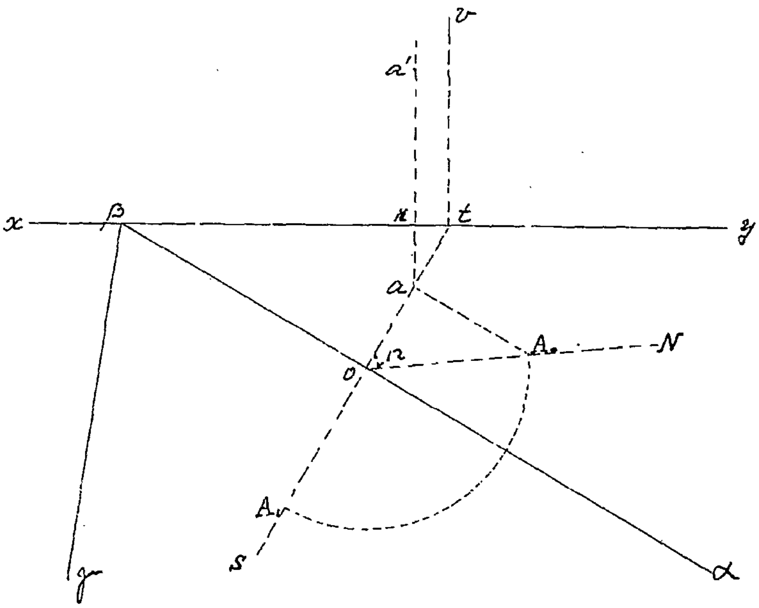
Черт.129.



Пусть слѣды плоскости вращенія точки B (черт. 129-ый) будутъ pq и qr. Такъ какъ слѣдъ qr пересѣкается со слѣдомъ βγ въ точкѣ M, то мы можемъ построить треугольникъ o_1qM_1, въ которомъ уголъ $qo_1M_1 = n$ опредѣляетъ наклоненіе плоскости αβγ къ горизонту. Узнавъ величину n, можемъ построить и проекціи точки A_1; для этого при точкѣ o строимъ уголъ toN= = n, изъ o радіусомъ oA_1 описываемъ дугу до пересѣченія съ oN въ точкѣ A_o. Изъ A_o опускаемъ ⊥ на st и получаемъ горизонтальную проекцію a нашей точки; по горизонтальной проекціи, по предыдущему, строимъ вертикальную - a'

Очень часто приходится поднимать плоскости въ пространствѣ безъ предварительнаго ихъ совмѣщенія. Посмотримъ, какъ при такихъ условіяхъ находятся проекціи точки, лежащей въ плоскости. Положимъ, что плоскость αβγ, совпадающую съ горизонтальной плоскостью проекцій (черт.

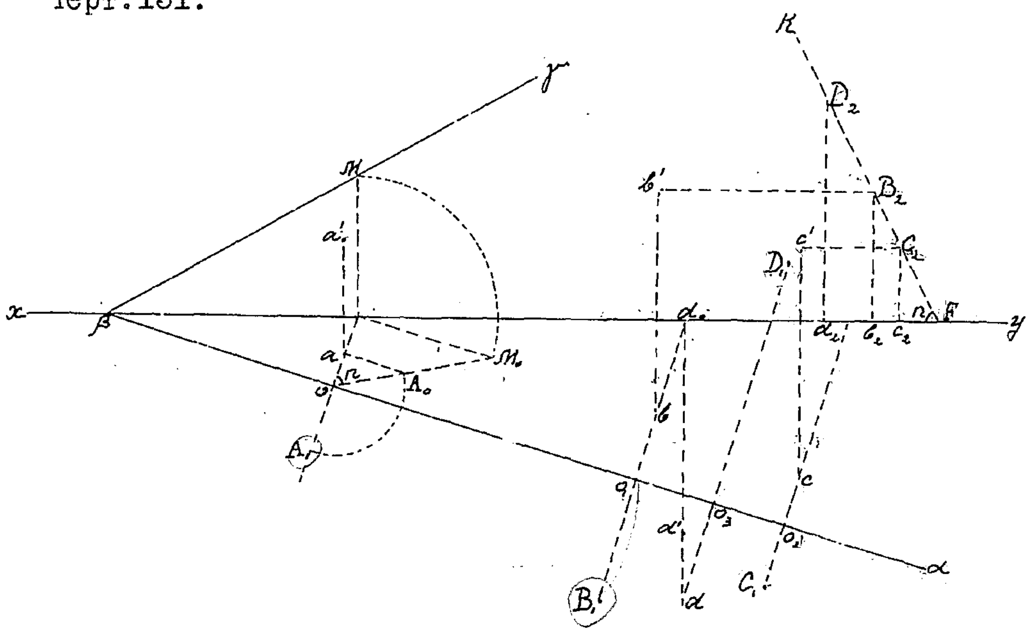
Черт.130.



130-ый), вращеніемъ около $\alpha\beta$ надо наклонить къ горизонтальной плоскости подъ угломъ n и построить проекціи точки A_1, лежащей въ этой плоскости. Такъ какъ плоскость $\alpha\beta\gamma$, будучи наклонена подъ угломъ n къ горизонтальной плоскости, можетъ имѣть два положенія, то необходимо узнать, при какомъ ея положеніи будемъ строить проекціи точки. Пусть плоскость составляетъ уголъ n съ частью горизонтальной плоскости $\alpha\beta\gamma$. Тогда поступаемъ такъ: строимъ плоскость stv - вращенія точки A_1 и при точкѣ o къ линіи ot - уголъ toN = n, изъ точки o радіусомъ oA_1 описываемъ дугу до пересѣченія съ oN въ точкѣ A_0. Изъ A_0 опускаемъ перпендикуляръ A_0a на ot; полученная точка дастъ горизонтальную проекцію точки A_1; для отысканія вертикальной проекціи изъ a опускаемъ перпендикуляръ на ось и отъ точки k отложимъ ka' = aA_0; точка a' будетъ вертикальной проекціей точки A_1.

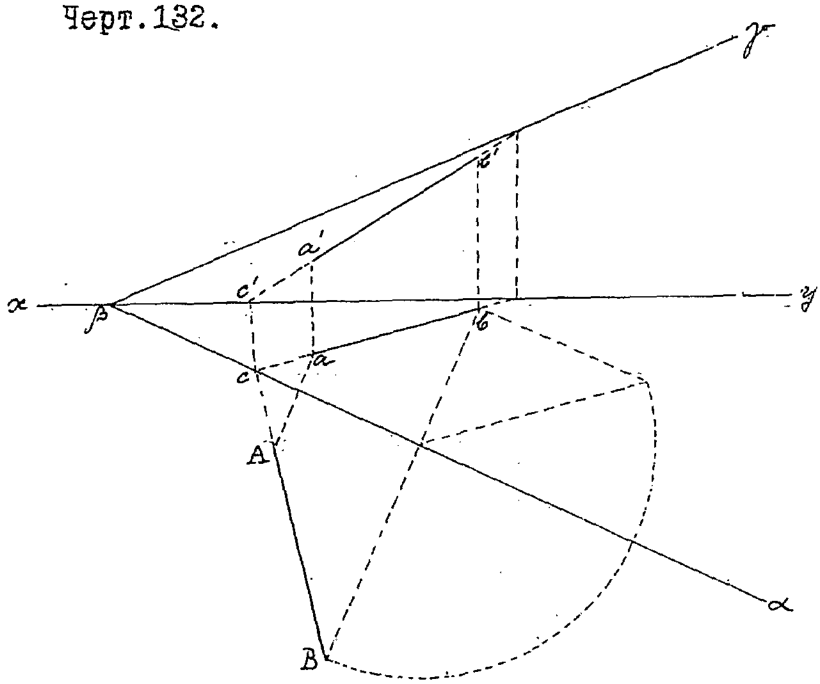
Если дано совмѣщенное положеніе нѣсколькихъ точекъ,

Черт.131.



лежащихъ въ одной плоскости, и нужно найти ихъ проекціи, то полное построеніе дѣлается только для одной изъ нихъ, построеніе же остальныхъ упрощается. Пусть дано совмѣщенное положеніе на горизонтальной плоскости точекъ A_1, B_1, C_1, D_1 .... (черт.131), лежащихъ въ плоскости $\alpha\beta\gamma$; три точки A_1, B_1 и C_1 расположены по одну сторону $\alpha\beta$, а D_1 — по другую; требуется построить проекціи этихъ точекъ. Построимъ сначала проекціи (a,a') точки A_1 по извѣстному намъ правилу. Для построенія остальныхъ проекцій B_1, C_1 и т.д. поступаемъ такъ: изъ точекъ B_1, C_1 и т.д. опускаемъ перпендикуляры на слѣдъ $\alpha\beta$ и при какой-нибудь точкѣ F оси xy строимъ уголъ $\beta FK = n$, т.е. уголъ наклоненія плоскости къ горизонту; затѣмъ на сторонѣ FK этого угла откладываемъ $B_2F = B_1o_1$, $C_2F = C_1o_2$ и $FD_2 = D_1o_3$; изъ точекъ C_2, B_2 и D_2 опускаемъ перпендикуляры на ось: B_2b_2, C_2c_2, D_2d_2; отъ точки o_1 откладываемъ $o_1b = Fb_2$ и отъ точки o_2 - o_2c = Fc_2; изъ точекъ b и c опускаемъ перпендикуляры на ось xy и продолжаемъ ихъ до пересѣченія въ точкахъ b' и c' съ параллелями оси, проведенными изъ точекъ B_2 и C_2; полученныя при этомъ построеніи точки b' и c' будутъ вертикальными проекціями точекъ B_1 и C_1, лежащихъ выше горизонтальной плоскости; проекціи же точки D_1, какъ лежащей ниже горизонтальной плоскости, построятся, если $o_3d = d_2F$ отложимъ не вправо отъ $\alpha\beta$, а влѣво, и $d_0d' = D_2d_2$ отложимъ ниже оси проекцій; точно такъ же строятся проекціи и остальныхъ точекъ.

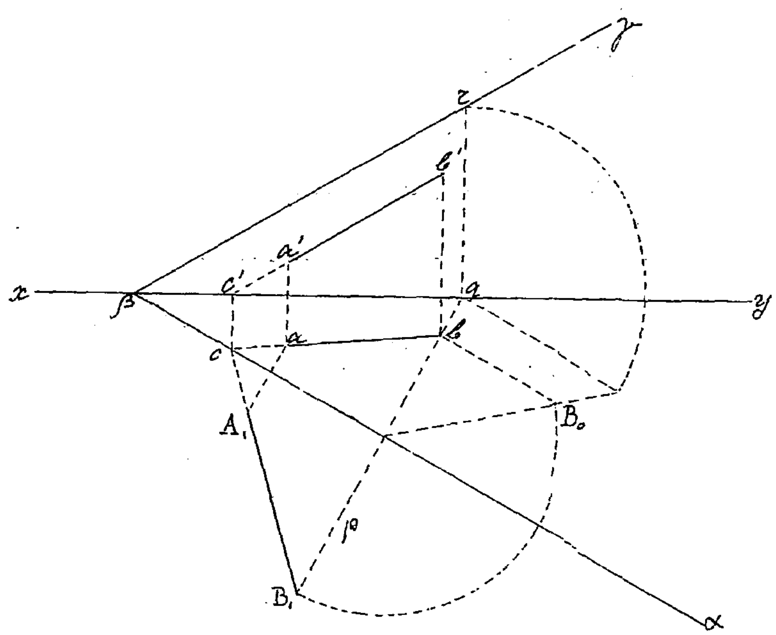
Черт.132.



Построимъ совмѣщеніе на горизонтальной плоскости отрѣзка (ab,a'b'), лежащаго въ плоскости $\alpha\beta\gamma$ (черт.132). Для рѣшенія вопроса надо найти совмѣщеніе двухъ точекъ (a,a') и (b,b') этого отрѣзка и соединить ихъ; удобнѣе найти совмѣщеніе горизонтальнаго слѣда прямой и еще какой-либо точки (b,b'). Въ данномъ случаѣ горизонтальный слѣдъ (c,c') находится въ предѣлахъ чертежа, и потому выгоднѣе сначала построить этотъ горизонтальный слѣдъ, на который можно смотрѣть какъ на совмѣщенiе одной изъ точекъ данной прямой; построивъ совмѣщенiе B какой-нибудь другой точки (b, b'), соединимъ B съ c прямой; Bc есть совмѣщенiе прямой (bc, b'c'). Если же изъ точки a опустимъ перпендикуляръ на $\alpha\beta$ до встрѣчи съ Bc въ точкѣ A, то получимъ совмѣщенiе точки (a, a'), а потому отрѣзокъ AB будетъ искомый.

ОБРАТНЫЙ ВОПРОСЪ. По совмѣщенiю прямой построить ея проекцiи, когда плоскость, въ которой лежитъ прямая, изъ совмѣщеннаго положенiя приходитъ въ первоначальное. Пусть это совмѣщенiе есть отрѣзокъ A_1B_1 (черт. 133-iй). При рѣшенiи этого вопроса можно поступить двоякимъ образомъ:

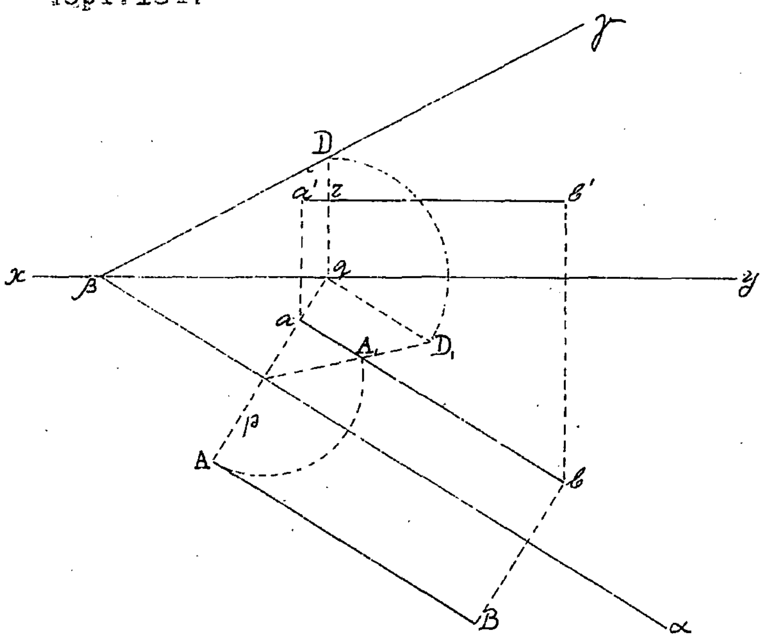
Черт. 133.



или по совмѣщенiю найти проекцiи крайнихъ точекъ отрѣзка, или продолжить совмѣщенное положенiе отрѣзка A, Б, до встрѣчи съ $\alpha\beta$ въ точкѣ c, которая будетъ горизонтальнымъ слѣдомъ отрѣзка и, такимъ образомъ, построенiе проекцiй отрѣзка свести на построеніе проекцій только одной точки В,. Употребимъ послѣдній способъ, т.е. найдемъ горизонтальный слѣдъ С нашего отрѣзка АВ; тогда на с можно смотрѣть какъ на горизонтальную проекцію точки С потому, что она при вращеніи плоскости $\alpha\beta\gamma$ положенія своего не мѣняетъ; вертикальная проекція С будетъ c' на оси проекцій. Такимъ образомъ, нашли проекціи точки С, принадлежащей отрѣзку; найдя по извѣстному правилу проекціи (b,b') точки В, соединимъ с съ b и c' съ b' и получимъ проекціи прямой. Чтобы найти проекціи отрѣзка А,В, изъ А, опускаемъ перпендикуляръ на $\alpha\beta$ и продолжаемъ его до встрѣчи съ сb въ точкѣ а; по горизонтальной проекціи а находимъ вертикальную а'. Искомыя проекціи суть: ab и a'b'.

Допустимъ, что совмѣщенное положеніе отрѣзка АВ (черт.134) параллельно $\alpha\beta$; требуется найти его проекціи. Такъ какъ АВ || $\alpha\beta$ то, слѣдовательно, АВ выражаетъ совмѣщенное положеніе отрѣзка горизонтали, но верти-

Черт.134.

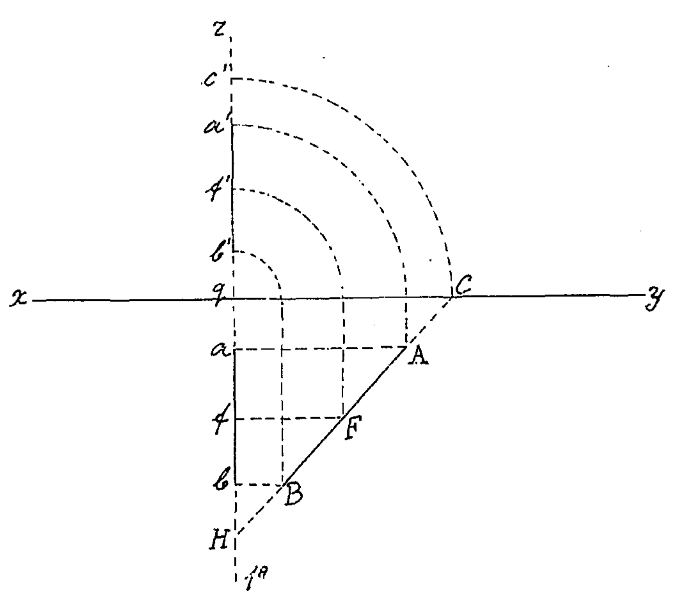


кальная проекція горизонтали $\parallel$ оси xy, а горизонтальная $\parallel \alpha\beta$, поэтому для построенія проекцій этого отрѣзка достаточно знать проекціи одной какой-нибудь точки. Найдя по правилу проекціи (a,a') точки A и проведя черезъ a прямую ab $\parallel \alpha\beta$, а черезъ a' - прямую a'b' $\parallel$ xy, найдемъ направленіе проекцій нашей горизонтали. Чтобы найти проекціи точки B, опускаемъ изъ нея $\perp$ на $\alpha\beta$ до встрѣчи съ ab въ точкѣ b, а изъ b - $\perp$ на xy до встрѣчи съ a'b' въ точкѣ b', тогда (b,b') суть проекціи точки B, а (ab,a'b') проекціи даннаго отрѣзка.

Разсмотримъ приложеніе метода совмѣщенія къ рѣшенію нѣкоторыхъ вопросовъ.

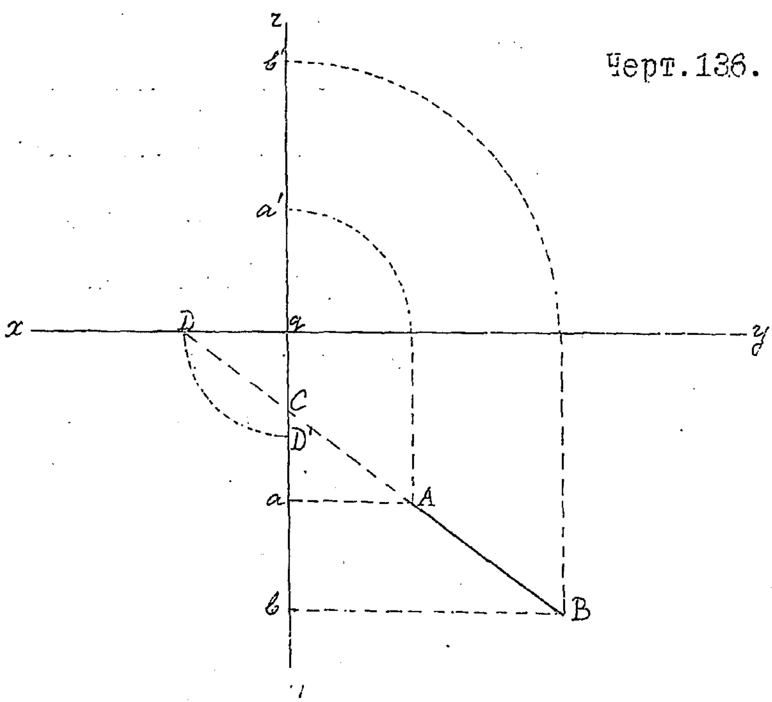
З А Д А Ч А. Построить слѣды прямой (ab, a'b'), лежащей въ профильной плоскости; прямая въ этомъ случаѣ опредѣляется проекціями крайнихъ точекъ (a,a') и (b,b'). Для

Черт.135.



построенія слѣдовъ данной прямой проводимъ черезъ нее горизонтально-проектирующую плоскость, совпадающую съ профильной, совмѣстимъ ее съ горизонтальной плоскостью проекцій (черт.135), вращая около слѣда pq, и построимъ совмѣщеніе даннаго отрѣзка. Для этого изъ точекъ a и b въ сторону вращенія возставляемъ перпендикуляры къ pq, на которыхъ откладываемъ радіусы вращенія aA = qa' и bB = qb'; получимъ совмѣщеніе A и B точекъ (a, a') и (b, b'), а прямая AB выразитъ совмѣщеніе данной прямой. Отрѣзокъ AB продолжаемъ до встрѣчи съ pq и xy въ точкахъ H и C. Затѣмъ приводимъ профильную плоскость изъ совмѣщеннаго положенія въ первоначальное, тогда точка H, какъ лежащая на оси вращенія, не измѣнитъ своего положенія и будетъ горизонтальнымъ слѣдомъ данной прямой. Точка C при вращеніи будетъ перемѣщаться по вертикальной плоскости, оставаясь постоянно отъ точки q на разстояніи qC, т.е. опишетъ на вертикальной плоскости дугу радіуса qC, и когда плоскость приметъ первоначальное положеніе, точка C совпадетъ съ c', которая и будетъ вертикальнымъ слѣдомъ данной прямой.

Построимъ слѣды прямой (ab, a'b'), лежащей въ профильной плоскости, при другомъ ея расположеніи, какъ показано на черт. 136. Проведемъ черезъ прямую горизонтально-проектирующую



Черт. 136.

плоскость и совмѣстимъ ее съ горизонтальной плоскостью проекцій; тогда AB будетъ ея совмѣщеніемъ. Продолжимъ AB до пересѣченія съ pq въ точкѣ C и до пересѣченія съ xy въ точкѣ D. Если плоскость изъ совмѣщеннаго положенія станемъ приводить въ первоначальное, то C не измѣнитъ своего положенія и будетъ выражать точку, въ которой прямая пересѣкаетъ горизонтальную плоскость, т.е. будетъ горизонтальнымъ слѣдомъ прямой; точка D будетъ перемѣщаться по нижней вертикальной плоскости и попадетъ въ точку D', которая и будетъ вертикальнымъ слѣдомъ. Расположеніе слѣдовъ показываетъ, что данная прямая проходитъ въ I, IV и III четвертяхъ.

З А Д А Ч А. По данной проекціи точки, лежащей на прямой, находящейся въ профильной плоскости, построить другую ея проекцію. Пусть по горизонтальной проекціи точки f надо найти ея вертикальную (черт.135).

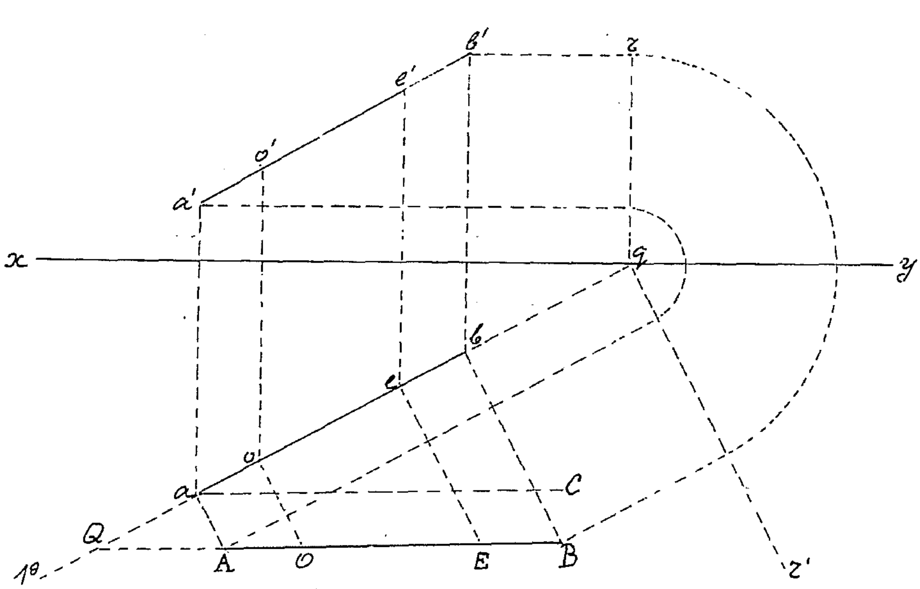
Для рѣшенія этой задачи строимъ на горизонтальной плоскости совмѣщеніе AB прямой (ab, a'b'), на которомъ лежитъ данная точка. Изъ f возставляемъ $\perp$ къ pq до пересѣченія съ AB въ точкѣ F, которая и будетъ совмѣщеннымъ положеніемъ данной точки. Отложивши по линіи qr отъ точки q разстояніе fF = qf', получимъ f' - искомую вертикальную проекцію.

З А Д А Ч А. Построить углы, образуемые прямой(ab, a'b') съ плоскостями проекцій (черт.137).

Построить уголъ, который прямая дѣлаетъ съ плоскостями горизонтальной или вертикальной, значитъ построить уголъ, который она образуетъ со своей проекціей на горизонтальной или вертикальной плоскостяхъ. Для построенія угла наклоненія къ горизонтальной плоскости, совмѣстимъ горизонтально-проектирующую плоскость pqr данной прямой (ab, a'b') съ горизонтальною плоскостью проекцій и построимъ совмѣщенное положеніе AB данной прямой (черт.137). Продолживъ ab и AB до встрѣчи въ точкѣ Q, получимъ искомый уголъ bQB. Подобное же построеніе дѣлается при построеніи угла съ вертикальной плоскостью проекцій. Если бы ab и AB не пересѣкались въ предѣлахъ чертежа, то надо изъ точки a провести параллель AB, положимъ, прямую aC || AB; тогда уголъ baC = bQB есть искомый.

З А Д А Ч А. Отъ точки (o, o'), лежащей на прямой (ab, a'b'), отложить данный отрѣзокъ и найти его проекціи (черт.137).

Черт.137.

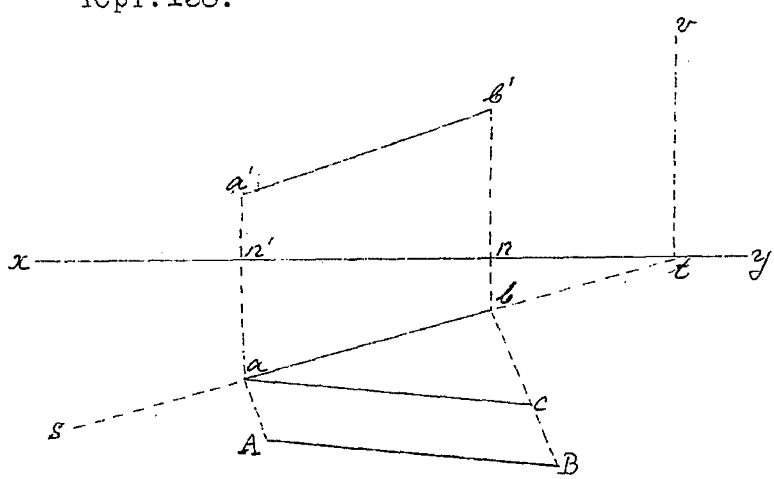


Чтобы рѣшить эту задачу, находимъ совмѣщенное положеніе

АВ данной прямой. На немъ строимъ совмѣщенное положеніе точки О, отъ которой откладываемъ данный отрѣзокъ до точки Е. Затѣмъ приводимъ плоскость въ первоначальное положеніе. При этомъ проекціи точки Е будутъ (е,е'), а проекціи искомой длины - (ое, о'е'); такъ какъ длину отрѣзка отъ точки О можно отложить въ ту и другую сторону, то задача имѣетъ два рѣшенія.

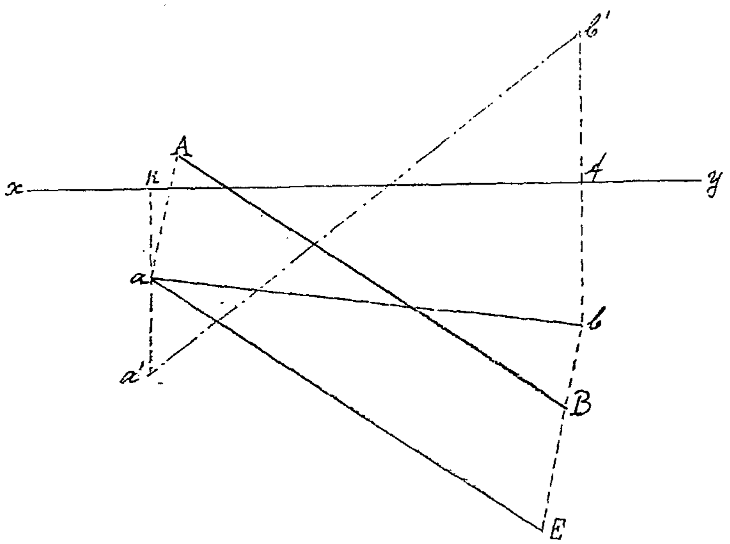
З А Д А Ч А. Даны проекціи двухъ точекъ (а,а') и (ъ,ъ'); построить натуральную длину, выражающую разстояніе между ними (черт.138).

Черт.138.



Чтобы построить это разстояніе, соединяемъ одноименныя проекціи точекъ и получаемъ проекціи (ab, a'b') искомаго разстоянія. Черезъ эту прямую проводимъ одну изъ проектирующихъ плоскостей, положимъ, горизонтальную stv. Совмѣстимъ ее съ горизонтальною плоскостью проекцій и построимъ совмѣщенное положеніе АВ даннаго отрѣзка. Эта величина АВ и есть натуральная величина разстоянія между двумя данными точками. Это разстояніе можно построить, основываясь на другихъ соображеніяхъ. Проведемъ изъ а прямую ас // АВ, тогда у насъ получится прямоугольный треугольникъ abc, въ которомъ однимъ катетомъ служитъ ab - горизонтальная проекція искомаго разстоянія, а другимъ - bc = bB - Bc = b'n - a'n', т.е. другимъ катетомъ служитъ разность разстояній разсматриваемыхъ точекъ отъ горизонтальной плоскости проекцій. Гипотенуза этого треугольника ac = AB и будетъ выражать искомую длину. Въ разсматриваемомъ случаѣ данныя точки находятся по одну сторону горизонтальной плоскости проекцій, но онѣ могутъ находиться и по обѣ стороны. Въ этомъ случаѣ (черт.139)

Черт.139.



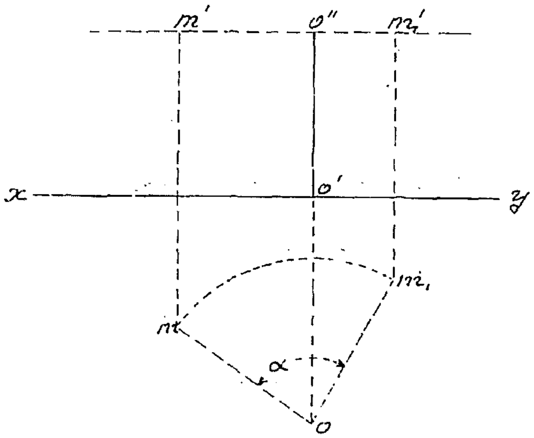
однимъ катетомъ будетъ служить горизонтальная проекція, а другимъ - сумма разстояній разсматриваемыхъ точекъ отъ горизонтальн.плоскости проекцій. Пусть данныя точки суть (a, a') и (b, b'). Первая изъ нихъ находится въ IV четверти, а вторая - въ I. Соединимъ одноименныя проекціи и черезъ полученную прямую проведемъ горизонтально-проектирующую плоскость, которую совмѣстимъ съ горизонтальной плоскостью проекцій. Построимъ совмѣщенное положеніе разсматриваемыхъ точекъ. Для этого изъ a и b возставляемъ перпендикуляры къ ab въ разныя стороны, потому что совмѣщаемыя точки лежатъ по обѣ стороны оси вращенія ab, и откладываемъ на нихъ разстояніе точекъ отъ горизонтальной плоскости: aA = a'k и bB = b'f. Полученныя точки A и B соединяемъ и получаемъ искомую AB. Эту длину можно построить другимъ способомъ. Проведемъ черезъ a прямую aE ∥ AB до встрѣчи съ продолженіемъ bB въ точкѣ E; получимъ прямоугольный треугольникъ abE, въ которомъ гипотенуза aE = AB выражаетъ искомую длину; одинъ катетъ ab – горизонтальная проекція искомаго разстоянія, а другой, bE – сумма горизонтально-проектирующихъ, потому что $bE = bB + BE = fb' + a'k$.

МЕТОДЪ ВРАЩЕНІЯ.

Методъ вращенія состоитъ въ томъ, что по даннымъ проекціямъ системы точекъ на плоскостяхъ проекцій, строятъ проекціи той же системы и на тѣхъ же плоскостяхъ, когда она будетъ повернута на данный уголъ. За ось вращенія обыкновенно принимаютъ прямую, перпендикулярную или параллельную одной изъ плоскостей проекцій. Такъ какъ положеніе системы точекъ или тѣла въ пространствѣ зависитъ отъ положенія точекъ, то мы разсмотримъ сначала, какъ вращается точка около данной оси.

Повернуть точку (m, m') около данной оси (o, o'o"), перпендикулярной къ горизонтальной плоскости, на данный уголъ α. Будемъ разсматривать данную точку какъ неизмѣнно соединенную съ осью вращенія; тогда при вращеніи около

Черт.140.

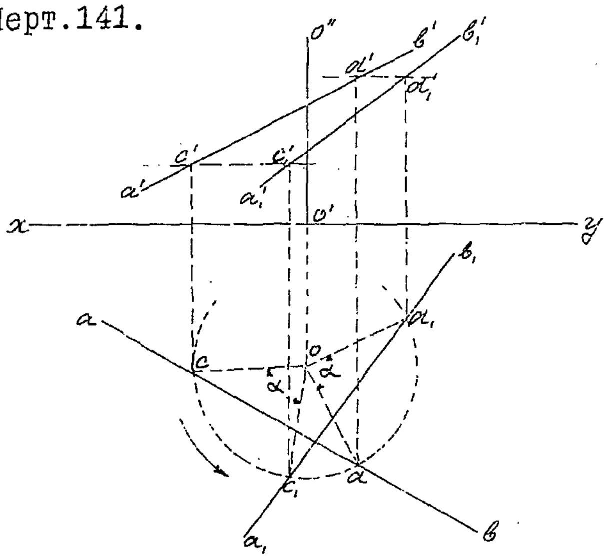


оси (черт.140) она будетъ перемѣщаться въ плоскости, параллельной горизонтальной плоскости проекцій и будетъ описывать окружность, которая проектируется на горизонтальную плоскость въ натуральную величину. Такимъ образомъ, если мы къ прямой om при точкѣ o построимъ данный уголъ α и опишемъ дугу радіусомъ om до пересѣченія съ другой стороной угла въ точкѣ m_1, то точка m_1 и будетъ горизонтальной проекціей точки въ ея новомъ положеніи. Вертикальная проекція будетъ перемѣщаться по линіи, параллельной оси xy, потому что сама точка перемѣщается въ плоскости, параллельной горизонтальной плоскости проекцій, и потому, чтобы найти вертикальную проекцію точки въ новомъ положеніи, опускаемъ изъ m_1 $\perp$ на ось xy и продолжаемъ его до пересѣченія въ точкѣ m_1' съ параллелью $m'm_1'$. Точка (m_1, m_1') есть искомое положеніе точки (m,m'). Точно такъ же можно повернуть точку около оси, перпендикулярной къ вертикальной плоскости проекцій.

Повернуть прямую (ab, a'b') на данный уголъ α около оси, перпендикулярной къ одной изъ плоскостей проекцій. Для этого достаточно повернуть на тотъ же уголъ двѣ какія-либо ея точки и черезъ новыя ихъ положенія провести прямую, которая, очевидно, и должна представить новое положеніе повернутой прямой; для простоты построенія вращають не произвольныя точки, а точки: или равноудаленныя отъ оси вращенія, или ближайшую отъ нея и другую - произвольную.

Разсмотримъ первый случай (черт.141). Чтобы получить равноудаленныя точки, замѣтимъ, что перпендикуляры, опущенные изъ разныхъ точекъ прямой на ось вращенія, бу-

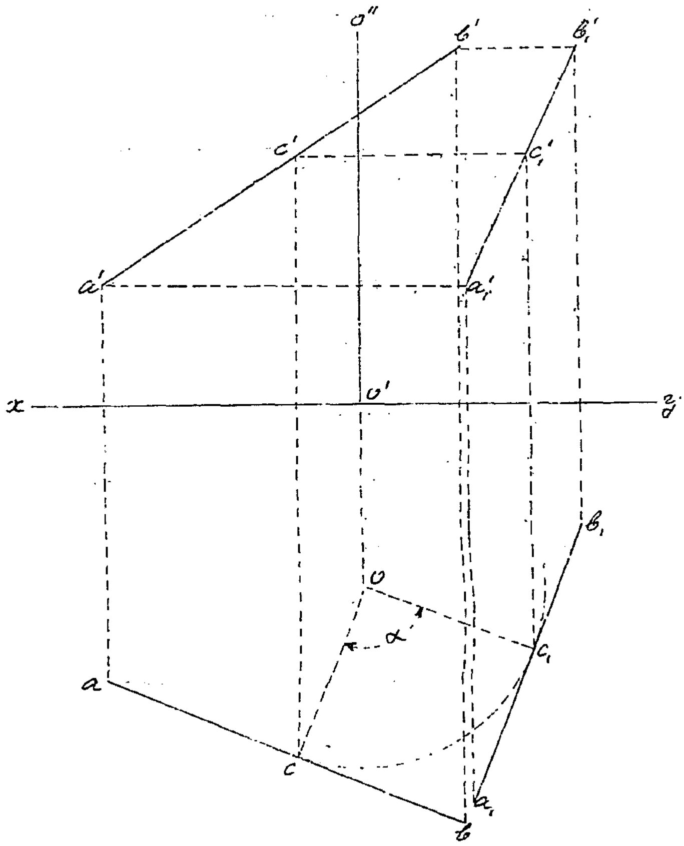
Черт.141.



дуть служить радіусами окружностей, по которымъ перемѣщаются проекціи разсматриваемыхъ точекъ прямой; при этомъ перпендикуляры эти проектируются въ натуральную величину на ту изъ плоскостей проекцій, къ которой перпендикулярна ось вращенія. Положимъ, что ось вращенія (o, o'o") перпендикулярна къ горизонтальной плоскости проекцій; если изъ o радіусомъ oc опишемъ окружность, то ее мы можемъ разсматривать какъ горизонтальную проекцію окружности, описанной точками, равноудаленными отъ оси вращенія. Окружность пересѣкаетъ данную прямую или ея продолженіе въ точкахъ (c, c') и (d, d'), которыя и будутъ искомыми; повернувъ эти точки на уголъ α по направленію стрѣлки, получимъ точки (c_1, c'_1) и (d_1, d'_1), соединивъ которыя, получимъ прямую (c_1d_1, $c'_1d'_1$) или (a_1b_1, $a'_1b'_1$)- новое положенiе данной прямой.

Разсмотримъ второй способъ вращенiя прямой около оси (о, о'о"), перпендикулярной къ горизонтальной плоскости. Для этого беремъ ближайшую точку къ оси и другую произвольную (черт.142). Чтобы получить точку, ближайшую къ оси, опускаемъ перпендикуляръ изъ о на аb и радiусомъ ос

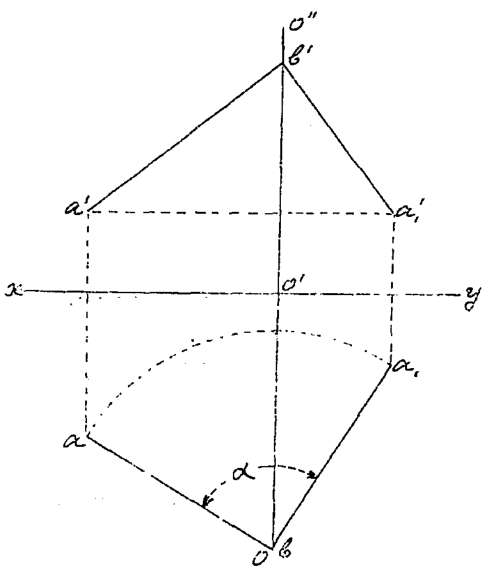
Черт.142.



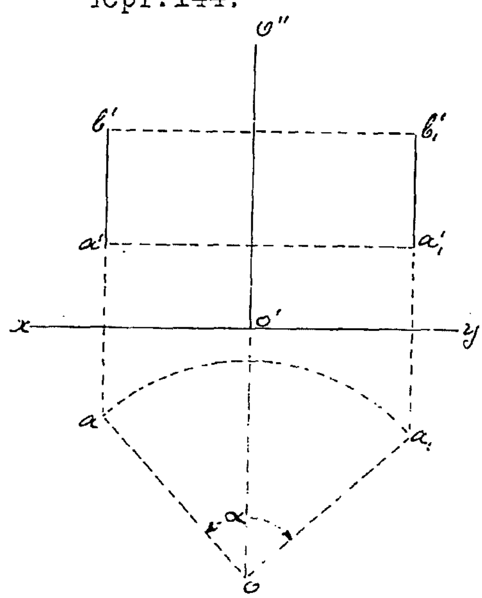
описываемъ окружность. Точка (с, с'), какъ описывающая наименьшую окружность, будетъ ближайшей къ оси. Повернувши ее на уголъ α, построимъ ея новое положенiе (c_1, c_1'). Проведя черезъ c_1 касательную, получимъ направленiе горизонтальной проекцiи прямой въ новомъ ея положенiи. Произвольная точка (а, а') данной прямой перейдетъ при вращенiи въ положенiе (a_1, a_1'), при чемъ c_1a_1 = са; соединивъ a_1' съ c_1', получимъ направленiе вертикальной проекцiи новаго положенiя прямой. Отложивъ c_1b_1 = cb, построимъ другую крайнюю точку горизонтальной проекцiи прямой, по которой найдемъ вертикальную проекцiю b_1'.

Если прямая (ab, a'b') пересѣчетъ ось вращенія, положимъ, въ точкѣ (b,b') (черт.143), то построеніе упрощается. Точка пересѣченія прямой съ осью во все время вращенія положенія своего не измѣнитъ, и потому для построенія новаго положенія прямой достаточно повернуть только одну ея точку (a,a'), и тогда сама прямая перейдетъ въ положеніе (ba_1, $b'a_1'$). Точно такъ же, если прямая параллельна оси вращенія, то для построенія новаго положенія достаточно знать новое положеніе одной какой-нибудь ея точки (a,a') (черт.144). Для этого изъ o радіусомъ oa описываемъ дугу; при радіусѣ oa въ сторону вращенія строимъ уголъ α, изъ точки a_1 опускаемъ перпендикуляръ на xy

Черт.143.



Черт.144.



имъ уголъ α, изъ точки a_1 опускаемъ перпендикуляръ на xy до встрѣчи съ $a'a_1'$. Прямая (a_1, $a_1'b_1'$) и есть искомое положеніе. Вращая прямую около оси, перпендикулярной къ какой-либо плоскости проекцій, мы измѣняемъ ея положеніе въ пространствѣ, не измѣняя угла наклоненія къ той плоскости,

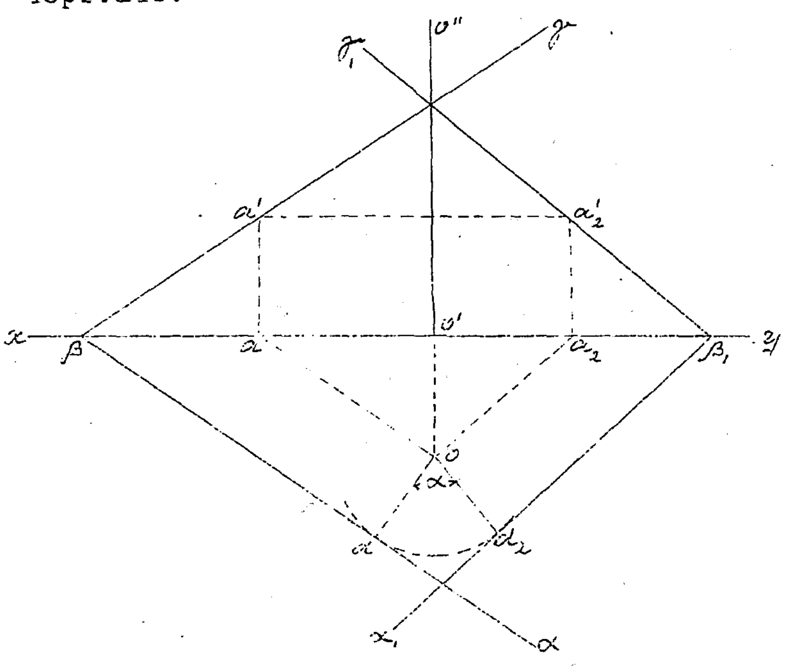
ТИПО-ЛИТ. Ю. ВЕНЕРЪ ПРЕЕМН. О. ФАЛЬКЪ.
Листъ 9-й

къ которой перпендикулярна ось вращенія; наклоненіе же къ другой плоскости измѣняется.

ВРАЩЕНІЕ ПЛОСКОСТИ. Плоскость вращаютъ обыкновенно или около оси, перпендикулярной къ одной изъ плоскостей проекцій, или около горизонтали плоскости, или около фронтали. Такъ какъ плоскость опредѣляется или двумя прямыми - параллельными, или двумя пересѣкающимися прямыми и т.п., то, слѣдовательно, надо повернуть или двѣ пересѣкающіяся прямыя или двѣ параллельныя и т.п.

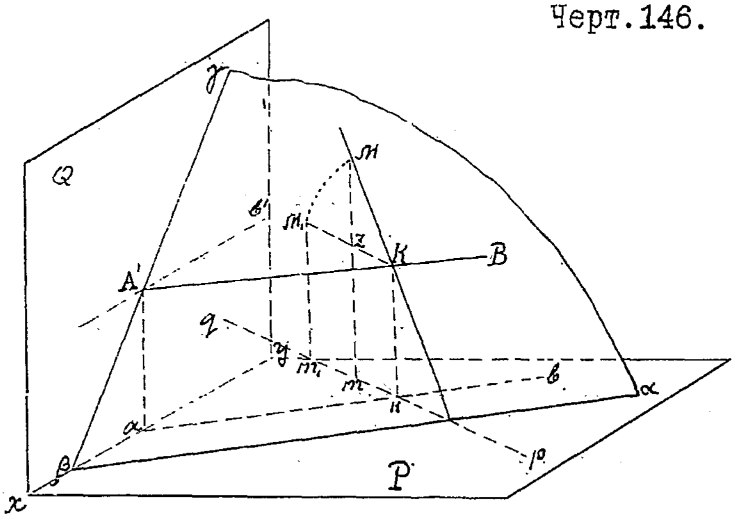
Положимъ, надо повернуть плоскость $\alpha\beta\gamma$ (черт.145) на уголъ α около оси (о, о'о"), перпендикулярной къ горизонтальной плоскости проекцій. Обыкновенно вращаютъ горизонтальный слѣдъ данной плоскости (въ нашемъ случаѣ $\alpha\beta$) и прямую, ему параллельную, т.е. горизонталь. Построеніе будетъ проще, если за горизонталь примемъ ту прямую, которая проходитъ черезъ точку встрѣчи плоскости съ осью вращенія (о, о'о"). Для построенія такой горизонтали по-

Черт.145.



ступаемъ такъ: черезъ о проводимъ оа паралл. $\alpha\beta$; изъ а возставляемъ перпендикуляръ аа' къ оси ху до встрѣчи съ $\beta\gamma$ въ точкѣ а', изъ которой проводимъ $a'a_2'$ паралл. ху; прямая (оа, $a'a_2'$) принадлежитъ плоскости $\alpha\beta\gamma$ и проходитъ черезъ горизонтальную проекцію о, точки встрѣчи плоскости $\alpha\beta\gamma$ съ осью вращенія, слѣдовательно это есть искомая горизонталь. При вращеніи плоскости около оси, перпендикулярной къ вертикальной плоскости, вращаютъ вертикальный слѣдъ и фронталь плоскости. Чтобы повернуть горизонтальный слѣдъ $\alpha\beta$ и горизонталь (оа, $a'a_2'$), беремъ ближайшія къ оси точки d и о и, поступая по извѣстному правилу, строимъ новое положеніе горизонтальнаго слѣда $\alpha_1\beta_1$ и новое положеніе горизонтальной проекціи горизонтали (oa_2). Вертикальный слѣдъ плоскости пройдетъ черезъ точку β_1 и черезъ вертикальный слѣдъ горизонтали (a_2a_2'), который мы легко построимъ. Соединивъ a_2' съ β_1, построимъ вертикальный слѣдъ плоскости, такъ что новое положеніе ея будетъ $\alpha_1\beta_1\gamma_1$. Подобно этому вращается плоскость около оси, перпендикулярной къ вертикальной плоскости. Нужно замѣтить, что при вращеніи плоскости около оси, перпендикулярной къ какой-нибудь плоскости проекцій, наклоненіе ея къ этой плоскости (т.е. уголъ) не измѣняется.

Разсмотримъ, какъ строятся проекціи точекъ и линій, лежащихъ въ данной плоскости, когда она вращается около горизонтали или фронтали. Пусть требуется повернуть плоскость $\alpha\beta\gamma$ (черт.146) около ея горизонтали А'В до по-

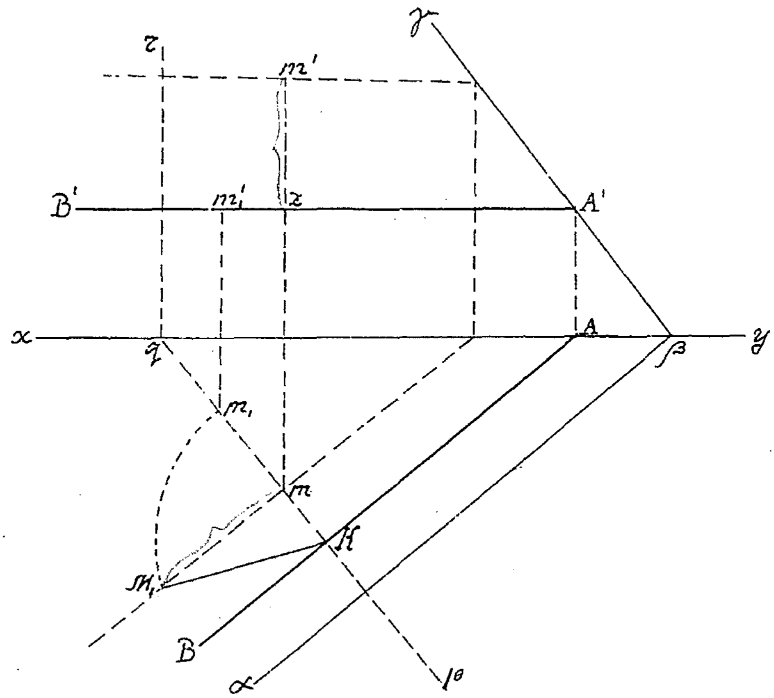


Черт.146.

ложенія, параллельнаго горизонтальной плоскости проекцій, и построить проекціи точки М, принадлежащей плоскости $\alpha\beta\gamma$ въ новомъ ея положеніи. Когда плоскость при такомъ вращеніи приметъ положеніе, параллельное горизонтальной плоскости проекцій, то вертикальный слѣдъ ея совпадетъ съ вертикальной проекціей A'b' горизонтали, а горизонтальный слѣдъ $\alpha\beta$ удалится въ безконечность. Точка М будетъ перемѣщаться въ плоскости, перпендикулярной къ оси вращенія ВА' или къ $\alpha\beta$, центръ вращенія - точка К. Плоскость вращенія, будучи перпендикулярна къ $\alpha\beta$, перпендикулярна и къ ab, а потому горизонтальный слѣдъ ея pq перпендикуляренъ ab; слѣдовательно, горизонтальная проекція данной точки М - m будетъ лежать на этомъ слѣдѣ и перемѣщаться по немъ. Когда плоскость $\alpha\beta\gamma$ придетъ въ горизонтальное положеніе, тогда М, описавъ дугу радіусомъ МК, перемѣстится въ M_1, а ея горизонтальная проекція - m перемѣстится въ m_1, при чемъ km_1 = KM_1 = KM. Отсюда видно, что для построенія новаго положенія горизонтальной проекціи данной точки достаточно построить радіусъ вращенія и отложить его на горизонтальномъ слѣдѣ плоскости вращенія отъ горизонтальной проекціи к - центра вращенія К. Радіусъ вращенія есть гипотенуза прямоугольнаго треугольника MKz, прямоугольнаго при z, одинъ катетъ котораго zK есть разстояніе горизонтальной проекціи данной точки отъ горизонтальной проекціи горизонтали, а другой катетъ Mz показываетъ превышеніе точки M надъ горизонталью, такъ какъ $Mz = Mm - zm = Mm - Kk$. Вертикальная проекція данной точки будетъ лежать на вертикальномъ слѣдѣ повернутой плоскости.

Рѣшимъ этотъ вопросъ при совмѣщеніи плоскостей проекцій. Положимъ, что данная плоскость есть $\alpha\beta\gamma$ (чертежъ 147), а точка-(m,m'); требуется повернуть плоскость $\alpha\beta\gamma$ около горизонтали (BA, B'A') до положенія, параллельнаго горизонтальной плоскости, и построить проекціи точки(m,m') въ ея новомъ положеніи. Для построенія новаго положенія горизонтальной проекціи точки опускаемъ изъ m перпендикуляръ на AB и строимъ прямоугольный треугольникъ M_1Km, одинъ катетъ котораго - mK - есть разстояніе горизонтальной проекціи точки отъ горизонтальной проекціи горизонтали, а другой катетъ - $M_1m = m'z$ - выражаетъ превышеніе данной точки надъ горизонталью. т.е. разность разстояній вертикальныхъ проекцій m' и A'B' отъ оси xy; гипотенуза KM_1 этого треугольника будетъ радіусомъ вращенія разсматриваемой точки, который мы и откладываемъ отъ точки К по горизонтальному слѣду плоскости вращенія pqr; полученная точка m_1 будетъ горизонтальной проекціей данной точки въ

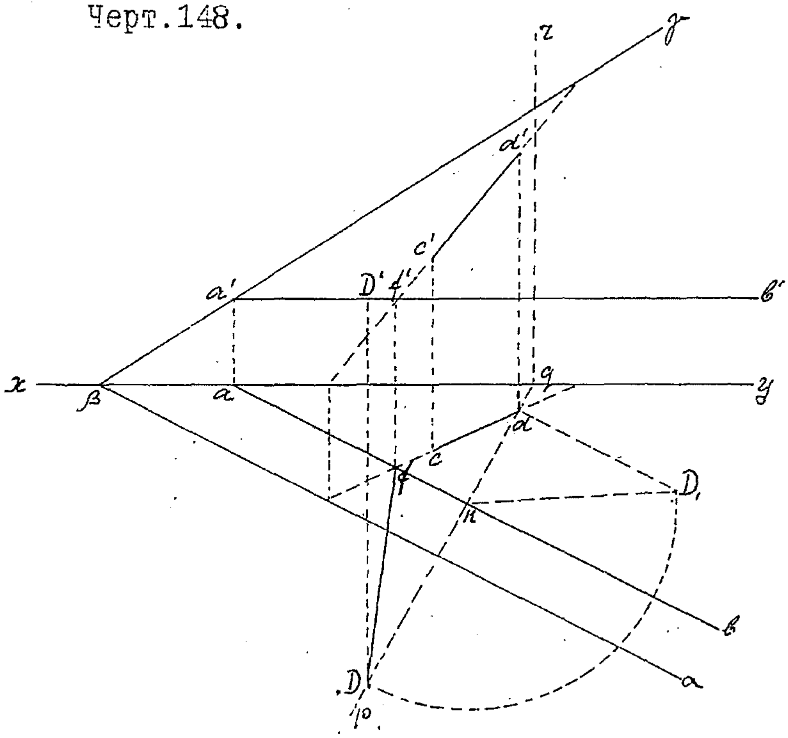
Черт.147.



ея новомъ положеніи; вертикальная проекція будетъ на A'B'-въ точкѣ m'₁ ; наиболѣе важное значеніе имѣетъ горизонтальная проекція A'B'.

Повернуть плоскость $\alpha\beta\gamma$ (черт.148) около горизонтали (ab, a'b') до положенія, параллельнаго горизонтальн.плоскости и построить проекціи прямой (cd, c'd')въ новомъ положеніи плоскости. Для этого замѣтимъ точку (f,-f'), въ

Черт.148.

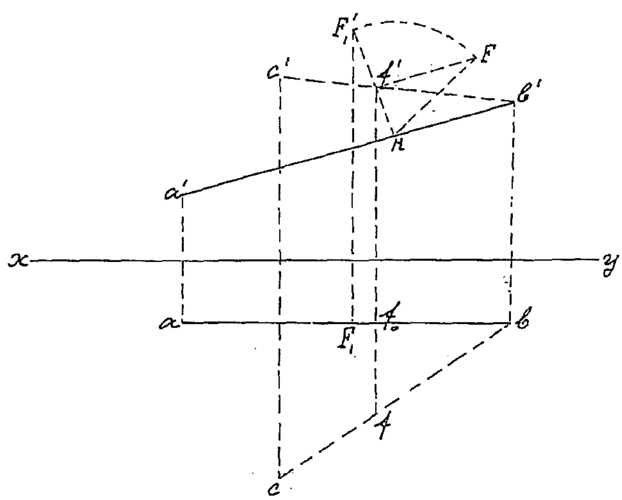


которой данная прямая пересѣкаетъ ось вращенія (эти линіи, какъ лежащія въ одной плоскости, пересѣкаются). Такъ какъ точка (f,f') находится на оси вращенія, то она при вращеніи положенія своего не измѣнитъ, поэтому достаточно построить проекціи какой-либо другой точки, лежащей на этой прямой въ новомъ положеніи, чтобы получить новое положеніе данной прямой. Пусть эта точка (d,d'); построивъ по правилу ея новое положеніе (D,D') и соединивъ D съ f, получимъ горизонтальную проекцію данной прямой въ новомъ положеніи, вертикальная же проекція будетъ на a'b'.

ПРИМѢЧАНІЕ. Въ приведенныхъ выше построеніяхъ радіусъ вращенія можно откладывать по слѣду плоскости вращенія, какъ въ ту, такъ и въ другую сторону отъ проекціи центра вращенія, смотря по тому, въ какую сторону вращается плоскость.

Замѣтимъ, что при вращеніи плоскости около горизонтали или около фронтали нѣтъ надобности знать ея слѣдовъ (черт.149); плоскость можетъ быть дана и другими условіями. Положимъ, что плоскость дана прямой (ab,a'b'), параллельной вертикальной плоско-

Черт.149.



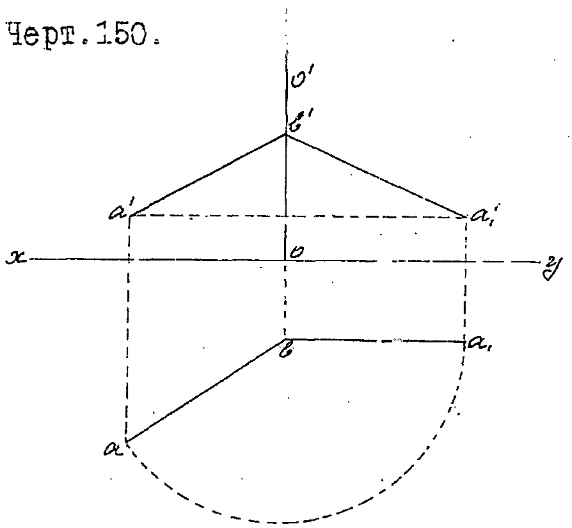
сти, и точкой (c,c'). Требуется эту плоскость посредствомъ вращенія привести въ положеніе, параллельное вертикальной плоскости и найти новое положеніе какой-нибудь точки, лежащей въ данной плоскости. Соединивъ c съ b и c' съ b', построимъ прямую (bc, b'c'), лежащую въ данной плоскости, а потому и точка (f,f') этой прямой лежитъ въ той же плоскости. При вращеніи данной плоскости около фронтали (ab, a'b') до положенія, параллельнаго вертикальной плоскости, горизонтальный слѣдъ ея совпадетъ съ ab, а вертикальный удалится въ безконечность; чтобы найти новое положеніе точки (f,f'), строимъ ея радіусъ вращенія Fk, который есть гипотенуза треугольника f'kF, одинъ изъ катетовъ котораго есть f'k, а другой $f'F = ff_0$; отложивъ длину kF на прямой f'k отъ точки k, получимъ F'_1 - вертикальную проекцію новаго положенія точки; горизонтальную проекцію его найдемъ на прямой ab.

Если ось вращенія, параллельная одной изъ плоскостей проекцій, будетъ расположена въ одной изъ плоскостей проекцій, то разсмотрѣнное вращеніе плоскости обращается въ совмѣщеніе ея съ одной изъ плоскостей проекцій. Такимъ образомъ, совмѣщеніе плоскости съ плоскостями проекцій представляетъ частный случай вращенія плоскости около оси, параллельной одной изъ нихъ.

Въ разсмотрѣнныхъ нами случаяхъ вращенія положеніе оси и уголъ поворота были данными, но въ приложеніяхъ этого метода къ рѣшенію задачъ большею частью приходится опредѣлять и то и другое, сообразно съ требованіями задачи, для рѣшенія которой производится вращеніе. Приведемъ нѣсколько примѣровъ.

З А Д А Ч А. Посредствомъ вращенія опредѣлить истинную длину отрѣзка (ab, a'b') (черт.150).

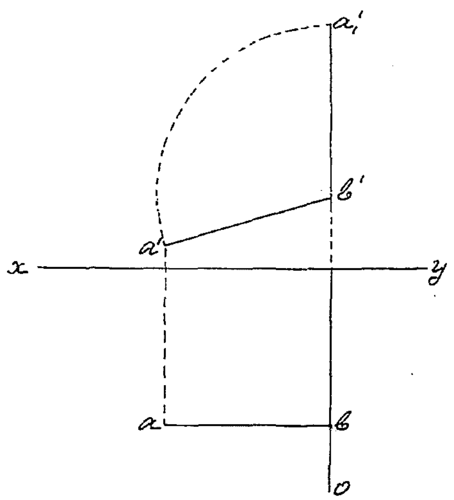
Черт.150.



Для того, чтобы одна изъ проекцій выражала истинную длину отрѣзка (ab, a'b'), необходимо, чтобы она была ему параллельна, а для этого данный отрѣзокъ надо повернуть до положенія, параллельнаго одной изъ плоскостей проекцій. Повернемъ его до положенія, параллельнаго вертикальной плоскости. Чтобы прямая могла стать въ положеніе, параллельное вертикальной плоскости, необходимо, чтобы ось вращенія была перпендикулярна къ горизонтальной плоскости. За ось вращенія хотя можно принять произвольную прямую, удовлетворяющую нашему условію, но построеніе будетъ проще, если ее принять проходящею черезъ одну изъ точекъ данной прямой. На нашемъ чертежѣ ось вращенія проходитъ черезъ точку (b, b') данной прямой. Когда прямая (ab, a'b'), вращаясь, займетъ искомое положеніе, то горизонтальная ея проекція приметъ положеніе ba_1, параллельное оси xy, а вертикальная - $b'a_1'$. Такъ какъ прямая въ новомъ положеніи параллельна вертикальной плоскости, то b'a'₁ выразитъ ея натуральную величину.

З А Д А Ч А. Прямую (ab, a'b'), параллельную вертикальной плоскости, посредствомъ вращенія привести въ положеніе, перпендикулярное къ горизонтальной плоскости проекцій (черт.151).

Черт.151.

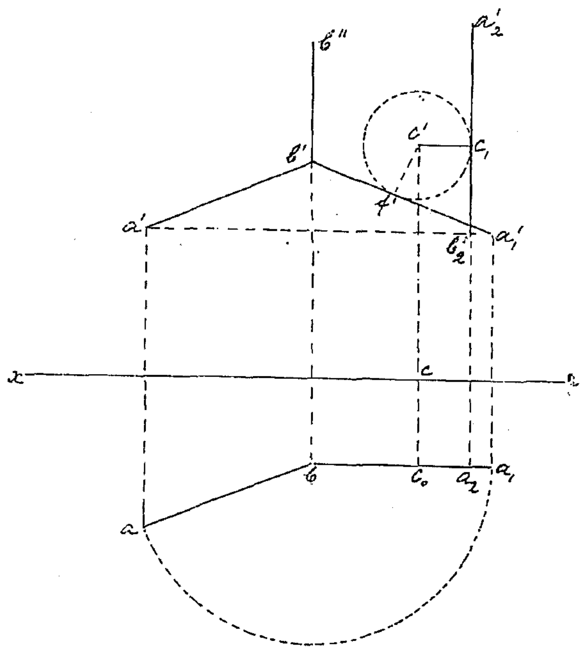


Для рѣшенія задачи за ось вращенія необходимо взять прямую, перпендикулярную къ вертикальной плоскости и проходящую черезъ точку (b,b') прямой (можно и произвольную). При вращеніи около оси (ob,b') горизонтальная проекція данной прямой будетъ уменьшаться и когда прямая займетъ искомое положеніе, она обратится въ точку, а вертикальная проекція - въ перпендикуляръ къ оси xy, который найдемъ, если въ точкѣ b' возставимъ перпендикуляръ къ оси xy и изъ b' опишемъ дугу радіусомъ b'a'.

З А Д А Ч А. Произвольную прямую (ab, a'b')посредствомъ вращенія привести въ положеніе, перпендикулярное къ одной изъ плоскостей проекцій. Повернемъ прямую до положенія, перпендикулярнаго къ горизонтальной плоскости проекцій (черт.152).

Для этого прямую придется повернуть около двухъ осей: 1) около оси (b, b'b"), перпендикулярной къ горизонтальной

Черт.152.

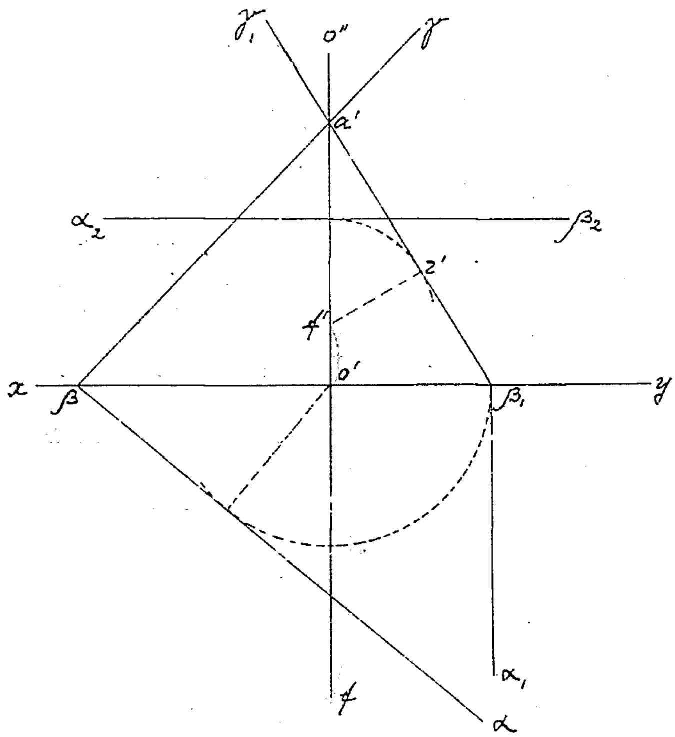


плоскости, до положенія, параллельнаго вертикальной плоскости, и 2) около оси, перпендикулярной къ вертикальной плоскости, до искомаго положенія. Сдѣлавъ по предыдущему первое построеніе, найдемъ, что прямая въ положеніи, параллельномъ вертикальной плоскости, будетъ (ba_1, $b'a_1'$). Для второго построенія возьмемъ произвольную ось (c_0c, c') и прямую (ba_1, $b'a_1'$), вращеніемъ около этой оси приведемъ въ положеніе, перпендикулярное горизонтальной плоскости, тогда ближайшая точка f' нашей прямой отъ оси вращенія придетъ въ c_1, а вертикальная проекція $b'a_1'$ займетъ положеніе $b_2'a_2'$; горизонтальная же проекція обратится въ точку a_2.

З А Д А Ч А. Плоскость $\alpha\beta\gamma$ посредствомъ вращенія привести въ положеніе, параллельное одной изъ плоскостей проекцій, положимъ, горизонтальной (черт.153).

Для рѣшенія задачи надо совершить два вращенія: 1) около оси, перпендикулярной къ горизонтальной плоскости и 2) около оси, перпендикулярной къ вертикальной плоско-

Черт.153.



сти, до искомаго положенія. Для перваго построенія расположимъ ось (o'o") въ вертикальной плоскости, тогда намъ придется повернуть только горизонтальный слѣдъ $\alpha\beta$ нашей плоскости до положенія $\alpha_1\beta_1$, перпендикулярнаго къ оси проекцій, вертикальный слѣдъ $\beta_1\gamma_1$ новаго положенія плоскости получится, если β_1 соединимъ съ точкой a', въ которой ось вращенія (o'o") пересѣкаетъ $\beta\gamma$, потому что эта точка, какъ лежащая на оси, положенія своего не измѣнитъ. Итакъ, новое положеніе нашей плоскости есть $\alpha_1\beta_1\gamma_1$. Приведя плоскость $\alpha\beta\gamma$ въ положеніе $\alpha_1\beta_1\gamma_1$, перпендикулярное вертикальной плоскости, легко найти уголъ ея наклоненія къ горизонтальной плоскости проекцій, потому что этотъ уголъ будетъ равенъ углу $x\beta_1\gamma_1$, т.е. углу наклоненія вертикальнаго слѣда $\beta_1\gamma_1$ къ оси проекцій.- Сдѣлаемъ второе построеніе. Примемъ для этого за ось вращенія прямую (fo', f'), перпендикулярную къ вертикальной плоскости, и плоскость $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ повернемъ до положенія, параллельнаго горизонтальной плоскости; для чего изъ f' опускаемъ перпендикуляръ на $\beta_1\gamma_1$ и радіусомъ f'r' описываемъ окружность, къ которой касательная $\alpha_2\beta_2$, параллельная xy, будетъ искомымъ вертикальнымъ слѣдомъ, а горизонтальный удалится въ безконечность.

Если нужно повернуть плоскость, данную не слѣдами, а другими условіями, то вращаютъ или прямыя, ее опредѣляющія, или же прямыя, параллельныя слѣдамъ плоскости.

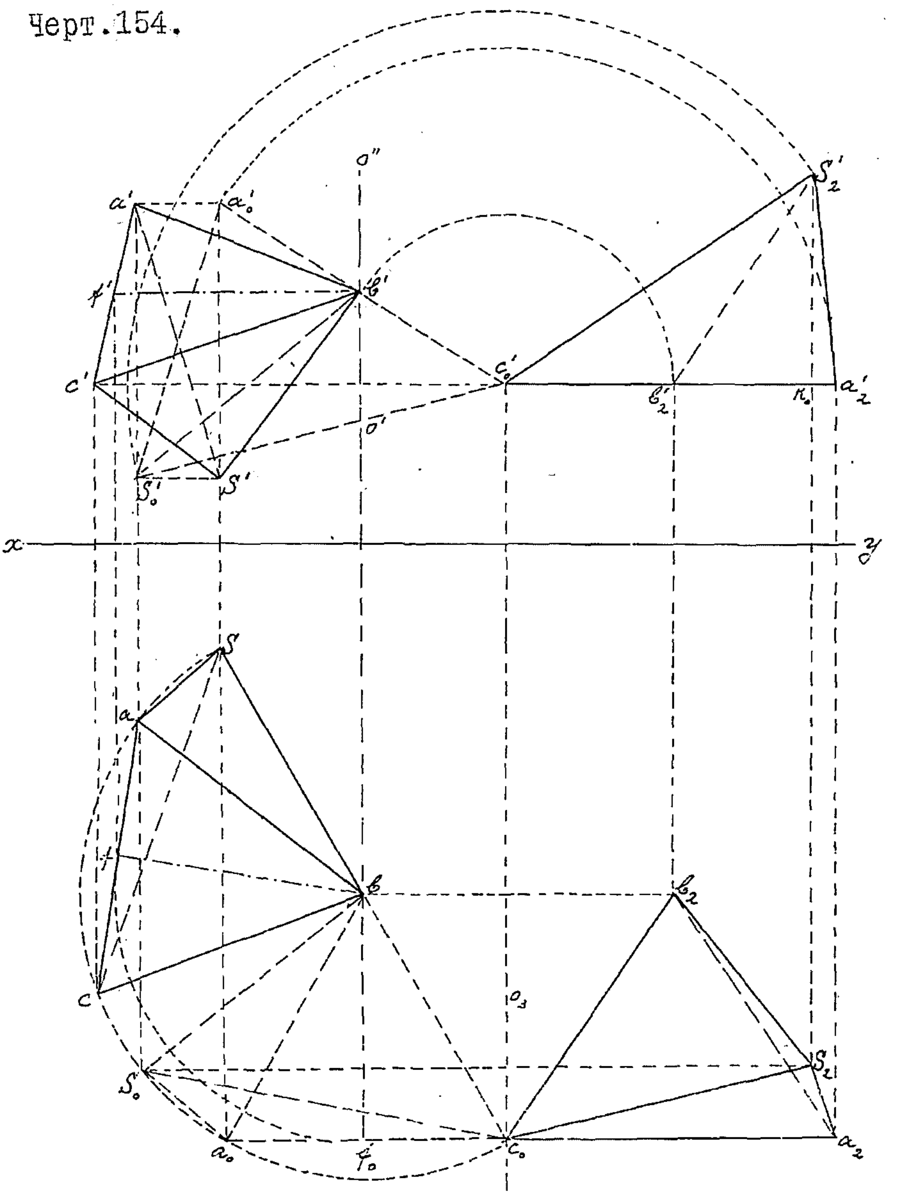
Изъ приведенныхъ примѣровъ видно, что для приведенія линій или плоскостей въ положеніе, удовлетворяющее даннымъ условіямъ, приходится ихъ вращать послѣдовательно: прежде около одной оси и потомъ около другой. При рѣшеніи болѣе сложныхъ задачъ является надобность въ поворачиваніи данной системы около нѣсколькихъ различныхъ осей. Такое вращеніе имѣетъ цѣлью приведеніе данной системы точекъ въ наивыгоднѣйшее положеніе относительно плоскостей проекцій, т.е. въ такое положеніе, при которомъ упрощается построеніе, служащее для опредѣленія различныхъ линій или угловъ, ими образуемыхъ и т.д. Выборъ относительнаго расположенія осей вращенія, а также и направленіе вращенія зависятъ отъ нашего произвола, но для того, чтобы эпюра была по возможности разборчивѣе, удобопонятнѣе, положеніе осей и направленіе вращенія выбираются такъ, чтобы новыя проекціи не покрывали собою старыхъ, если только размѣры чертежа позволяютъ это сдѣлать, такъ какъ при соблюденіи этого условія эпюра растягивается на большую площадь. Для того, чтобы общій размѣръ эпюры былъ по возможности меньше не въ ущербъ ея удобопонятности, новыя проекціи слѣдуетъ располагать возможно ближе къ старымъ, а для этого достаточно оси вращенія располагать возможно ближе къ вращаемымъ точкамъ. Для упрощенія эпюры и сокращенія числа отдѣльно поворачиваемыхъ точекъ, оси вращенія слѣдуетъ проводить черезъ данныя точки системы, такъ какъ въ этомъ случаѣ онѣ остаются неподвижными.

Если условіями задачи не требуются полныя новыя проекціи системы, то слѣдуетъ ограничиваться показаніемъ на чертежѣ только тѣхъ линій и точекъ, которыя безусловно необходимы для рѣшенія задачи.

Для примѣра разсмотримъ рѣшеніе слѣдующей задачи: пирамиду (Sabc, S'a'b'c') посредствомъ вращенія привести въ такое положеніе относительно плоскостей проекцій, при которомъ ея основаніе и высота проектировались бы въ натуральную величину (черт. 154).

Если пирамиду приведемъ въ такое положеніе, что ея основаніе будетъ параллельно горизонтальной плоскости, а вслѣдствіе этого высота - вертикальной плоскости, то новое положеніе пирамиды будетъ наивыгоднѣйшимъ относительно плоскостей проекцій въ смыслѣ измѣряемости основанія и высоты. Пусть (S,S') - проекціи вершины, а (abc, a'b'c') - основанія пирамиды. Высота измѣряется по перпендикуляру, опущенному изъ вершины (S,S') на основаніе (abc, a'b'c'). Для того, чтобы высота проектировалась на вертикальную плоскость въ натуральную величину, необходимо, чтобы она

Черт.154.



была параллельна этой плоскости, а въ этомъ случаѣ основаніе должно быть перпендикулярно къ этой плоскости. Такимъ образомъ для измѣренія высоты пирамиды достаточно привести ее въ положеніе, параллельное вертикальной плоскости, или основаніе перпендикулярное этой же плоскости. Для этого нужно повернуть пирамиду около оси, перпендикулярной къ горизонтальной плоскости, на такой уголъ, чтобы какая-нибудь горизонталь (bf, b'f') основанія стала перпендикулярна къ вертикальной плоскости, или горизонтальная проекція bf перпендикулярна xy. Проведемъ ось вращенія (b, $o'o''$) через крайнюю точку (b, b') перпендикулярно горизонтальной плоскости и повернемъ пирамиду на уголъ fbf_o, тогда горизонталь (bf, $b'f'$) плоскости основанія приметъ положеніе ($f_o b$, b') и проекціи пирамиды въ новомъ положеніи будутъ ($S_o a_o c_o b$, $S'_o a'_o c'_o b'$), при чемъ вертикальная проекція основанія обратится въ прямую $a'_o c'_o b'$. Перпендикуляръ, опущенный изъ S'_o на прямую $a'_o b' c'_o$, и будетъ служить мѣрою высоты пирамиды.

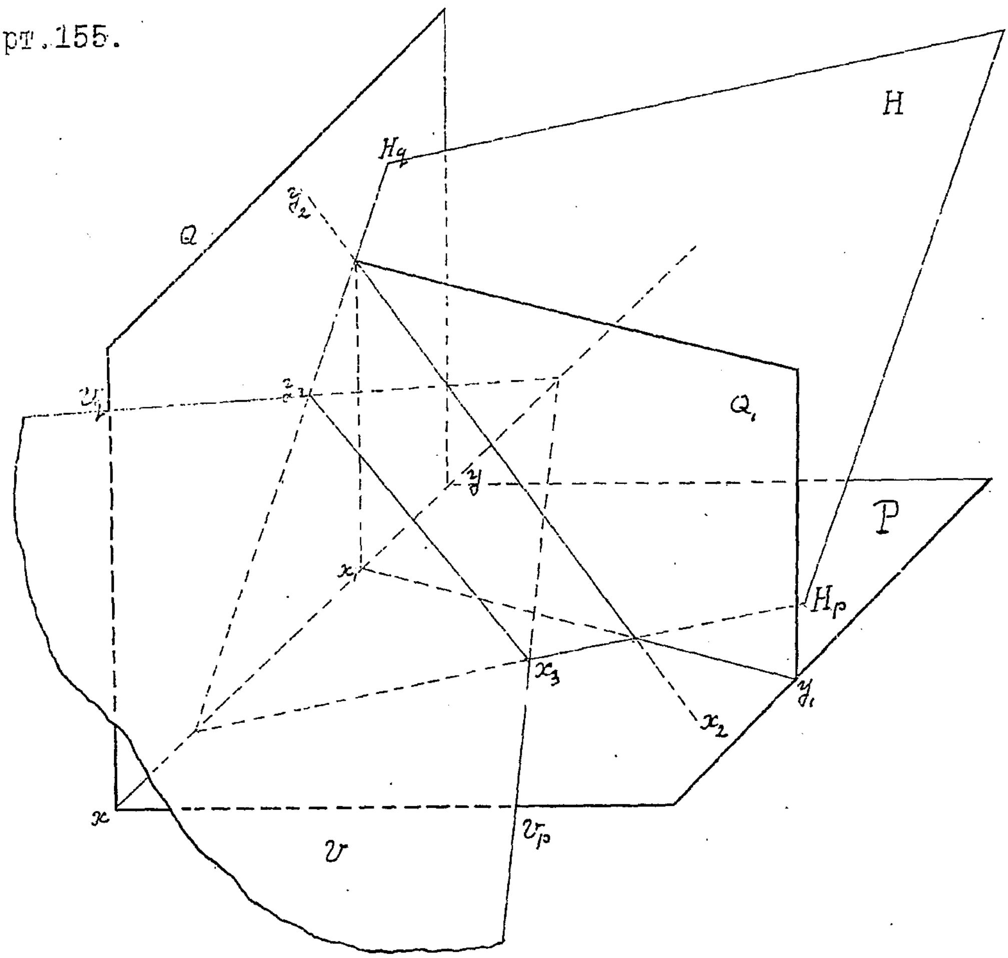
Повернемъ пирамиду второй разъ.

Ось вращенія ($o_2 o_3$, c'_o) проводимъ черезъ крайнюю точку ($c_o c'_o$). Уголъ второго поворота опредѣлится изъ того условія, чтобы вторая новая вертикальная проекція основанія стала параллельна оси xy. Строимъ новыя проекціи пирамиды ($S_2 c_o b_2 a_2$, $S'_2 c'_o b'_2 a'_2$). Такъ какъ основаніе пирамиды во второмъ новомъ ея положеніи параллельно горизонтальной плоскости, то $c_o b_2 a_2$ представляетъ натуральную его величину, а $S'_2 k_o$ - натуральную величину высоты пирамиды.

МЕТОДЪ ПЕРЕМѢНЫ ПЛОСКОСТЕЙ ПРОЕКЦІЙ.

Задачи метода перемѣны плоскостей проекцій въ общемъ состоятъ въ слѣдующемъ: по даннымъ проекціямъ системы точекъ A, B, C..... на плоскости проекцій P и Q построить проекціи той же системы точекъ на новыхъ плоскостяхъ проекцій V и H, въ предположеніи совмѣщенія послѣднихъ съ тою же плоскостью чертежа, съ какою совмѣщены и данныя плоскости проекцій P и Q. Построить проекціи данной системы A, B, C... на новыхъ плоскостяхъ проекцій V и H - значитъ перейти отъ старой системы къ новой. Новыя плоскости проекцій V и H относительно прежнихъ P и Q опредѣляются слѣдами (черт.155). Будемъ обозначать слѣды плоскостей V и H относительно Q и P такъ: H_p - горизонтальный слѣдъ плоскости H, а H_q - вертикальный; точно такъ же V_p - горизонтальный слѣдъ плоскости V, а V_q - вертикальный. Чтобы выполнить этотъ переходъ, достаточно изъ каждой точки системы опустить перпендикуляры на новыя плоскости проекцій V и H

Черт.155.



и найти ихъ подошвы, которыя и будутъ искомыми проекціями данныхъ точекъ. Но такое построеніе было бы слишкомъ сложно, и потому на практикѣ пользуются другимъ, болѣе простымъ способомъ: послѣдовательной перемѣной плоскостей проекцій. Сущность этого способа состоитъ въ слѣдующемъ. Положимъ, отъ данныхъ плоскостей P и Q ..... (1) надо перейти къ V и H и построить на нихъ новыя проекціи системы точекъ. Тогда, оставляя горизонтальную плоскость проекціи P неподвижною, замѣняемъ вертикальную Q - новою плоскостью Q_1, выбранною такъ, чтобы она была перпендикулярна къ горизонтальному слѣду H_{p} плоскости H, тогда понятно, что Q_1 будетъ перпендикулярна какъ къ плоскости P, такъ и къ H и новая система плоскостей проекцій будетъ: (Q_1, P) ...(2) при чемъ осью проекцій будетъ x_1y_1. На этихъ плоскостяхъ горизонтальная проекція системы точекъ не измѣнится, а измѣнится только вертикальная, которую мы строимъ на новой вертикальной плоскости. Затѣмъ, оставляя неподвижною новую вертикальную плоскость Q_1, замѣняемъ прежнюю горизонтальную P черезъ H и получаемъ еще новую систему плоскостей (Q_1, H).....(3) съ новой осью x_2y_2. Въ этой системѣ плоскость H не будетъ уже горизонтальною, но, несмотря на это, ее для удобства будемъ называть горизонтальною. Построивъ по вертикальнымъ проекціямъ на плоскости Q_1 новыя горизонтальныя, получимъ проекціи нашей системы точекъ на новыхъ плоскостяхъ (Q_1, H). Наконецъ, оставляя H, перемѣняемъ Q_1 на V и получаемъ искомыя проекціи системы точекъ на новыхъ плоскостяхъ (V,H).....(4) съ новой осью x_3y_3. Если бы мы прежде измѣнили горизонтальную плоскость P на P_1, то выбрали бы ее такъ, чтобы P_1 была перпендик. V_2, и тогда новая система плоскостей проекцій была бы (P_1, Q).....(2). Въ этой системѣ измѣняемъ Q на V такъ, что новая система плоскостей будетъ (P_1, V).....(3). Перемѣняя же P_1 на H, получимъ окончательную систему (V, H).....(4).

Хотя примѣненіе способа послѣдовательной перемѣны плоскостей проекцій сопряжено съ построеніемъ лишней проекціи на плоскостяхъ Q_1 и P_1, но тѣмъ не менѣе способъ этотъ оказывается все же значительно проще непосредственнаго построенія проекцій на V и H, такъ какъ переходъ отъ заданія въ одной изъ системъ плоскостей проекцій къ другой, смежной съ нею, совершается, какъ мы увидимъ, очень просто.

Замѣна одной плоскости другою соотвѣтствуетъ предположенію, что лучи зрѣнія измѣнили свое направленіе или что точка зрѣнія измѣнила свое положеніе въ пространствѣ. Дѣйствительно, такъ какъ лучи зрѣнія перпендикулярны къ каждой изъ плоскостей проекцій, то понятно, что при перемѣнѣ горизонтальной плоскости, или вертикальной, необходимо должно измѣниться направленіе луча зрѣнія, а слѣдовательно и положеніе точки зрѣнія.

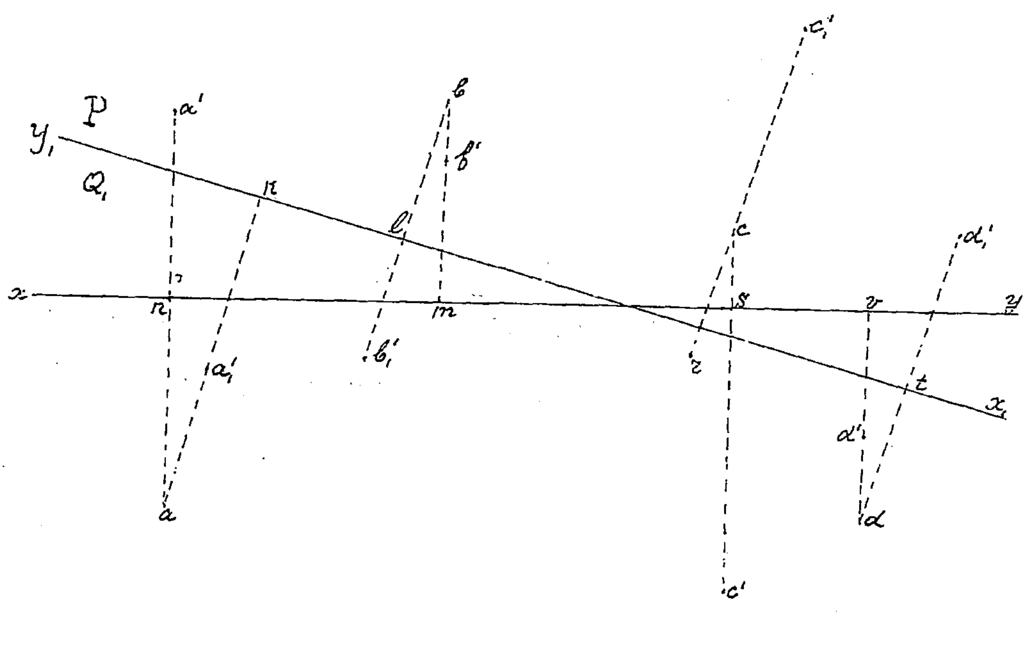
Плоскостями P,Q или Q_1, P_1, или V,H пространство дѣлится на новые углы, названіе которыхъ идетъ въ томъ же порядкѣ, какъ и старыхъ, а именно: уголъ между верхнею полою плоскости Q_1 и новою заднею полою Р называется второю четвертью и т.д. Новая точка зрѣнія всегда располагается въ первомъ новомъ углу. При совмѣщеніи плоскости Q_1 съ Р, какъ плоскостью чертежа, первую вращаютъ въ такомъ направленіи, чтобы верхняя ея пола покрывала новую заднюю полу Р. Чтобы на эпюрѣ отличить новую переднюю полу плоскости Р и верхнюю вертикальную плоскость Q_1, будемъ держаться слѣдующаго правила: „если наблюдатель смотритъ по линіи xy отъ x къ y, то по лѣвую сторону его будетъ находиться совмѣщеніе верхней вертикальной и задней горизонтальной плоскости, а по правую - нижней вертикальной и передней горизонтальной; или же съ той стороны оси проекцій, гдѣ находится передняя горизонтальная пола новой плоскости проекцій, пишутъ Р, а гдѣ верхняя вертикальная - Q_1".

При замѣнѣ плоскости Р плоскостью P_1, точка зрѣнія выбирается впереди плоскости Q надъ плоскостью P_1. Въ этомъ случаѣ плоскость P_1 совмѣщаютъ съ Q, какъ плоскостью чертежа, въ такомъ направленіи, чтобы передняя пола плоскости P_1 совпала съ нижнею полою плоскости Q. Располагая буквы x и y при концахъ новой оси, согласно выраженному раньше правилу, мы и въ этомъ случаѣ выразимъ на эпюрѣ, гдѣ будетъ передняя пола новой горизонтальной плоскости и верхняя пола вертикальной.

Измѣненіе плоскостей проекцій производится съ цѣлью наивыгоднѣйшаго ихъ положенія относительно данной системы точекъ, какъ въ смыслѣ ихъ видимости, такъ и въ смыслѣ измѣренія линій, угловъ и т.п., образуемыхъ этою системою точекъ. Если точки системы невидимы относительно данной системы плоскостей, то, измѣняя плоскости проекцій, можно притти къ такимъ, относительно которыхъ нѣкоторыя изъ точекъ сдѣлаются видимыми; такъ же, если проекціи угла не выражаютъ его величины, то можно одну изъ плоскостей измѣнить такъ, чтобы она стала параллельна плоскости этого угла, тогда проекція угла на эту плоскость выразитъ натуральную величину угла.

Разсмотримъ, какимъ образомъ по даннымъ проекціямъ точки на плоскостяхъ P и Q построить ея проекціи, когда одна изъ плоскостей перемѣнитъ свое положеніе. Пусть (a, a') проекціи точки на плоскостяхъ P и Q (черт.156). Перемѣнимъ вертикальную плоскость проекцій Q на Q_1, такъ чтобы

Черт.156.



новая ось проекцій была x_1y_1. При совмѣщеніи плоскости Q_1 съ P будемъ держаться вышеизложеннаго правила: если наблюдатель смотритъ по линіи x_1y_1 отъ x_1 къ y_1, то по лѣвую сторону его будетъ находиться совмѣщеніе верхней вертикальной и задней горизонтальной плоскостей, а по правую - нижней вертикальной и передней горизонтальной. Построимъ новыя проекціи точки (a, a'). Такъ какъ горизонтальная плоскость проекцій положенія своего не мѣняетъ, то горизонтальная проекція a останется безъ измѣненія; вертикальная же будетъ лежать на перпендикулярѣ ak къ оси x_1y_1 по ту или другую ея сторону. Разстояніе данной точки A пространства отъ горизонтальной плоскости не измѣнится и равно разстоянію $a'n$ - вертикальной проекціи точки отъ оси проекцій. Посмотримъ, въ какую сторону отъ точки k на линіи ak надо откладывать это разстояніе. При первоначальномъ положеніи плоскостей проекцій вертикальная проекція a' лежитъ выше оси xy, слѣдовательно точка пространства лежитъ выше горизонтальной плоскости и при перемѣнѣ вертикальной плоскости проекцій можетъ лежать или въ 1-ой или во II-ой четвертяхъ. Горизонтальная проекція a лежитъ по лѣвую сторону наблюдателя, смотрящаго по направленію отъ x_1 къ y_1, слѣдовательно она лежитъ на задней горизонтальной плоскости, и точка пространства при новой вертикальной плоскости будетъ находиться во второй четверти. Если точка пространства находится во II четверти, то обѣ ея проекціи расположатся, при совмѣщеніи плоскостей, по одну сторону оси; горизонтальная проекція а дана, слѣдовательно разстояніе $a'n$ надо откладывать на перпендикулярѣ ак отъ точки к, въ сторону ка, до точки $a_{/}'$, которая и будетъ новой вертикальной проекціей точки пространства А.

Разсмотримъ построеніе новыхъ проекцій точки(b, b'), которая при прежнемъ положеніи плоскостей проекцій находилась во II-ой четверти. Горизонтальная плоскость проекцій, а слѣдовательно и горизонтальная проекція ъ положеній своихъ не измѣнятъ. Найдемъ вертикальную проекцію; она должна лежать на перпендикулярѣ ъl къ оси $x_{/}y_{/}$ по ту или другую ея сторону. Посмотримъ, по какую сторону $x_{/}y_{/}$ будетъ новая вертикальная проекція. При первоначальномъ положеніи плоскостей проекцій вертикальная проекція ъ' расположена выше $x_{/}y_{/}$, слѣдовательно точка пространства лежитъ выше горизонтальной плоскости проекцій, а такъ какъ эта плоскость положенія своего не мѣняетъ, то при новой вертикальной плоскости точка будетъ лежать выше горизонтальной, т.е. въ 1-ой или во II-ой четверти; горизонтальная проекція ъ находится по правую сторону зрителя, смотрящаго по направленію отъ $x_{/}$ къ $y_{/}$, слѣдовательно она расположена на передней горизонтальной плоскости проекцій и точка пространства будетъ лежать при новой вертикальной плоскости въ I-ой четверти и проекціи ея расположатся по разныя стороны оси $x_{/}y_{/}$. Итакъ, разстояніе точки пространства до горизонтальной плоскости, равное ъ'm, надо откладывать на перпендикулярѣ ъl отъ точки l въ сторону lъ$_{/}'$;

точка b_1' и будетъ искомой вертикальной проекціей при новомъ положеніи вертикальной плоскости проекцій.

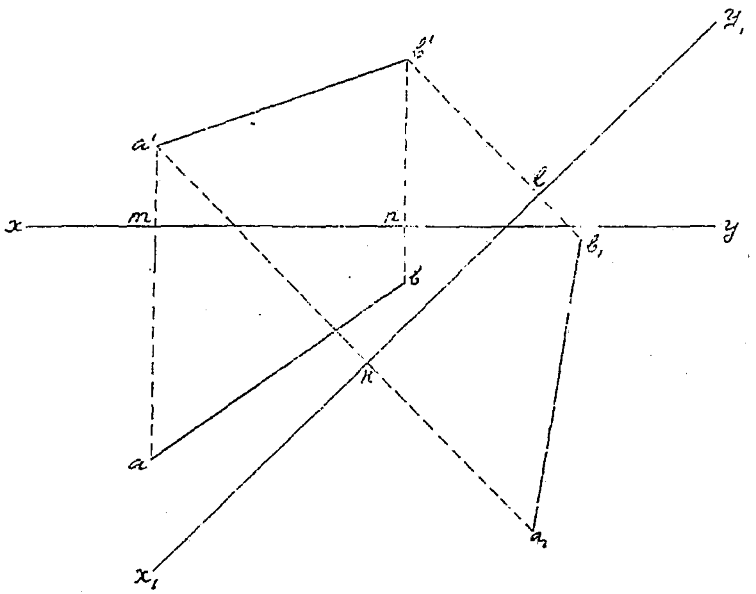
Возьмемъ точку (c, c'), лежащую при первоначальномъ положеніи плоскостей проекцій въ III-ей четверти. Горизонтальная проекція c остается безъ перемѣны; вертикальная же расположится на перпендикулярѣ, опущенномъ изъ точки c на новую ось проекцій $x_1 y_1$. Такъ какъ при первоначальномъ положеніи плоскостей точка пространства (c, c') лежитъ въ III четверти, то послѣ перемѣны вертикальной плоскости она можетъ быть или въ III-ей или въ IV-й четверти; горизонтальная проекція c расположена вправо отъ оси $x_1 y_1$, т.е. она лежитъ на передней горизонтальной плоскости, слѣдовательно точка пространства находится въ IV четверти и обѣ ея проекціи расположатся по одну сторону оси $x_1 y_1$. Итакъ, разстояніе $rc_1' = sc'$ надо откладывать въ сторону rc.

Возьмемъ точку (d, d') въ IV четверти и построимъ ея новую вертикальную проекцію. Горизонтальная проекція остается безъ измѣненія; опускаемъ изъ точки d перпендикуляръ на ось $x_1 y_1$ и откладываемъ на немъ разстояніе $td_1' = vd'$ въ сторону противоположную td, такъ какъ при новомъ положеніи вертикальной плоскости, горизонтальная проекція d лежитъ на задней горизонтальной плоскости и вслѣдствіе этого точка находится въ III четверти.

Точно такъ же производится перемѣна горизонтальной плоскости проекцій, съ тою только разницей, что неподвижными остаются вертикальныя проекціи точекъ.

Разсмотримъ теперь построеніе новыхъ проекцій прямой при перемѣнѣ одной изъ плоскостей проекцій (черт.157).

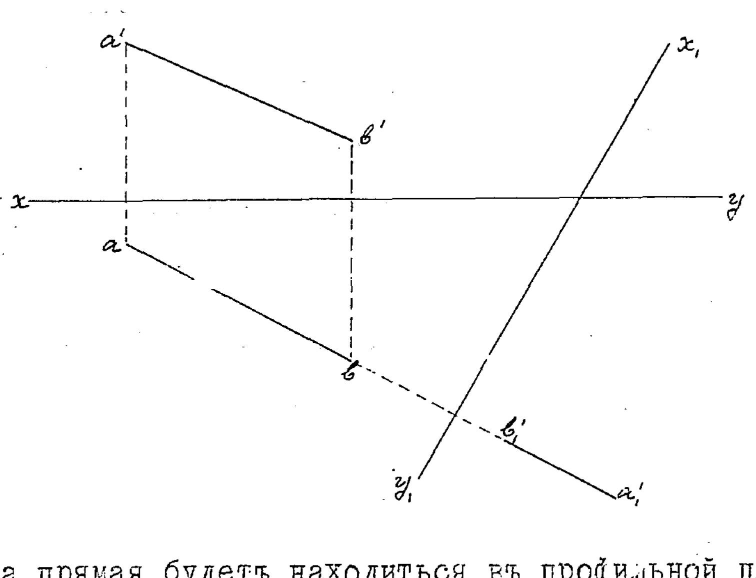
Черт.157.



Пусть требуется построить новую горизонтальную проекцію прямой (ab, a'b'), если горизонтальная плоскость измѣнить свое положеніе такъ, что осью проекцій будетъ прямая $x_{,}y_{,}$. Для ясности чертежа переднюю полу новой горизонтальной плоскости совмѣщаютъ съ нижней вертикальной плоскостью въ такомъ направленіи, чтобы новая горизонтальная проекція не покрывала старой; на эпюрѣ это выразится надлежащимъ расположеніемъ буквъ $x_{,}y_{,}$ по новой оси проекцій. Для построенія новыхъ проекцій отрѣзка (ab, a'b') строимъ проекціи конечныхъ его точекъ, соединивъ которыя, получимъ искомыя проекціи отрѣзка. Такъ какъ вертикальная плоскость остается безъ измѣненія, то и вертикальная проекція отрѣзка (a'b') останется безъ измѣненій; найдемъ горизонтальную его проекцію. Если мы изъ точекъ a' и b' опустимъ перпендикуляры на ось $x_{,}y_{,}$, то на нихъ будутъ лежать новыя горизонтальныя проекціи точекъ (a,a') и (b,b'). При прежнемъ положеніи горизонтальной плоскости точки (a,a') и (b,b') лежали въ первой четверти, т.е. впереди вертикальной плоскости, слѣдовательно при новой горизонтальной плоскости онѣ расположатся или въ I-ой или въ IV-ой четверти, но такъ какъ при новомъ положеніи оси $x_1 y_1$ вертикальныя проекціи a' и b' лежатъ на верхней вертикальной плоскости, то конечныя точки отрѣзка при новой горизонтальной плоскости лежатъ въ I-ой четверти и проекціи ихъ расположатся по обѣ стороны оси $x_1 y_1$. Итакъ, отложивъ на перпендикулярѣ $a'k$ и $b'l$ отъ точекъ k и l разстоянія $ka_1 = am$ и $lb_1 = b'l$, получимъ новыя горизонтальн.проекціи a_1 и b_1 конечныхъ точекъ отрѣзка, соединивъ которыя, получимъ новую горизонтальную проекцію даннаго отрѣзка.

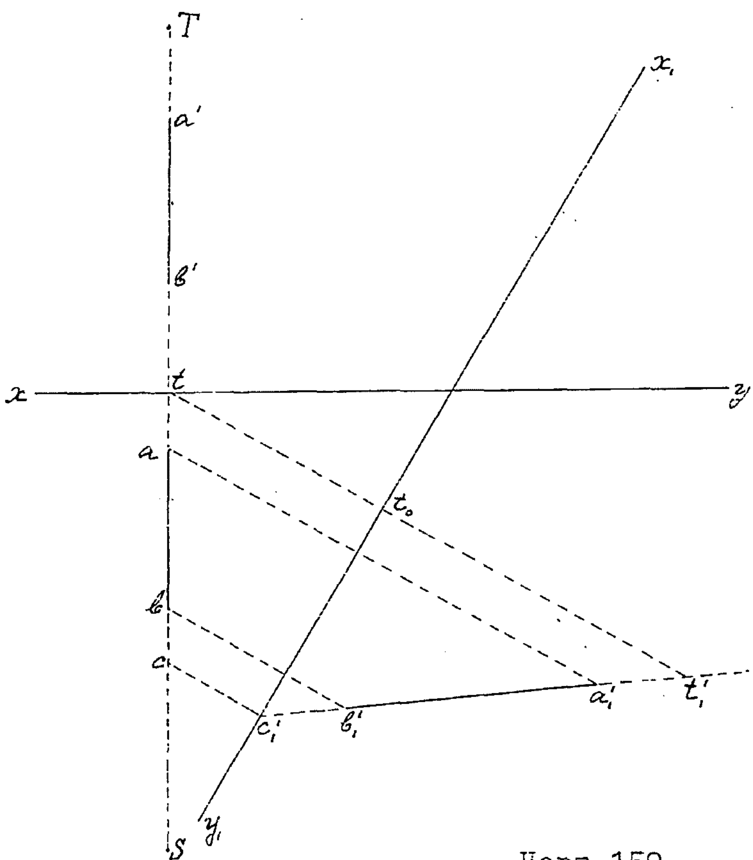
При перемѣнѣ одной изъ плоскостей проекцій можетъ случиться, что новая ось проекцій будетъ перпендикулярна къ которой-нибудь проекціи данной прямой, тогда прямая будетъ находиться въ профильной плоскости. Пусть

Черт.158.



(черт.158) данная прямая есть (ab, a'b'); перемѣняемъ вертикальную плоскость проекцій такъ, чтобы новая ось проекцій была перпендикулярна ab. Построивши по правилу новую вертикальную проекцію $a'_1 b'_1$, найдемъ, что она перпендикулярна къ оси $x_1 y_1$. Итакъ, обѣ проекціи прямой (ab, $a'_1 b'_1$) перпендик. $x_1 y_1$, слѣдовательно эта прямая лежитъ въ профильной плоскости.

При помощи метода перемѣны плоскостей проекцій можно построить слѣды прямой, лежащей въ профильной плоскости. Пусть (ab, a'b') (черт.159) - данная прямая, лежащая въ профильной плоскости; требуется найти ея слѣды. Замѣнимъ вертикальную плоскость проекцій такою, чтобы новая ось проекцій не была перпендикулярна

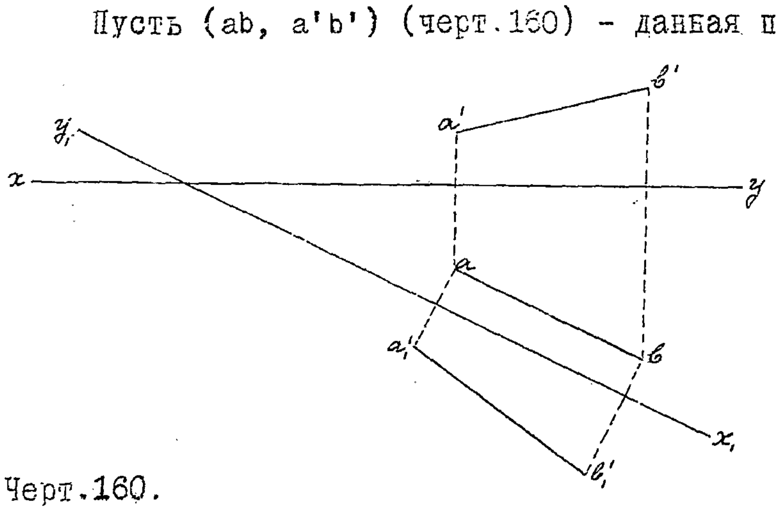


Черт.159.

къ горизонтальной проекціи данной прямой. Пусть новая ось проекцій есть $x_1 y_1$, при чемъ буквы x_1 и y_1 располагаемъ такъ, чтобы новая вертикальная проекція не заслоняла прежней горизонтальной. Затѣмъ, по извѣстному правилу, строимъ вертикальную проекцію отрѣзка $a'_1b'_1$. По проекціямъ ab и $a'_1b'_1$ строимъ горизонтальный слѣдъ c, который при перемѣнѣ плоскости останется безъ измѣненія, такъ какъ лежитъ на горизонтальной плоскости проекцій, которая неподвижна. Строимъ теперь вертикальный слѣдъ, для чего замѣчаемъ, что его горизонтальная проекція относительно прежнихъ плоскостей проекцій есть t, т.е. лежитъ на оси проекцій. По горизонтальной проекціи t строимъ новую вертикальную t'_1; тогда $t_0t'_1$ выразитъ разстояніе вертикальнаго слѣда отъ оси проекцій xy; отложивъ отрѣзокъ $tT = t_0t'_1$, получимъ точку T - искомый вертикальный слѣдъ нашей прямой $(ab,\ a'b')$.

Если мы одну изъ плоскостей проекцій замѣнимъ новой такъ, чтобы новая ось проекцій была параллельна которой-нибудь проекціи прямой, то другая проекція выразитъ натуральную величину отрѣзка.

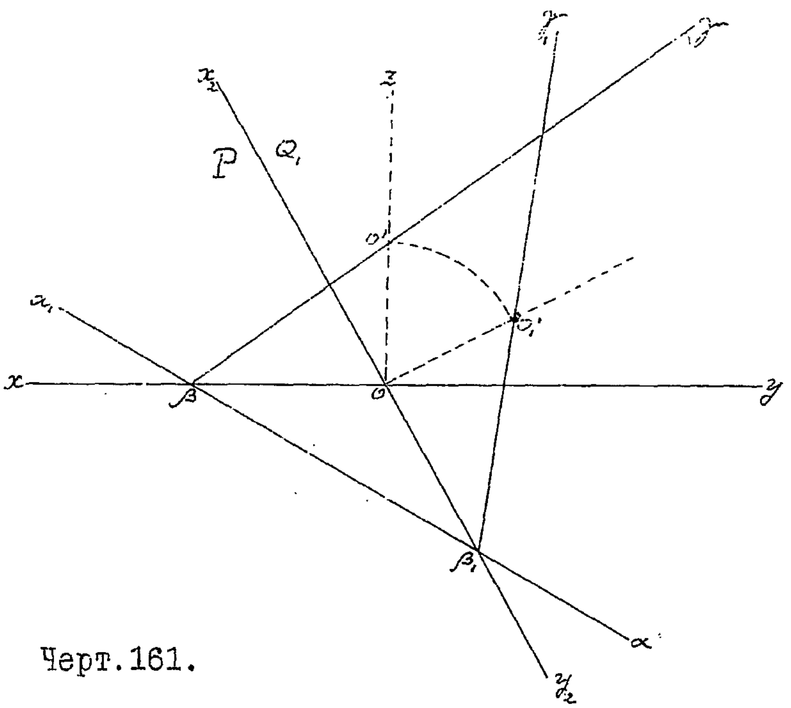
Пусть $(ab,\ a'b')$ (черт.160) - данная прямая. Замѣнимъ вертикальную плоскость такою плоскостью, чтобы новая ось



Черт.160.

проэкцій x_1y_1 была параллельна горизонтальной проекціи ab. Построивъ по правилу новую вертикальную проекцію $a_1'b_1'$, получимъ прямую (ab, $a_1'b_1'$), вертикальная проекція которой ($a_1'b_1'$) выражаетъ натуральную длину даннаго отрѣзка.

Теперь разсмотримъ построеніе слѣдовъ данной плоскости, если одна изъ плоскостей проекцій будетъ замѣнена новою (черт.161). Пусть $\alpha\beta\gamma$ - слѣды данной плоскости при плоскостяхъ проекцій P и Q. Замѣнимъ вертикальную плоскость Q новою Q_1 такъ, что новая ось проекцій будетъ x_2y_2, при чемъ буквы x_2 и y_2 указываютъ, съ какой стороны новой оси находится совмѣщеніе верхней новой вертикальной плоскости съ передней горизонтальной. Для построенія слѣдовъ разсуждаемъ слѣдующимъ образомъ: горизонтальная плоскость P остается безъ измѣненій, слѣдовательно

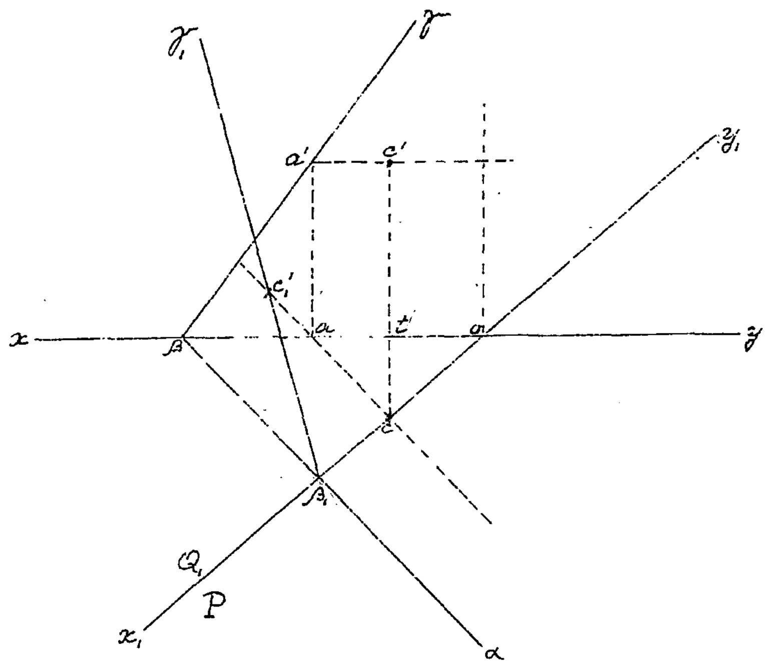


Черт.161.

прямая $\alpha\beta$ будетъ служить горизонтальнымъ слѣдомъ данной плоскости и при новой вертикальной плоскости. Найдемъ вертикальный слѣдъ. Точка β_1 - пересѣченія горизонтальнаго слѣда съ осью проекцій - лежитъ на данной плоскости и на оси проекцій, слѣдовательно она принадлежитъ новому вертикальному слѣду, и потому, если построимъ еще другую точку, принадлежащую тому же вертикальному слѣду, то, соединивъ ихъ прямой, получимъ искомый вертикальный слѣдъ. За вторую точку вертикальнаго слѣда возьмемъ точку пересѣченія данной плоскости съ линіей сѣченія старой и новой вертикальныхъ плоскостей проекцій. При совмѣщеніи плоскостей, на старой вертикальной плоскости, эта точка лежитъ въ точкѣ o' - пересѣченія вертикальнаго слѣда $\beta\gamma$ съ перпендикуляромъ, возстановленнымъ изъ точки пересѣченія старой и новой осей къ оси проекціи xy. На новой вертикальной плоскости эта точка будетъ лежать на перпендикулярѣ, возстановленномъ изъ o къ x_2y_2 на разстояніи oo_1', равномъ oo' отъ оси x_2y_2. Итакъ, мы нашли двѣ точки β_1 и o_1', принадлежащія новому вертикальному слѣду; если мы соединимъ ихъ, то получимъ новый вертикальный слѣдъ $\beta_1\gamma_1$. При этомъ надо замѣтить, что часть $\alpha_1\beta$ горизонтальнаго слѣда плоскости при прежнихъ плоскостяхъ проекцій была невидима, при новой же вертикальной плоскости проекцій она стала видима, тогда какъ часть $\alpha\beta_1$, которая раньше лежала впереди вертикальной плоскости и потому была видима - теперь будетъ находиться позади новой вертикальной плоскости и потому будетъ невидима.

Если вертикальный слѣдъ данной плоскости съ перпендикуляромъ, возстановленнымъ изъ точки пересѣченія осей къ старой оси проекцій, въ предѣлахъ чертежа не пересѣкаются, то построеніе нѣсколько видоизмѣняется. Тогда за вторую точку новаго вертикальнаго слѣда беремъ точку встрѣчи горизонтали данной плоскости съ новой вертикальной плоскостью проекцій. Пусть $\alpha\beta\gamma$ - слѣды плоскости (чер.162) при системѣ плоскостей Р и Q: требуется построить слѣды той же плоскости при плоскостяхъ Р и Q_1, т.е.если будетъ измѣнена

Черт.162.



вертикальная плоскость проекцій. Такъ какъ горизонтальная плоскость положенія своего не измѣняетъ, то горизонтальный слѣдъ при новой системѣ будетъ $\alpha\beta_1$. Найдемъ вертикальный слѣдъ. Очевидно, вертикальный слѣдъ будетъ проходить черезъ точку β_1 - пересѣченія горизонтальнаго слѣда съ новой осью x_1y_1 . Для построенія другой точки, принадлежащей новому вертикальному слѣду, проводимъ въ данной плоскости какую-нибудь горизонталь (ас, а'с') и находимъ точку встрѣчи ея съ новой вертикальной плоскостью проекцій. Горизонтальная проекція ея должна лежать во-первыхъ на горизонтальной проекціи горизонтали ac, такъ какъ сама точка лежитъ на этой горизонтали, а во-вторыхъ на новой оси проекцій x_1y_1, такъ какъ точка эта лежитъ на новой вертикальной плоскости. Итакъ, проекція лежитъ въ точкѣ пересѣченія горизонтальной проекціи горизонтали и новой оси проекцій. По горизонтальной проекціи c находимъ вертикальную c' (при прежней вертикальной плоскости). Найдя проекціи (c, c') при первоначальной вертикальной плоскости, мы по правилу строимъ проекцію c_1' этой точки на новую вертикальную плоскость. Для этого мы отъ точки c въ сторону ca откладываемъ разстояніе $cc_1' = c't$. Точка c_1' будетъ второй точкой, принадлежащей вертикальному слѣду данной плоскости при новой вертикальной плоскости проекцій, и потому, проведя черезъ β_1 и c_1' прямую, мы получимъ новый вертикальный слѣдъ $\beta_1\gamma_1$.

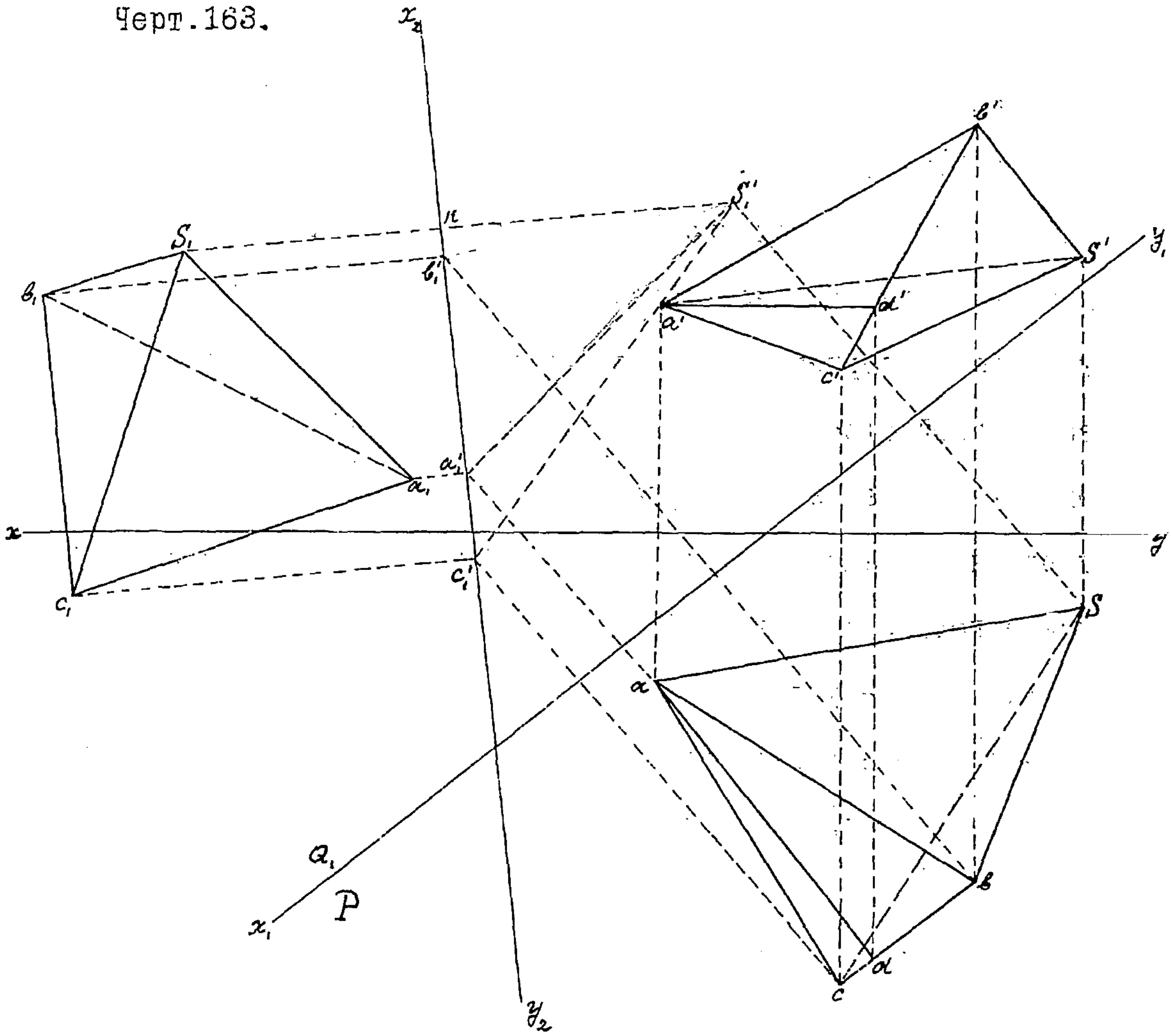
При этомъ часть горизонтальнаго слѣда $\beta\beta_1$, бывшая раньше видимой, теперь станетъ невидима.

Если бы мы измѣнили горизонтальную плоскость проекцій, то построеніе было бы прежнее, съ тою только разницею, что во второмъ случаѣ надо проводить фронталь данной плоскости.

Разсмотримъ теперь приложеніе метода перемѣны плоскостей проекціи къ рѣшенію задачъ.

З А Д А Ч А. Даны проекціи треугольной пирамиды относительно данныхъ плоскостей проекцій P и Q; требуется

Черт.163.



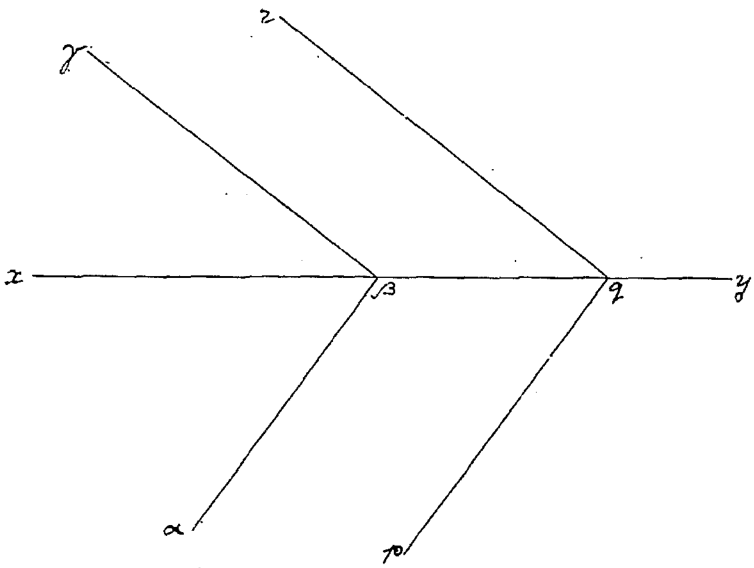
измѣнить плоскости проекцій такъ, чтобы основаніе пирамиды проектировалось на одну плоскость, а высота - на другую въ натуральную величину (черт.163).

Пусть (abc, a'b'c') - проекціи основанія пирамиды, а (S,S') - вершины на плоскостяхъ проекцій P и Q. Замѣняемъ вертикальную плоскость Q такою плоскостью Q_1, чтобы она, будучи перпендикулярна къ P, была параллельна высотѣ пирамиды, т.е. переходимъ къ новой системѣ плоскостей проекцій P и Q_1. Пусть высота нашей пирамиды есть SK; а основаніе -ABC, тогда Q_1 параллельна SK, а SK перпендикулярна ABC, поэтому Q_1 перпендикулярна ABC. Итакъ, въ новой системѣ плоскостей проекцій плоскость $Q_1 \perp$ ABC. При этомъ условіи высота пирамиды будетъ проектироваться на плоскость Q_1 въ натуральную величину, а основаніе пирамиды въ видѣ прямой. Такъ какъ новая вертикальная плоскость Q_1 перпендикулярна горизонтальной плоскости P и плоскости основанія пирамиды, то она будетъ перпендикулярна и къ линіи ихъ пересѣченія, т.е. горизонтальному слѣду плоскости основанія пирамиды, поэтому, найдя горизонтальный слѣдъ плоскости основанія пирамиды и приведя къ нему перпендикулярную плоскость, можемъ разсматривать ее какъ плоскость Q_1. Но такъ какъ горизонтальный слѣдъ плоскости основанія пирамиды можетъ и не помѣститься въ предѣлахъ чертежа, то беремъ какую-нибудь горизонталь плоскости основанія пирамиды и проводимъ къ ней перпендикулярную плоскость. Итакъ, чтобы найти новую ось проекцій, проводимъ черезъ какую-нибудь точку (a, a') основанія горизонталь (ad, a'd') плоскости основанія пирамиды и затѣмъ проводимъ новую ось $x_1 y_1$ перпендикул. ad. (Буквы x_1 и y_1 располагаются въ такомъ порядкѣ, чтобы новая вертикальная проекція не заслоняла прежней горизонтальной.) Построивъ ось $x_1 y_1$, строимъ по правилу новую вертикальную проекцію пирамиды. При этомъ, если построеніе сдѣлано вѣрно, то вертикальныя проекціи трехъ точекъ основанія должны получиться на одной прямой $b_1' a_1' c_1'$. Если при такомъ положеніи вертикальной проекціи изъ вершины пирамиды S_1' опустимъ перпендикуляръ на прямую $b_1'a_1'c_1'$, то длина его $S_1'k$ выразитъ натуральную величину высоты. Чтобы удовлетворить другому условію, относящемуся къ измѣренію основанія пирамиды, замѣняемъ данную горизонтальную плоскость P новою P_2 такъ, чтобы она была параллельна основанію, а слѣдовательно перпендикулярна вертикальной плоскости проекцій. Для упрощенія построенія, за новую горизонтальную плоскость примемъ плоскость основанія пирамиды; тогда новая ось проекцій будетъ x_2y_2. Затѣмъ строимъ по правилу новую горизонтальную проекцію пирамиды и получаемъ $a_1b_1c_1$ - натуральную высоту основанія. (Въ этомъ случаѣ плоскость проекцій P_2 не будетъ горизонтальною.)

О ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ПЛОСКОСТЕЙ.

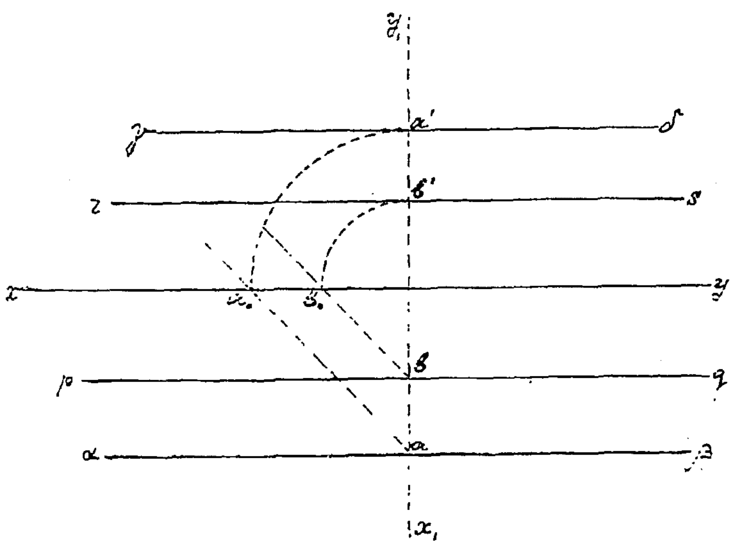
Параллельность плоскостей выражается слѣдующимъ условіемъ: если плоскости параллельны, то одноименные слѣды ихъ также параллельны. Пусть плоскость $\alpha\beta\gamma$ (черт.164) параллельна плоскости pqr, тогда слѣды ихъ $\alpha\beta$ и pq, $\beta\gamma$ и qr соотвѣтственно параллельны, такъ какъ двѣ параллельныя плоскости пересѣкаются въ третьей по линіямъ параллельнымъ. Обратно, если одноименные слѣды данныхъ плоскостей параллельны, то и плоскости, ими опредѣляемыя, также параллельны. Пусть слѣдъ $\alpha\beta$ параллеленъ pq и $\beta\gamma$ параллеленъ qr, тогда $\alpha\beta\gamma$ параллельна pqr, на основаніи теоремы: „если двѣ пересѣкающіяся прямыя, лежащія въ одной плоскости, соотвѣтственно параллельны двумъ пересѣкающимся

Черт.164.



прямымъ, лежащимъ въ другой плоскости, то и плоскости параллельны". Обратная теорема будетъ не всегда справедлива; она справедлива только въ томъ случаѣ, когда слѣды плоскостей наклонены къ оси xy; если же они параллельны xy, то обратная теорема не имѣетъ мѣста, потому что въ этомъ случаѣ и пересѣкающіяся плоскости имѣютъ слѣды, параллельные xy. Во всякомъ случаѣ мы всегда можемъ узнать, параллельны ли данныя плоскости $\alpha\beta\gamma\delta$ и prsq (черт.165). Для этого замѣнимъ вертикальную плоскость Q на Q_1 такъ, чтобы она стала профильною плоскостью; тогда новая ось x_1y_1 будетъ перпендикулярна къ xy

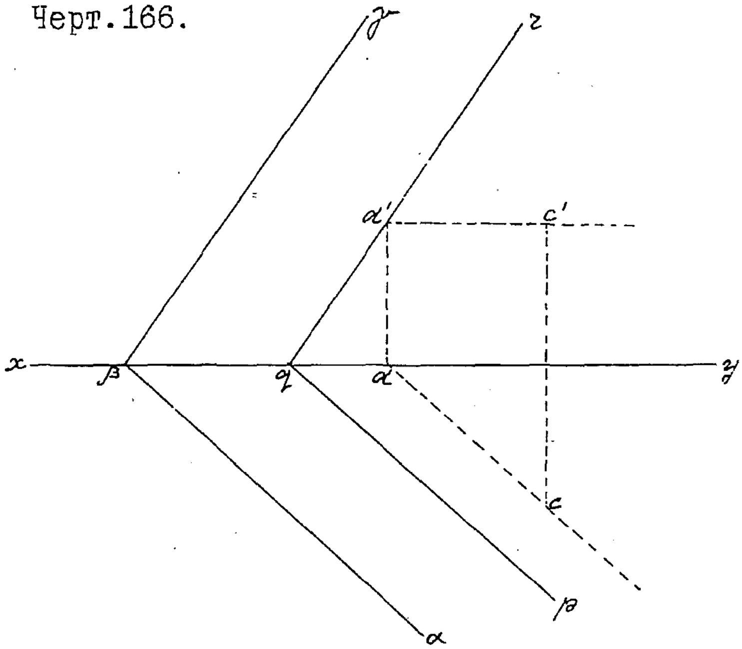
Черт.165.



Если новые вертикальные слѣды aa_0 и bb_0 окажутся параллельными, то данныя плоскости параллельны, въ противномъ случаѣ онѣ пересѣкаются.

З А Д А Ч А. Черезъ данную точку (c,c') **провести** плоскость, параллельную данной плоскости $\alpha\beta\gamma$ (черт.166).

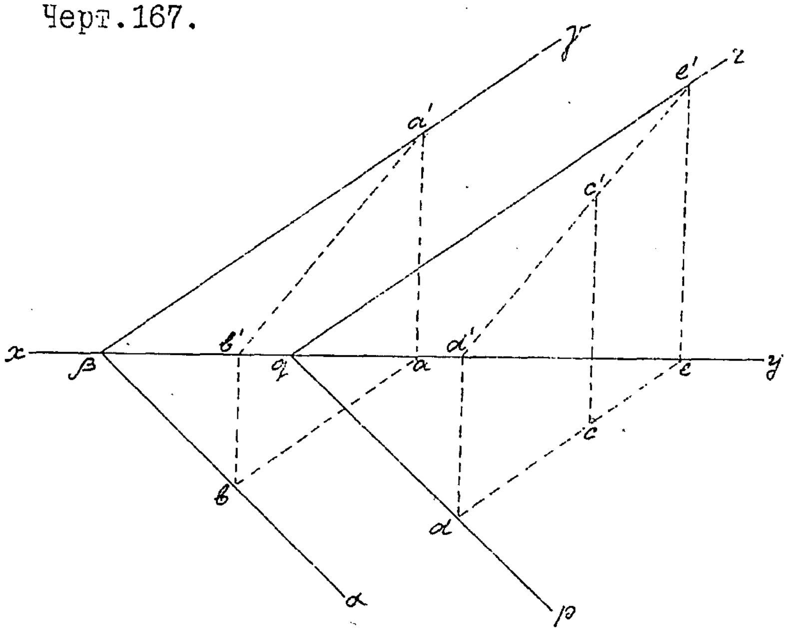
Черт.166.



Для рѣшенія задачи проводимъ черезъ точку (c,c') прямую (dc,d'c'), параллельную горизонтальному слѣду $\alpha\beta$ данной плоскости; вертикальная проекція c'd' такой прямой параллельна оси xy, а горизонтальная dc - параллельна $\alpha\beta$. Построенная прямая будетъ лежать въ искомой плоскости и потому вертикальный слѣдъ ея (d,d') будетъ лежать на вертикальномъ слѣдѣ искомой плоскости; проведя черезъ d' параллель $\beta\gamma$, получимъ вертикальный слѣдъ qr, а проведя черезъ q параллель $\alpha\beta$, получимъ горизонтальный слѣдъ искомой плоскости.

Эту задачу можно рѣшить иначе (черт.167). Для этого на данной плоскости $\alpha\beta\gamma$ беремъ какую-нибудь прямую(ab, a'b'') и черезъ данную точку (c,c') проведемъ ей параллельную прямую (de, d'e'), которая будетъ принадлежать искомой плоскости, и потому слѣды ея будутъ лежать на слѣдахъ этой

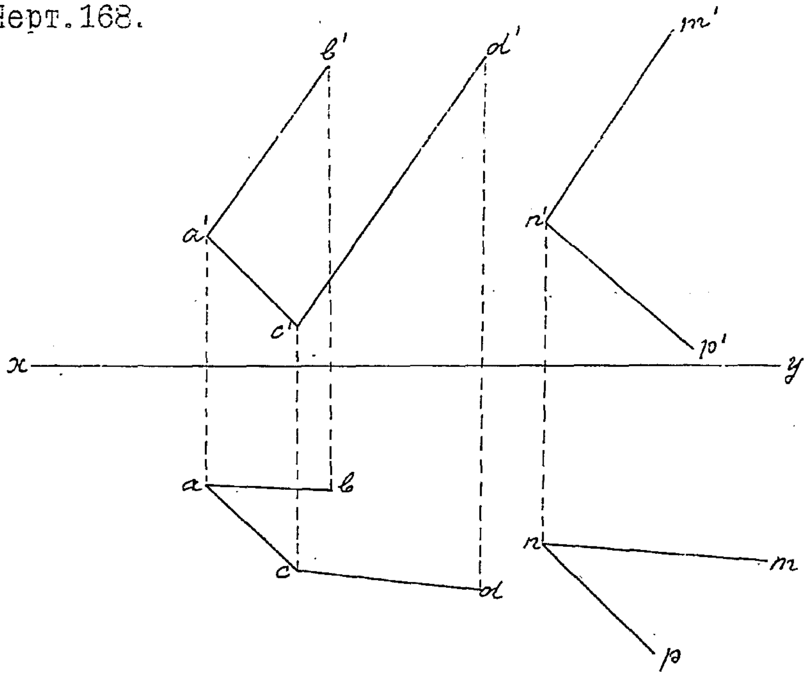
Черт.167.



плоскости. Проведя через точки d и e' параллели слѣдамъ данной плоскости, получимъ слѣды искомой плоскости pqr, которые при вѣрномъ построенiи пересѣкутся съ осью xy въ данной точкѣ.

Положимъ еще, что плоскость дана двумя параллельными прямыми (ab, a'b') и (cd, c'd') (черт.168); требуется черезъ точку(n,n') провести плоскость, ей параллельную, не находя слѣдовъ плоскости.

Черт.168.

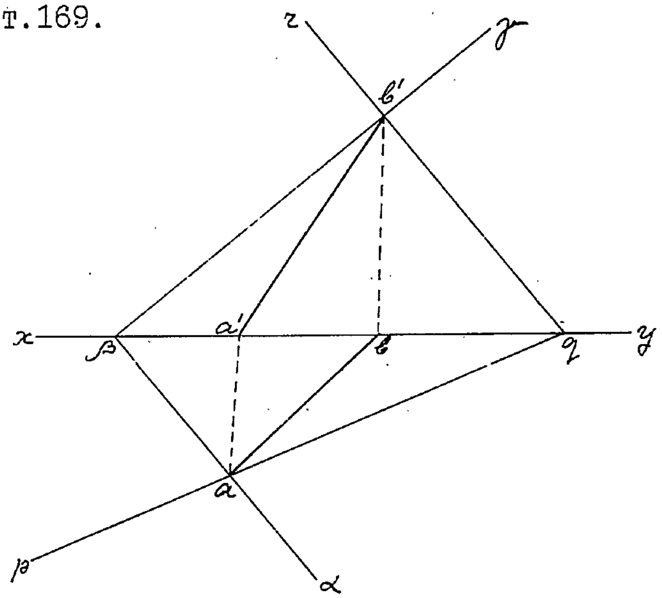


Для этого черезъ данную точку (n,n') проводимъ двѣ прямыя, соотвѣтственно параллельныя прямымъ, лежащимъ въ данной плоскости, тогда плоскость, ими опредѣляемая, и будетъ искомою. Мы черезъ точку (n,n') провели прямую (np, n'p') паралл. (ac, a'c') и прямую (mn, m'n') паралл. (ab, a'b'); плоскость (mnp, m'n'p') будетъ искомой.

О ПЕРЕСѢЧЕНІИ ПЛОСКОСТЕЙ.

Плоскости $\alpha\beta\gamma$ и pqr (черт.169) даны слѣдами; требуется построить проекціи линій ихъ сѣченія. Для этого найдемъ какія-ниб. двѣ общія обѣимъ плоскостямъ точки; такими точками будутъ служить точки встрѣчи слѣдовъ, т.е. точки a и b', а потому и линія сѣченія должна проходить черезъ эти точки.

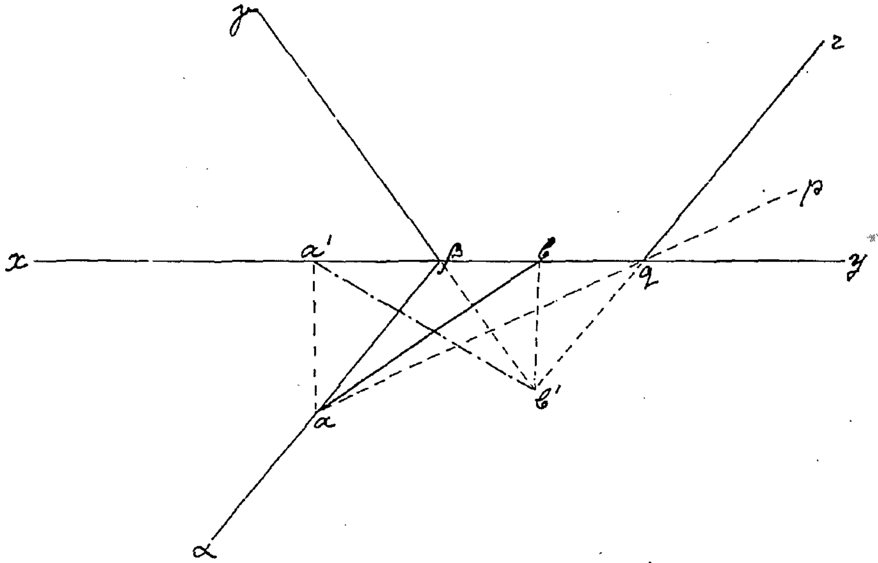
Черт.169.



Построивъ проекціи b и a' этихъ точекъ и соединивъ b' съ a' и b съ a, получимъ искомыя проекціи линіи сѣченія. Какое бы положеніе данныя плоскости ни имѣли, всегда можно построить проекціи линіи ихъ пересѣченія.

Возьмемъ плоскости $\alpha\beta\gamma$ и pqr (черт.170) такъ, что часть $\alpha\beta\gamma$ лежитъ въ I четверти, а часть pqr - во второй,

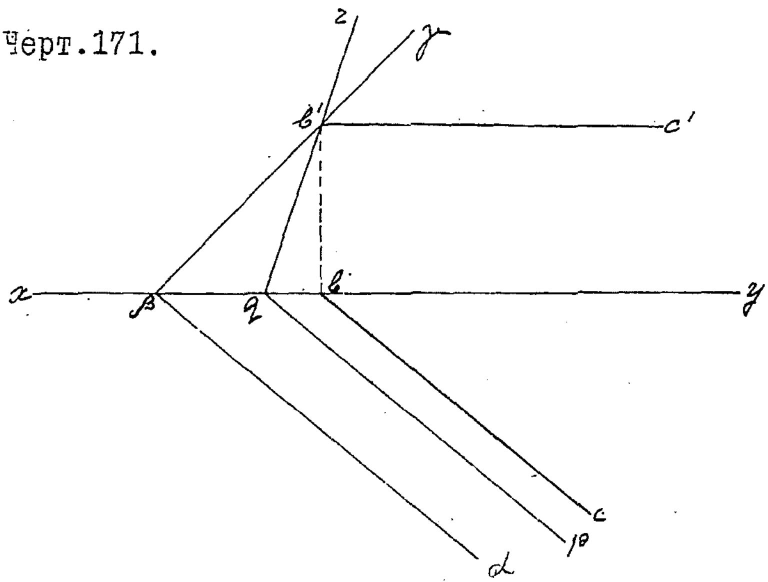
Черт.170.



и построимъ линію ихъ сѣченія. Продолжаемъ вертикальный слѣдъ $\beta\gamma$ до встрѣчи съ продолженіемъ вертикальнаго слѣда qr въ точкѣ ъ' и горизонтальный pq – до встрѣчи съ $\alpha\beta$ въ точкѣ a. По вертикальной проекціи ъ' вертикальнаго слѣда линіи сѣченія находимъ его горизонтальную проекцію ъ, соединивъ которую съ a, получимъ горизонтальную проекцію линіи сѣченія; соединивъ же a' съ ъ', получимъ ея вертикальную проекцію, которая будетъ лежать на нижней вертикальной плоскости проекцій и потому будетъ невидима.

Положимъ, еще требуется найти проекціи линіи сѣченія плоскостей, горизонтальные слѣды которыхъ параллельны, а вертикальные не параллельны, какъ у пло-

Черт.171.

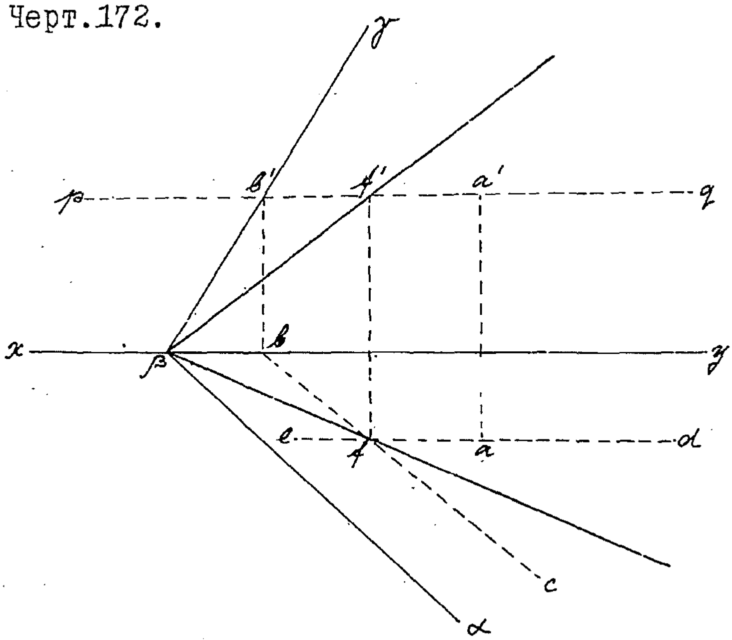


скостей $\alpha\beta\gamma$ и pqr (черт.171).

Точка (b,b'), т.е. точка пересѣченія вертикальныхъ слѣдовъ плоскостей, будетъ принадлежать линіи сѣченія плоскостей - линіи, которая будетъ параллельна $\alpha\beta$ и pq, какъ прямыя сѣченія плоскостей, проходящихъ черезъ параллельныя прямыя $\alpha\beta$ и pq. Поэтому, проведя черезъ b прямую bc, параллельную $\alpha\beta$ или pq, получимъ горизонтальную проекцію линіи сѣченія данныхъ плоскостей, а проведя черезъ b' прямую b'c', параллельную оси xy, получимъ вертикальную проекцію. (Эта прямая сѣченія будетъ общей горизонталью данныхъ плоскостей.)

З А Д А Ч А. Построить линію сѣченія плоскости $\alpha\beta\gamma$ съ осевой плоскостью, опредѣляемой точкой (a,a')(черт.172).

Черт.172.

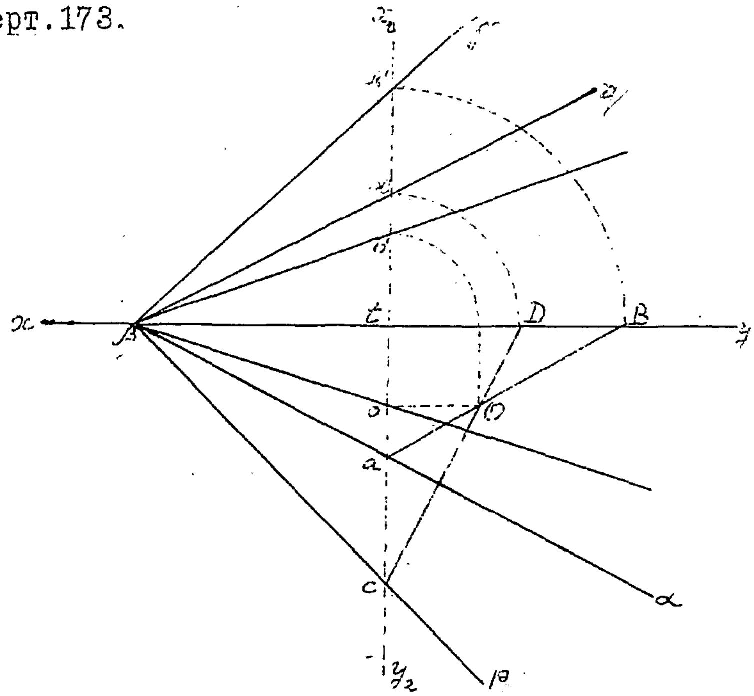


Такъ какъ вторая плоскость проходитъ черезъ ось, то она содержитъ точку β, слѣдовательно у насъ есть уже одна общая точка, принадлежащая обѣимъ плоскостямъ. Для построенія другой точки проводимъ вспомогательную плоскость, которой вообще можно давать какое угодно положеніе; мы проведемъ ее черезъ точку (a,a') параллельно горизонтальной плоскости проекцій; вертикальный слѣдъ ея pq пройдетъ черезъ точку a' и будетъ параллеленъ xy. Найдемъ сѣченіе этой плоскости съ каждой изъ данныхъ плоскостей. Сѣченіе съ $\alpha\beta\gamma$ дастъ прямую, параллельную $\alpha\beta$ и проходящую черезъ точку(ъ,ъ'); горизонтальная проекція этой прямой ъс параллельна $\alpha\beta$, а вертикальная совпадетъ съ pq. Построимъ сѣченіе вспомогательной плоскости со второй изъ данныхъ плоскостей. Такъ какъ эти плоскости параллельны xy, то и линія ихъ сѣченія параллельна xy; но эти плоскости имѣютъ общую точку(a,a'), а потому линія ихъ сѣченія пройдетъ черезъ эту точку параллельно xy; горизонтальная проекція этой линіи есть ed, а вертикальная совпадетъ съ pq. Построенныя прямыя пересѣкутся въ точкѣ (f,f'), которая принадлежитъ линіи сѣченія двухъ данныхъ плоскостей, и потому, соединивъ β съ f и f', получимъ проекціи (βf, β f') искомаго сѣченія.

З А Д А Ч А. Построить проекціи линіи сѣченія данныхъ плоскостей $\alpha\beta\gamma$ и pβq, слѣды которыхъ съ осью проекцій xy пересѣкаются въ одной точкѣ (черт.173).

Изъ расположенія данныхъ плоскостей видно, что онѣ имѣютъ общую точку β , а потому эта точка принадлежитъ линіи ихъ сѣченія. Для построенія другой точки, принадлежащей искомой прямой, измѣнимъ вертикальную плоскость проекцій Q на Q_1 такимъ образомъ, чтобы новая ось x_2y_2 стала перпендикулярна къ xy; тогда вертикальные слѣды данныхъ плоскостей измѣнятся и на новой вертикальной плоскости вы-

Черт.173.

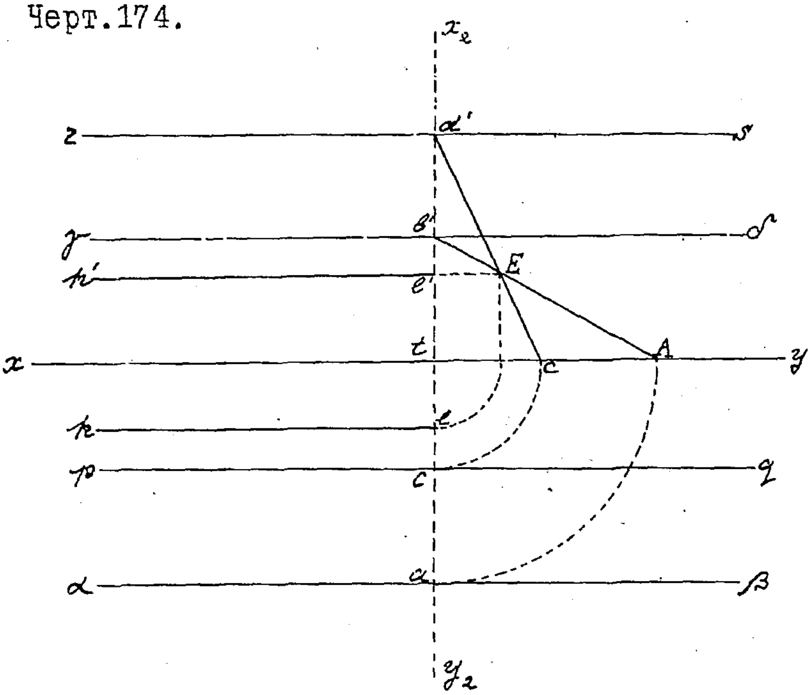


разятся прямыми cD и aB, причемъ tB = = tb', a tD = td'. Новые вертикальные слѣды пересѣкаются въ точкѣ O, которая будетъ принадлежать линіи сѣченія данныхъ плоскостей. Горизонтальная проекція точки O есть o, а проектирующая Oc опредѣлитъ разстояніе точки O до горизонтальной плоскости; отложивъ длину to' = oO, получимъ o' - вертикальную проекцію точки O относительно данной системы плоскости проекцій. Соединяя β съ o и o', найдемъ проекціи (βo, βo') линіи сѣченія данныхъ плоскостей.

З А Д А Ч А. Построить проекціи линіи сѣченія плоскостей αβγδ и pqrs, параллельныхъ оси xy (черт.174).

Изъ геометріи извѣстно, что пересѣкающіяся плоскости, будучи параллельны какой-нибудь прямой, даютъ линію сѣченія, параллельную этой прямой. Изъ этого вытекаетъ, что линія сѣченія данныхъ плоскостей параллельна xy, и потому для построенія ея проекцій достаточно найти на каждой изъ нихъ по одной точкѣ; чтобы получить эти точки, измѣнимъ

Черт.174.

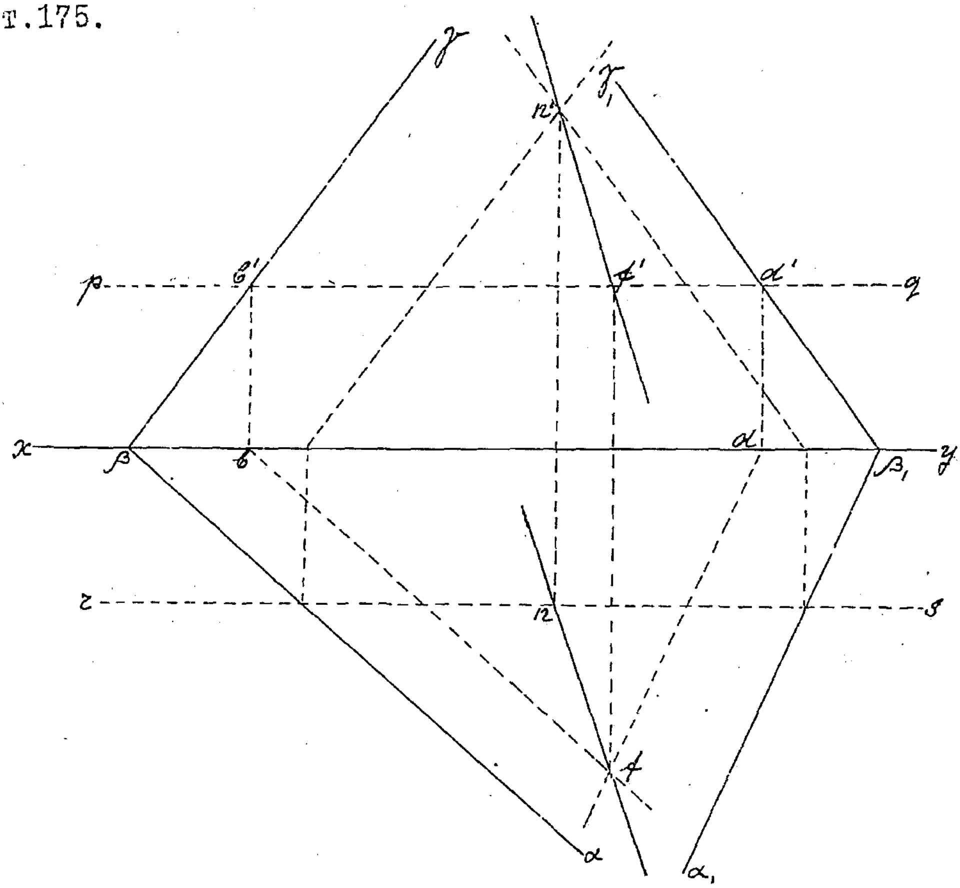


горизонтальную плоскость P на P_1 такъ, чтобы новая ось x_2y_2 стала перпендикулярна къ xy. Построивъ слѣды на новой плоскости, получимъ прямыя d'c и b'A, пересѣченіе которыхъ дастъ точку E - принадлежащую линіи сѣченія. Имѣя точку E, легко построить проекціи e и e' этой точки относительно данныхъ плоскостей, а проведя черезъ нихъ прямыя he и h'e' параллельно xy, построимъ проекціи искомой линіи сѣченія данныхъ плоскостей.

З А Д А Ч А. Построить линіи сѣченія плоскостей $\alpha\beta\gamma$ и $\alpha_1\beta_1\gamma_1$, слѣды которыхъ не пересѣкаются въ предѣлахъ чертежа (черт.175).

Чтобы получить точку, принадлежащую искомой прямой, проведемъ вспомогательную плоскость pq, параллельную горизонтальной плоскости проекцій, и найдемъ сѣченіе ея съ каждой изъ данныхъ плоскостей. Сѣченіе ея съ плоскостью $\alpha\beta\gamma$ дастъ прямую (bf, b'f'), параллельную $\alpha\beta$; сѣченіе съ плоскостью $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ дастъ прямую (df, d'f'), параллельную $\alpha_1\beta_1$.

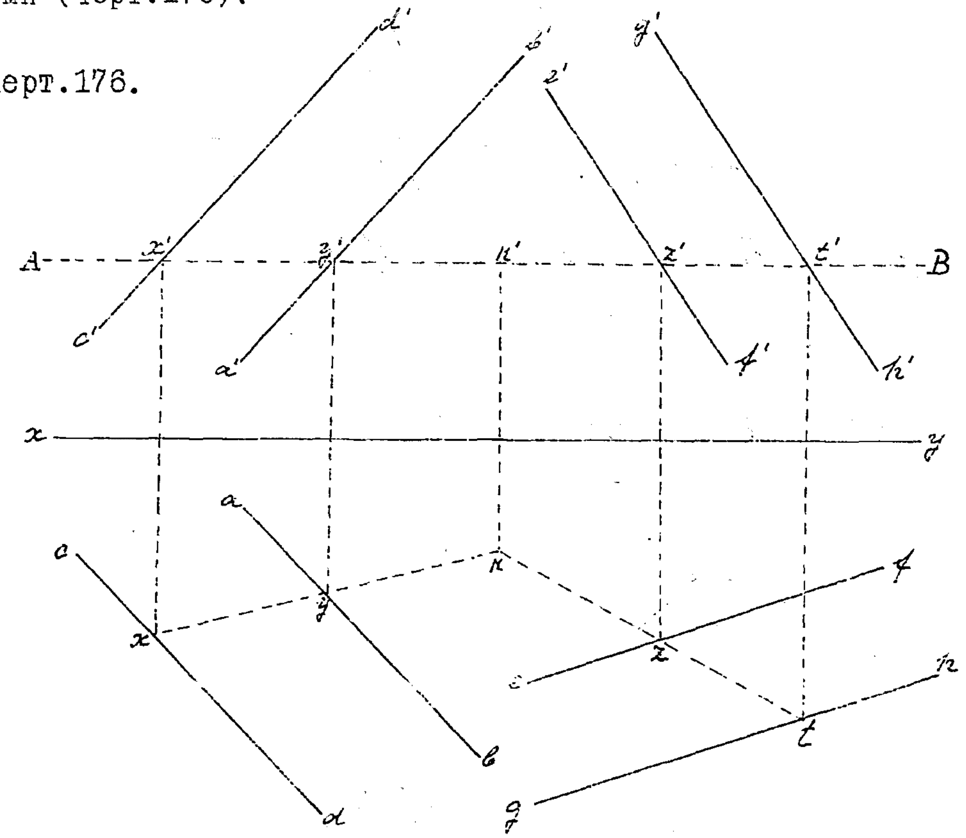
Черт.175.



Точка встрѣчи построенныхъ горизонтальныхъ проекцій, т. е. точка f будетъ принадлежать горизонтальной проекціи искомой прямой. По горизонтальной проекціи f находимъ вертикальную — f'. Подобнымъ образомъ можно построить еще одну точку(n,n'), принадлежащую искомой прямой. Для этого проводимъ новую вертикальную плоскость rs, параллельную вертикальной плоскости проекцій. Построивъ линіи сѣченія этой плоскости съ данными плоскостями, получимъ прямыя, пересѣченіе которыхъ дастъ точку (n,n'). Соединивъ полученныя точки (n,n') и (f,f'), найдемъ проекціи (nf, n'f') искомаго сѣченія.

З А Д А Ч А. Построить проекціи сѣченія двухъ плоскостей, изъ которыхъ каждая дана двумя параллельными прямыми (черт.176).

Черт.176.



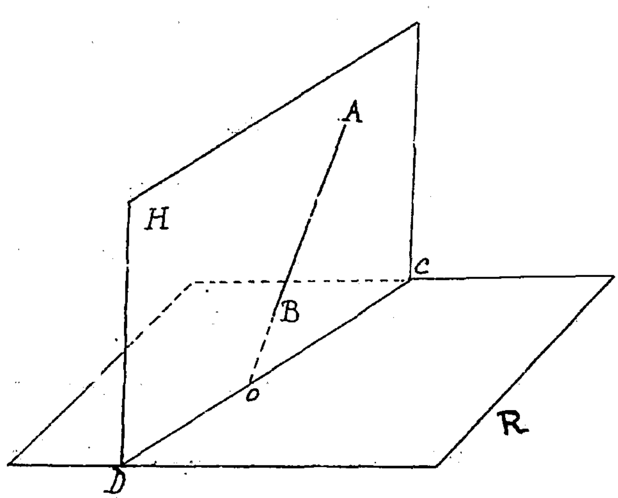
Положимъ, что даны плоскости: одна двумя параллельными прямыми (ab, a'b') и (cd, c'd'), а другая - (ef, e'f') и (gh, g'h').

Для рѣшенія задачи проведемъ вспомогательную плоскость, параллельную, положимъ, горизонтальной плоскости проекцій; ея вертикальный слѣдъ будетъ AB. Найдемъ точки встрѣчи данныхъ прямыхъ съ этой плоскостью. Прямая(ab,a'b') встрѣчаетъ эту плоскость въ точкѣ (y,y'), при чемъ вертикальная ея проекція y' лежитъ на вертикальномъ слѣдѣ плоскости AB, а горизонтальная проекція y - на горизонтальной проекціи ab. Прямая (cd, c'd') пересѣкаетъ плоскость AB въ точкѣ (x,x'). Такъ же найдемъ точку встрѣчи прямой (gh, g'h') съ плоскостью AB, т.е. точку (t,t'), и прямой (ef, e'f') - точку (z,z'). Соединивъ точки (x,x') съ (y,y') и (t,t') съ (z,z'), получимъ прямую (xy, x'y'), лежащую въ первой плоскости, и прямую (tz, t'z'), лежащую во второй плоскости. Точка (k,k') пересѣченія этихъ прямыхъ принадлежитъ обѣимъ плоскостямъ и слѣдовательно принадлежитъ линіи ихъ сѣченія. Такимъ же образомъ можно отыскать другую точку искомой прямой, проведя плоскость параллельно вертикальной или горизонтальной плоскости проекцій, соединивъ которую съ точкой (k,k'), получимъ проекціи искомой линіи сѣченія.

ПЕРЕСѢЧЕНІЕ ПРЯМОЙ СЪ ПЛОСКОСТЬЮ.

Положимъ, нужно построить точку встрѣчи прямой AB, лежащей въ пространствѣ, съ плоскостью R (черт.177); для этого черезъ прямую AB проводимъ какую-нибудь плоскость H

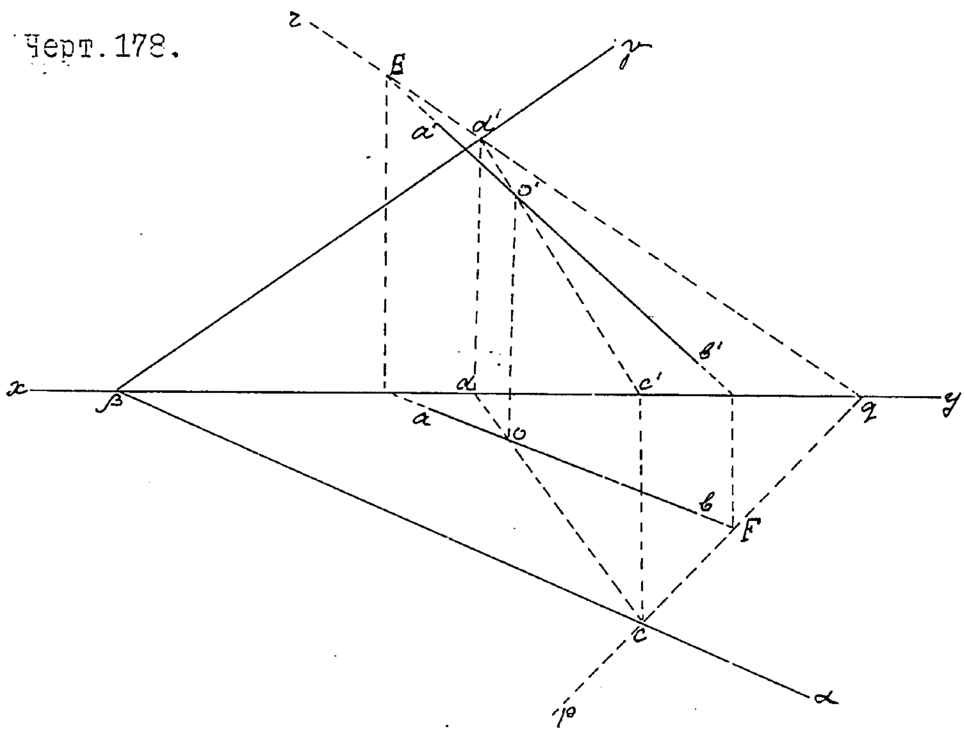
Черт.177.



и строимъ ея сѣченіе съ плоскостью R, т.е. прямую CD. Точка встрѣчи прямой CD и данной прямой AB, т.е точка O - и будетъ искомой точкой. Это - общій пріемъ построенія точки встрѣчи прямой съ плоскостью. Если бы оказалось, что AB паралл. CD, то AB была бы параллельна плоскости R и потому не пересѣкла бы ее, или, какъ говорятъ, пересѣкла бы в безконечности. Параллельность АВ и CD служитъ признакомъ параллельности прямой линiи съ плоскостью.

Рѣшимъ этотъ вопросъ въ проекцiяхъ. Пусть проекцiи данной прямой будутъ (ab, a'b'), а слѣды плоскости -$\alpha\beta\gamma$ (черт.178). Для построенiя искомой точки встрѣчи, проведемъ

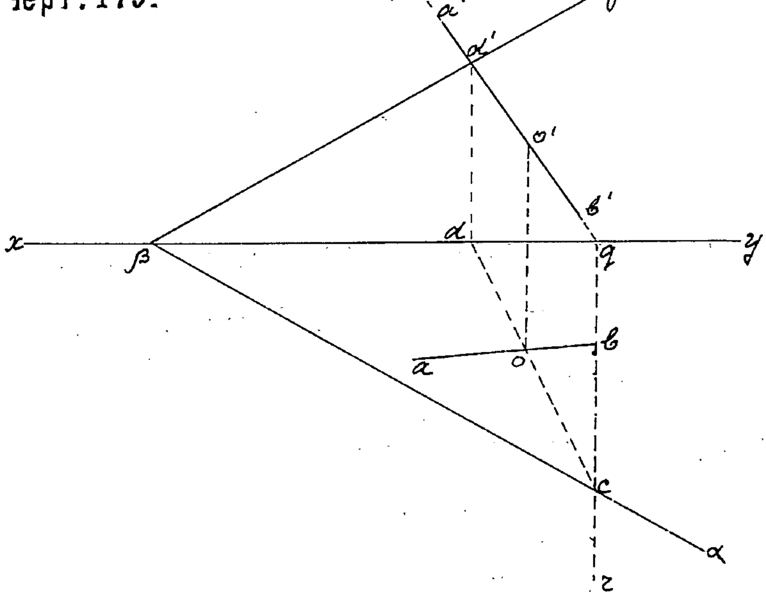
Черт.178.



черезъ данную прямую вспомогательную плоскость, соотвѣтствующую H въ предыдущемъ случаѣ. Для этого строимъ слѣды прямой (ab, a'b'), т.е. точки E и F, и соединяемъ ихъ съ произвольной точкой q, взятой на оси проекцiй; тогда прямыя pq и qr будутъ служить слѣдами плоскости, проходящей черезъ данную прямую. Строимъ линiю сѣченiя (dc, d'c')этой плоскости съ данной $\alpha\beta\gamma$. Линiя (dc, d'c') соотвѣтотвуетъ линіи CD на чертежѣ 177. Пересѣченіе полученной прямой съ данной опредѣляетъ точку (o,o'), которая и будетъ искомой. Опредѣливъ эту точку, мы можемъ сказать, что часть данной линіи, заключенная между точками (a,a') и (o,o'), находится надъ плоскостью $\alpha\beta\gamma$, а продолженіе ея - подъ той же плоскостью. Если построеніе вѣрно, то проекціи точки (o,o') расположатся на одномъ перпендикулярѣ къ оси xy.

Въ разсмотрѣнномъ примѣрѣ построенія точки встрѣчи прямой съ плоскостью мы черезъ данную прямую проводили произвольную плоскость, но построеніе будетъ проще, если проведемъ одну изъ проектирующихъ плоскостей нашей прямой. Положимъ, что для построенія точки встрѣчи прямой (ab,a'b') съ плоскостью $\alpha\beta\gamma$ (черт.179) мы за вспомогательную плоскость приняли вертикально-проектирующую плоскость pqr данной прямой. Построивъ сѣченіе плоскостей $\alpha\beta\gamma$

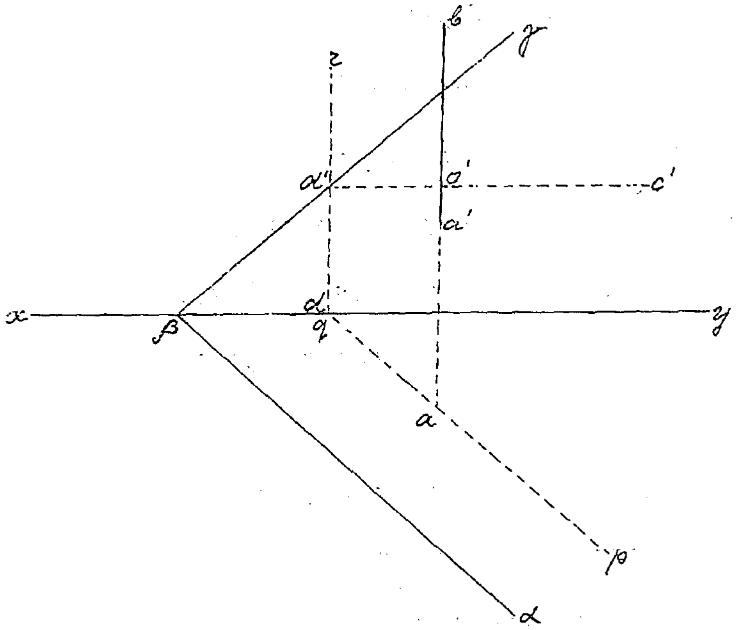
Черт.179.



и pqr, получимъ прямую (dc, d'q). Точка встрѣчи ея съ данной прямой, т.е. точка (o.o') будетъ искомой.

ТИПО-ЛИТ. Ю. ВЕНЕРЪ ПРЕЕМН. О. ФАЛЬКЪ.
Листъ 12-й

Черт.180.

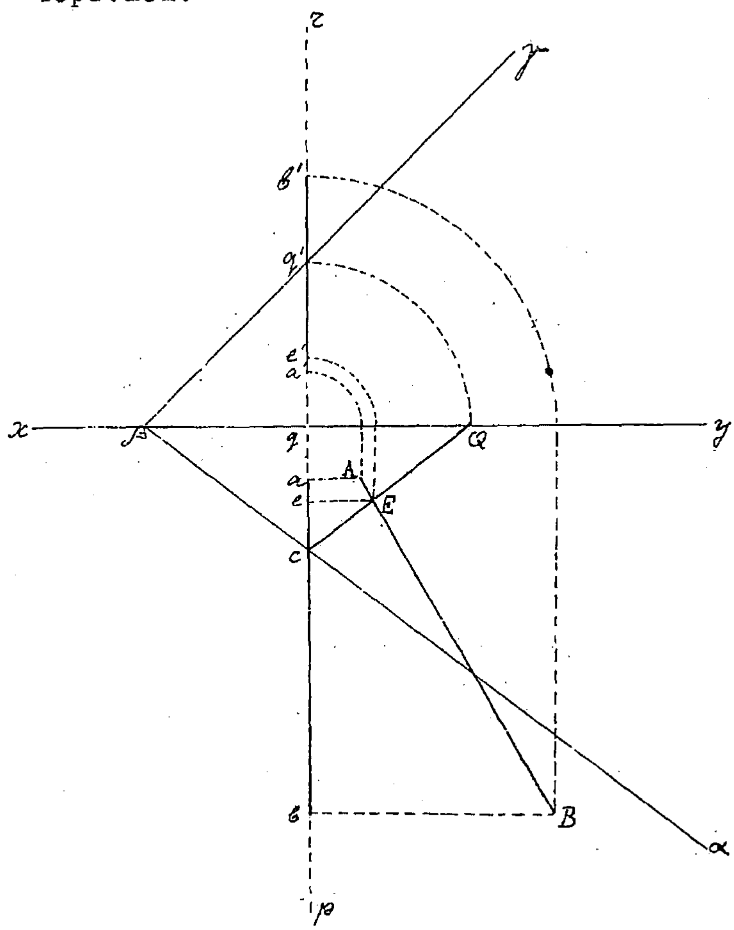


З А Д А Ч А. Построить точку встрѣчи прямой, перпендикулярной къ горизонтальной плоскости проекцій, съ плоскостью $\alpha\beta\gamma$ (черт.180). Для нахожденія искомой точки черезъ данную прямую (a, a'b') проводимъ плоскость pqr параллельно $\alpha\beta$ и находимъ ея сѣченіе съ плоскостью $\alpha\beta\gamma$, т. е. строимъ прямую (dp, d'c'). Точка встрѣчи этой прямой съ данной, т.е. точка (a, o') - искомая.

З А Д А Ч А. Построить точку встрѣчи прямой, лежащей въ профильной плоскости, съ данной плоскостью $\alpha\beta\gamma$ (черт.181).

При рѣшеніи этой задачи будемъ поступать по общему правилу, т.е. черезъ данную прямую (ab, a'b') проведемъ вспомогательную плоскость, въ данномъ случаѣ профильную, и построимъ сѣченіе ея съ плоскостью $\alpha\beta\gamma$ Линія сѣченія пройдетъ черезъ точки c и q'. Чтобы опредѣлить сѣченіе построенной прямой съ данной, совмѣстимъ профильную плоскость съ одной изъ плоскостей проекцій, положимъ съ горизонтальной, и найдемъ совмѣщеніе AB данной прямой и совмѣщеніе cQ -

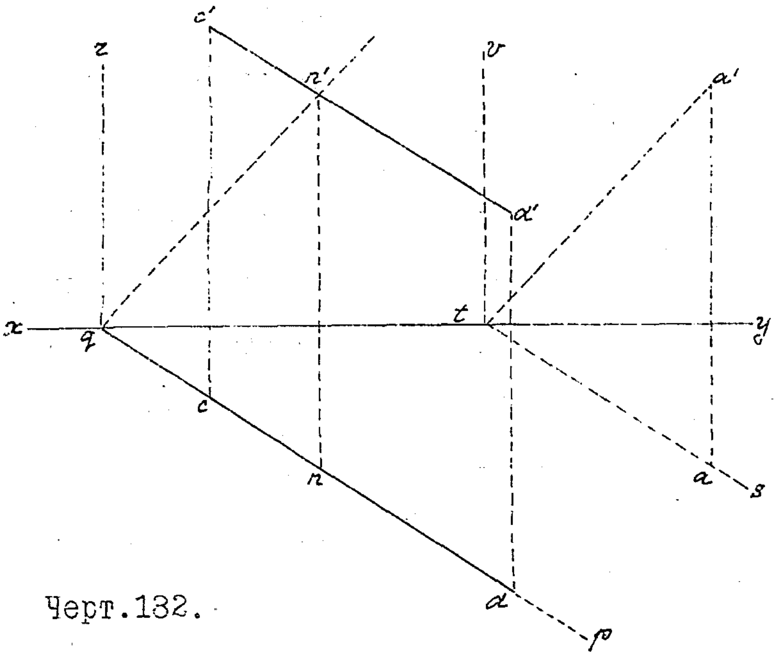
Черт.181.



линіи сѣченія. Пересѣченіе ихъ, т.е. точка E – есть искомая точка, но только въ совмѣщеніи на горизонтальной плоскости. По совмѣщенію точки E находимъ ея проекціи (e, e'), которыя и опредѣлятъ искомую точку.

З А Д А Ч А. Построить точку встрѣчи прямой (cd, c'd') съ осевой плоскостью, опредѣляемой точкой (a, a') (черт.182).

Для рѣшенія задачи проводимъ горизонтально-проектирующую плоскость pqr данной прямой и находимъ сѣченіе ея съ данной плоскостью. Точка q, принадлежащая той и другой плоскости, принадлежитъ линіи ихъ сѣченія; для отысканія другой точки, принадлежащей линіи сѣченія, проводимъ черезъ точку (a, a') вспомогательную плоскость stv, параллельную плоскости pqr; т.к. плоскости pqr и stv параллельны, то и линіи ихъ сѣченія съ осевой плоскостью будутъ параллельны;

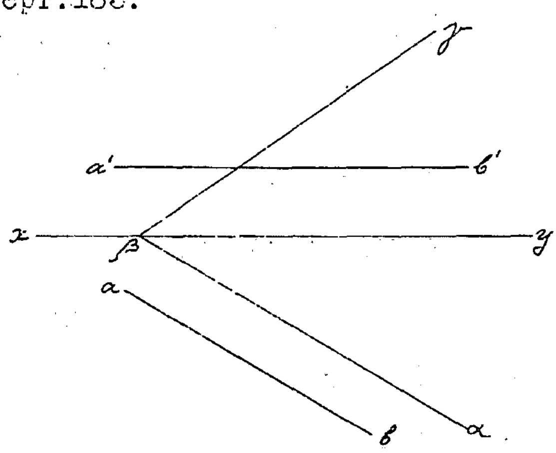


Черт.182.

но сѣченіе плоскости stv съ осевою есть прямая(at, a't), поэтому, проведя черезъ q прямую qn' параллельно ta', найдемъ сѣченіе плоскости pqr съ осевою, которая есть (qn, qn'); пересѣченіе построенной прямой съ данной, т.е. точка (n, n') есть искомая.

Построить точку встрѣчи прямой (ab, a'b') съ плоскостью $\alpha\beta\gamma$ (черт.183).

Черт.183.

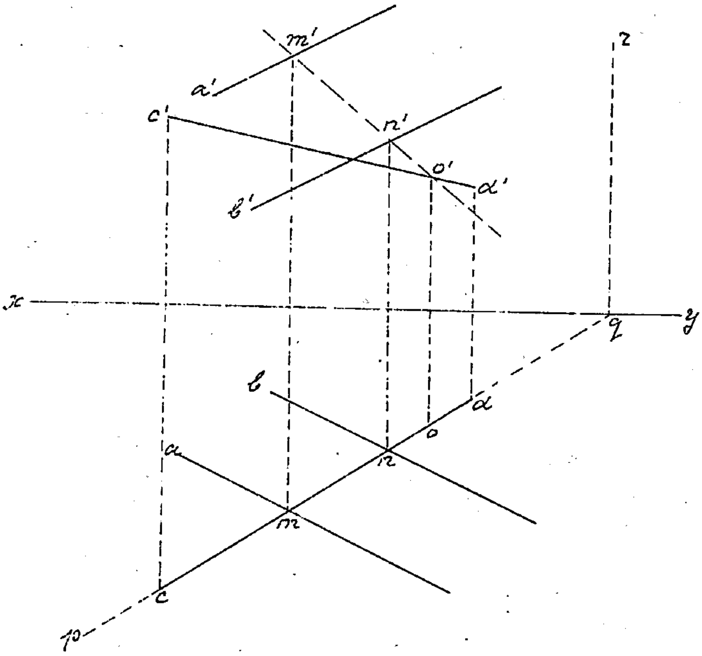


Изъ расположенія данныхъ видно, что прямая (ab, a'b') параллельна $\alpha\beta$, поэтому она параллельна и плоскости $\alpha\beta\gamma$ и слѣдовательно ее не пересѣкаетъ.

З А Д А Ч А. Построить точку встрѣчи прямой(cd, c'd') съ плоскостью, опредѣляемой двумя параллельными прямыми, не находя слѣдовъ плоскости (черт.184).

Для рѣшенія задачи проводимъ черезъ прямую (cd, c'd')

Черт.184.



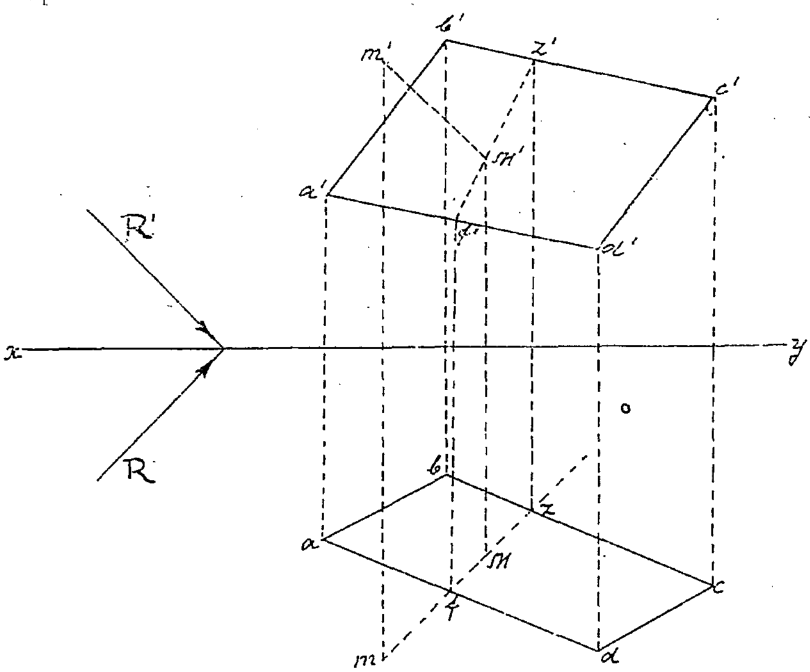
горизонтально-проектирующую плоскость pqr, которая пересѣчетъ прямыя (a,a') и (b,b') въ точкахъ (m,m') и (n,n'); слѣдовательно прямая, соединяющая построенныя точки, т.е. (mn, m'n'), есть линія сѣченія плоскостей: данной и pqr. Прямыя(cd,c'd') и (mn, m'n') лежатъ въ горизонтально-проектирующей плоскости прямой (a,a'); слѣдовательно онѣ могутъ пересѣкаться и точка ихъ пересѣченія будетъ искомой точкой (o,o').

Построеніе тѣни отъ матеріальной точки (m,m') на плоскости четыреугольника (abcd, a'b'c'd') (черт.185).

Для построенія искомой тѣни проводимъ черезъ данную точку (m,m') прямую (mM, m'M') параллельно направленію солнечнаго луча (R,R') и находимъ точку (M,M') ея встрѣчи съ плоскостью даннаго четыреугольника; эта послѣдняя и будетъ искомой тѣнью.

Если бы оказалось, что прямая (mM, m'M') параллельна прямой (fz, f'z'), по которой плоскость, горизонтально проектирующая лучъ (mM, m'M'), пересѣкаетъ плоскость даннаго четыреугольника, то проведенный лучъ (mM, m'M'), былъ бы

Черт.185.

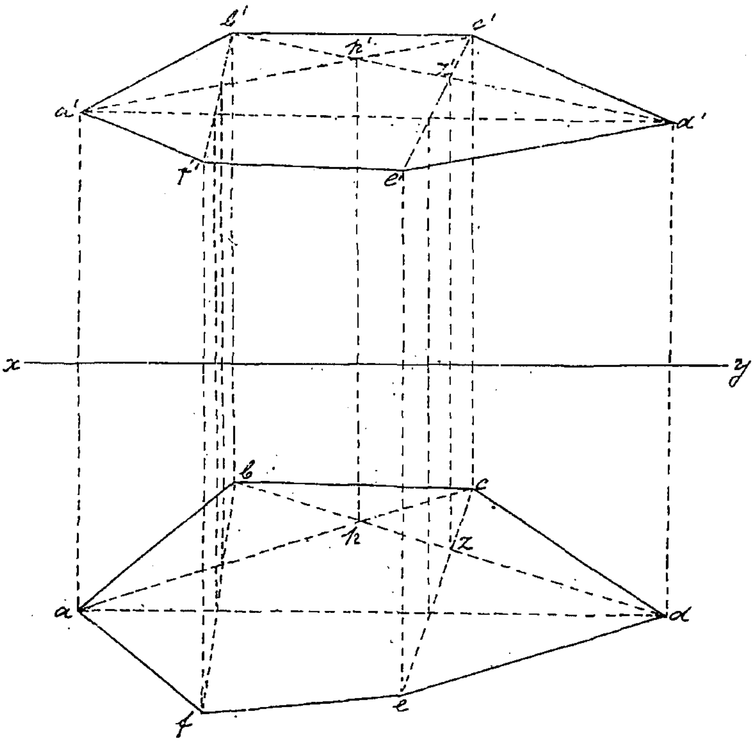


параллеленъ плоскости этого четыреугольника, и поэтому последнiй находился бы въ тѣни. Вообще плоскость фигуры бываетъ освѣщена только въ томъ случаѣ, когда лучи свѣта ее пересѣкаютъ.

При построенiи тѣни отъ плоскихъ фигуръ, строятъ тѣни отъ ихъ вершинъ и полученныя точки, если онѣ принадлежатъ одной плоскости проекцiй, соединяютъ прямыми линiями, которыя и ограничатъ падающую тѣнь на каждой изъ плоскостей проекцiй отъ плоскостей фигуры.

Чтобы задаться проекцiями плоской фигуры, необходимо прибѣгнуть къ одному изъ разсмотрѣнныхъ нами методовъ, но можно поступить и такъ: взять, напримѣръ, горизонтальную проекцiю фигуры произвольно, а на вертикальной плоскости проекцiй произвольно взять только проекцiи трехъ послѣдовательныхъ вершинъ и по этимъ даннымъ найти вертикальныя проекцiи остальныхъ вершинъ. Такъ, чтобы задаться проекцiями шестиугольника, беремъ за горизонтальную проекцiю

Черт.186.

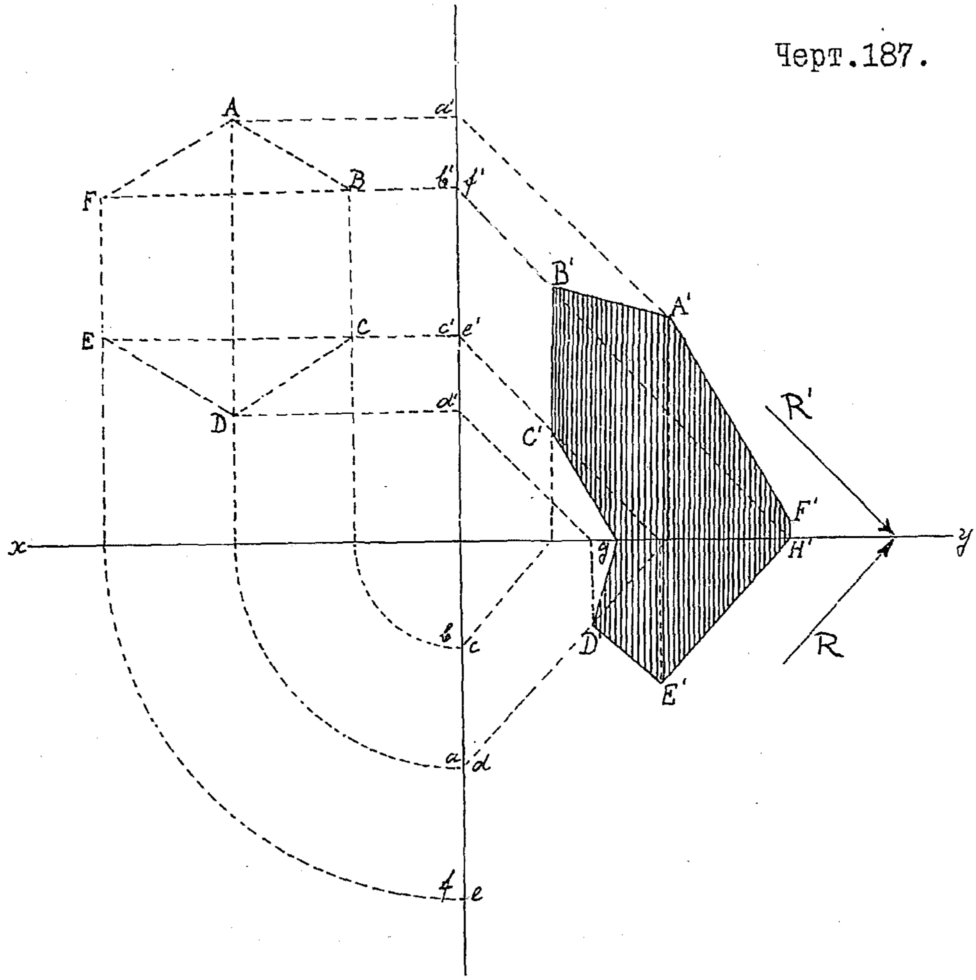


произвольный многоугольникъ abcdef (чертежъ 186) и a', b' и c' - за вертикальныя проекціи трехъ его вершинъ. Чтобы найти вертикальную проекцію d', соотвѣтствующую горизонтальной проекціи d, проводимъ діагонали a'c', ac и bd и точку h пересѣченія ac и bd проектируемъ въ h', которую соединяемъ съ b', и прямую b'h' продолжаемъ, на которой по горизонтальной проекціи d находимъ вертикальную d'. Подобно этому построимъ вертикальныя проекціи остальныхъ вершинъ.

З А Д А Ч А. Построить тѣнь отъ многоугольника, лежащаго въ профильной плоскости (черт.187).

Пусть этотъ многоугольникъ (правильный шестиугольникъ ABCDEF) данъ въ совмѣщенномъ положеніи съ вертикальною плоскостью. Его проекціи выразятся отрѣзками a'd' и be, а проекціи его вершинъ - точками (a,a'), (b,b'), (c,c') и т.д. Для построенія тѣни шестиугольника будемъ строить тѣни его сторонъ, а для построенія этихъ послѣднихъ - тѣни

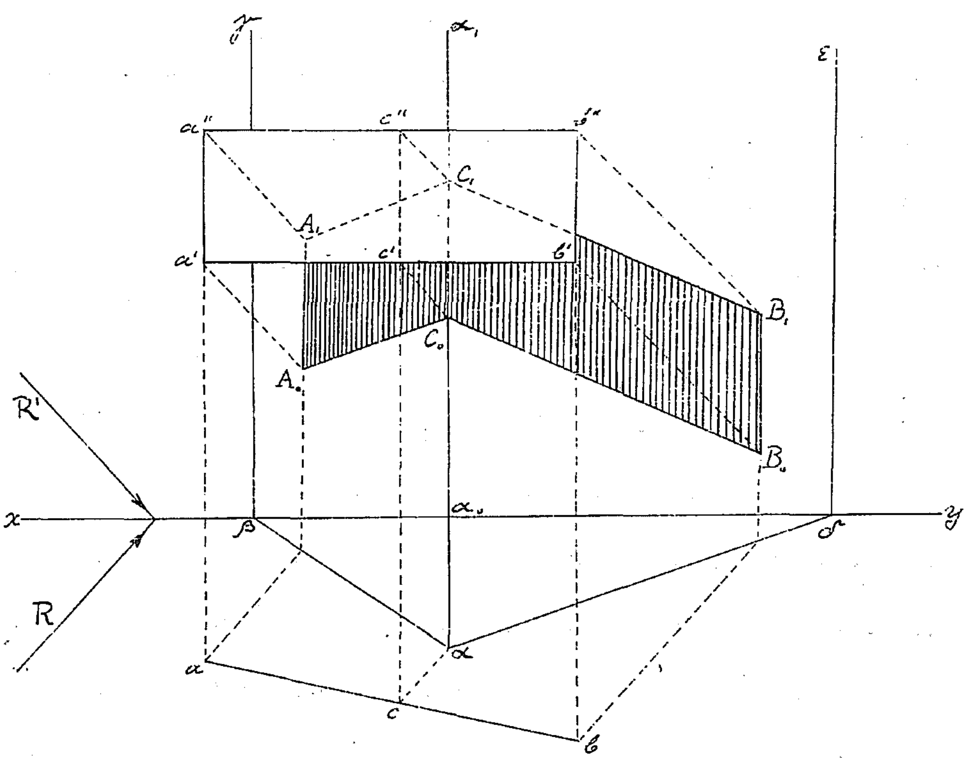
Черт.187.



отъ вершинъ шестиугольника. По изложеннымъ выше правиламъ мы строимъ точки A', B', C', D', E' и F' - падающія тѣни вершинъ шестиугольника. Тѣнью стороны (ab, a'b') будетъ прямая A'B', стороны (bc, b'c') - прямая B'C', перпендикулярная къ оси, такъ какъ (bc, b'c') перпендикулярна къ горизонтальной плоскости. Для построенія тѣни отъ стороны (cd, c'd'), лежащей на обѣихъ плоскостяхъ проекцій, строимъ сначала тѣнь отъ стороны (af, a'f'), параллельной (cd,c'd'). Эта тѣнь есть прямая F'A'. Такъ какъ тѣни отъ параллельныхъ прямыхъ на одной и той же плоскости параллельны между собою, то, проведя черезъ C' прямую, параллельную A'F', получимъ направленіе C'g тѣни отъ стороны (cd, c'd') на вертикальной плоскости; соединивъ точки g и D', найдемъ тѣнь отъ той же линіи на горизонтальной плоскости. Тѣнь прямой (de, d'e') есть прямая D'E'. Линія (ef, e'f') перпендикулярна къ горизонтальной плоскости, поэтому ея тѣнь на вертикальной плоскости перпендикулярна къ оси, а на горизонтальной - параллельна горизонтальной проекціи луча. Полученный многоугольникъ - D'g C'B'A'F'H'E' - выразитъ тѣнь, падающую отъ даннаго многоугольника на плоскостяхъ проекцій.

З А Д А Ч А. Построить тѣнь отъ прямоугольника (ab, a'a"b"b') на двухъ пересѣкающихся плоскостяхъ $\alpha\beta\gamma$ и $\alpha\delta\varepsilon$ (черт.188).

Черт.188.



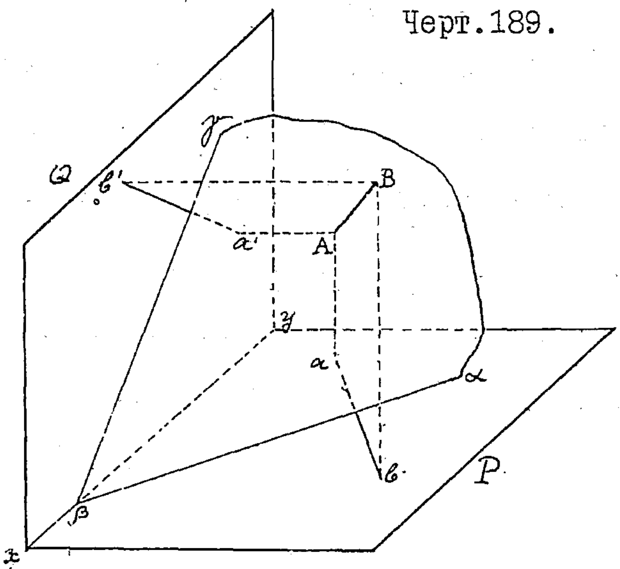
Для простоты положимъ, что плоскость прямоугольника (ab, a'a"b"b') перпендикулярна горизонтальной плоскости, а равно и пересѣкающіяся плоскости $\alpha\beta\gamma$ и $\alpha\delta\varepsilon$ перпендикулярны той же плоскости проекцій.

Для построенія искомой тѣни проводимъ черезъ вершины прямоугольника прямыя, параллельно направленію солнечнаго луча, и находимъ соотвѣтственно точки ихъ встрѣчи съ плоскостями $\alpha\beta\gamma$ и $\alpha\delta\varepsilon$, черезъ что получаемъ точки A_o, A_1, B_1 и B_o - тѣни отъ вершинъ (a, a'), (a, a''), (b, b'') и (b, b').

Чтобы получить тѣни отъ горизонтальныхъ сторонъ прямоугольника на каждой изъ данныхъ плоскостей, мы черезъ ребро $(\alpha, \alpha_o\alpha_1)$ проведемъ плоскость параллельно направленію солнечнаго луча и найдемъ прямую $(c, c'c'')$, по которой она пересѣкаетъ плоскость даннаго прямоугольника; тогда тѣнь отъ этой послѣдней будетъ (C_oC_1); соединивъ A_1 съ C_1, A_o съ C_o, получимъ прямыя A_1C_1 и A_oC_o - тѣни отъ горизонтальныхъ сторонъ прямоугольника на плоскости $\alpha\beta\gamma$; соединяя же C_1 съ B_1 и C_o съ B_o, получимъ прямыя C_1B_1 и C_oB_o - тѣни отъ тѣхъ же сторонъ на плоскости $\alpha\delta\varepsilon$.

О ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПРЯМОЙ СЪ ПЛОСКОСТЬЮ.

Условіе перпендикулярности линіи съ плоскостью выражается слѣдующей теоремой: „если прямая перпендикулярна къ плоскости, то ея проекціи перпендикулярны къ соотвѣтствующимъ слѣдамъ плоскости". Дано, что прямая AB (черт.189) перпендикулярна къ $\alpha\beta\gamma$; доказать, что ея горизонтальная проекція ab перпендикулярна къ $\alpha\beta$, а вертикальная - $a'b'$ перпенди-



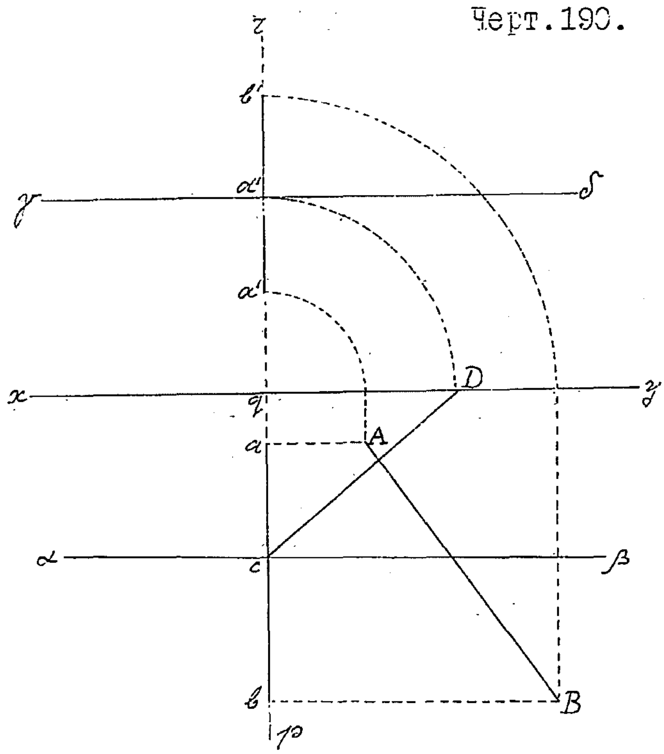
Черт.189.

кулярна $\beta\gamma$. Для доказательства замѣтимъ, что горизонтально-проектирующая плоскость AabB перпендикулярна къ P и въ то же время перпендикулярна къ данной плоскости $\alpha\beta\gamma$, потому что она проходитъ черезъ линію, перпендикулярную къ этой плоскости; но изъ геометріи извѣстно, что если плоскость перпендикулярна двумъ пересѣкающимся плоскостямъ, то она перпендикулярна и къ линіи ихъ пересѣченія, т.е. AabB перпендикулярна къ $\alpha\beta$, слѣдовательно $\alpha\beta$ перпендикул. ab. Подобнымъ же образомъ доказывается, что a'b' перпендикул. $\beta\gamma$.

Обратно: „если проекціи прямой перпендикулярны къ соотвѣтственнымъ слѣдамъ плоскости, то и прямая, лежащая въ пространствѣ, будетъ перпендикулярна къ этой плоскости". Дано, что ab перпендикул. $\alpha\beta$ и a'b' перпендикул. $\beta\gamma$; доказать, что AB перпендикулярна къ $\alpha\beta\gamma$. Для этого черезъ проекціи прямой проведемъ проектирующія плоскости aABb и a'ABb'. Каждая изъ этихъ плоскостей перпендикулярна къ $\alpha\beta\gamma$ на основаніи слѣдующей теоремы: „если двѣ плоскости (например Р и aABb) перпендикулярны и линія ($\alpha\beta$), лежащая въ одной изъ нихъ, перпендикулярна линіи ихъ сѣченія (ab), то она будетъ перпендикулярна къ другой плоскости". Такимъ образомъ (черт.189) aABb перпендикул. $\alpha\beta$, а a'ABb' перпендикул. $\beta\gamma$, а потому aABb перпендикулярна $\alpha\beta\gamma$ и a'ABb' перпендикулярна $\alpha\beta\gamma$. Отсюда слѣдуетъ, что линія сѣченія плоскостей - AB перпендикулярна $\alpha\beta\gamma$. Относительно обратной теоремы замѣтимъ, что она справедлива тогда, когда плоскость $\alpha\beta\gamma$ пересѣкаетъ ось xy, если же плоскость параллельна оси xy, то, хотя проекціи прямой будутъ перпендикулярны слѣдамъ плоскости, но прямая, ими опредѣляемая, можетъ быть и не перпендикулярна къ данной плоскости.

Положимъ, что дана плоскость $\alpha\beta\gamma\delta$, параллельная оси xy (черт.190), и прямая (ab, a'b'), лежащая въ профильной плоскости и потому перпендикулярная къ xy; въ этомъ

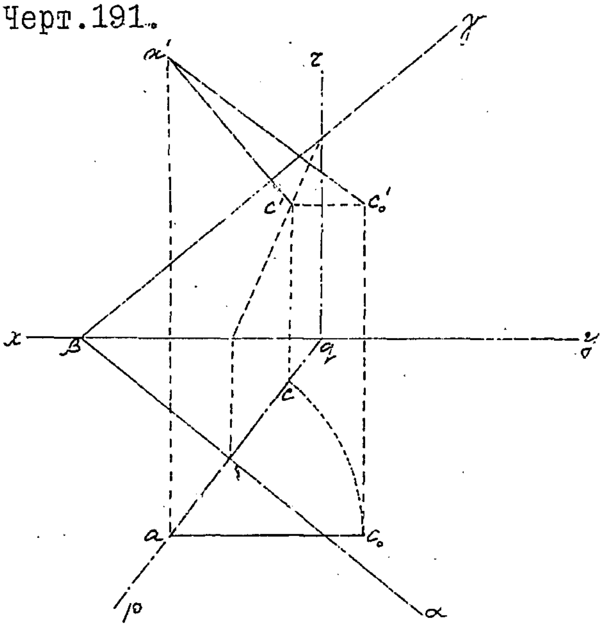
Черт.190.



случаѣ прямая можетъ быть и не перпендикулярна къ плоскости $\alpha\beta\gamma\delta$; чтобы изслѣдовать это, проведемъ черезъ прямую(ab, a'b') профильную плоскость и найдемъ ея сѣченіе съ данной плоскостью; далѣе совмѣстимъ профильную плоскость съ горизонтальной и найдемъ совмѣщеніе cD линіи сѣченія и совмѣщеніе AB - данной прямой; если окажется, что AB перпендикулярна cD, то прямая (ab, a'b') перпендикулярна къ $\alpha\beta\gamma\delta$, въ противномъ случаѣ наклонна къ $\alpha\beta\gamma\delta$.

З А Д А Ч А. Изъ данной точки (a, a') опустить перпендикуляръ на плоскость $\alpha\beta\gamma$ и найти его длину (черт.191).

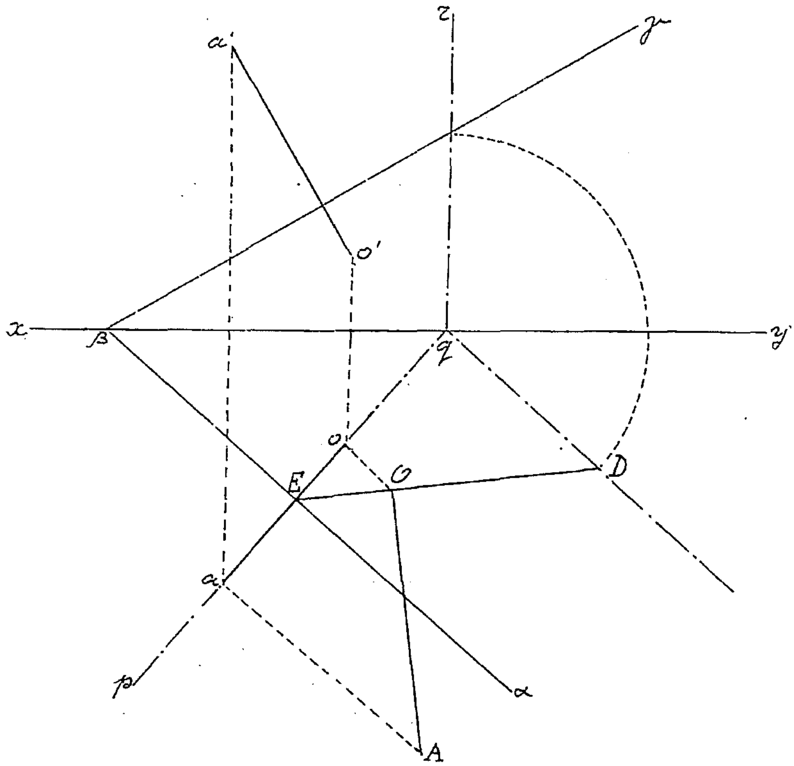
Черт.191.



Изъ условія перпендикулярности линіи къ плоскости слѣдуетъ, что проекціи искомаго перпендикуляра должны быть перпендикулярны къ соотвѣтствующимъ слѣдамъ плоскости; поэтому, если изъ a' опустимъ перпендикуляръ на $\beta\gamma$ и изъ a на $\alpha\beta$, то получимъ проекціи искомаго перпендикуляра. Для того, чтобы измѣрить длину перпендикуляра, мы должны найти его подошву, или точку встрѣчи съ плоскостью $\alpha\beta\gamma$. Сдѣлавъ построеніе для опредѣленія этой точки (c, c'), мы найдемъ, что (ac, a'c') суть проекціи искомаго перпендикуляра. Чтобы найти его длину, повернемъ прямую (ac, a'c') около оси, перпендикулярной къ горизонтальной плоскости и проходящей черезъ точку (a, a'), до положенія, параллельнаго вертикальной плоскости; прямая $a'c_0'$ будетъ искомой длиной.

Эту задачу можно рѣшить нѣсколько иначе, примѣняя методъ совмѣщенія. Пусть $\alpha\beta\gamma$ (черт.192) - данная плоскость, (a, a') - данная точка. Изъ этой точки опустимъ перпендикуляръ

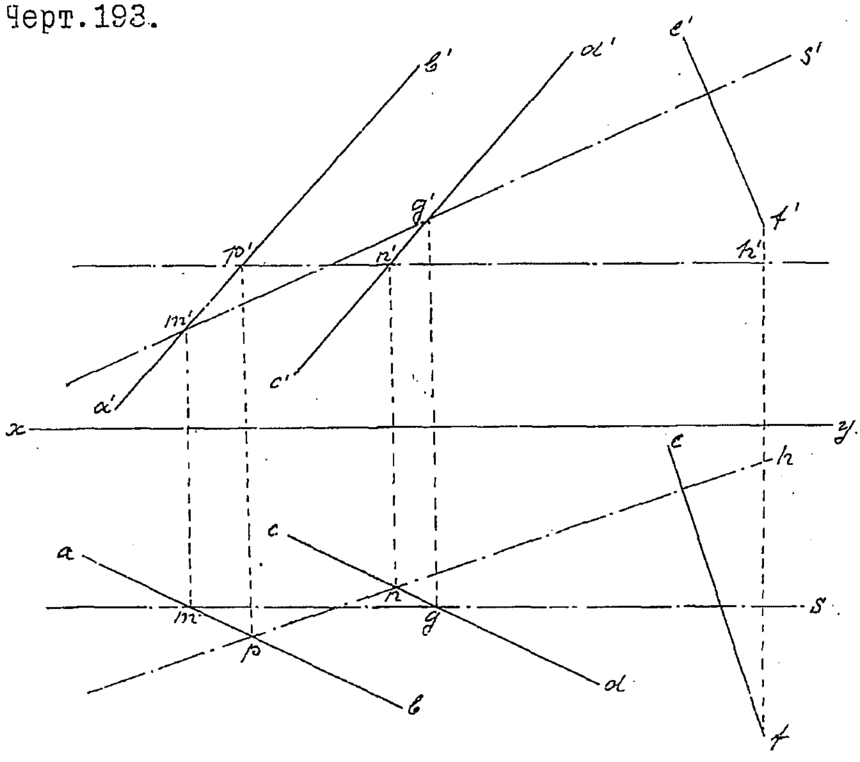
Черт.192.



на плоскость $\alpha\beta\gamma$; для этого изъ точекъ a и a' опускаемъ перпендикуляры на совмѣщенные слѣды данной плоскости. Затѣмъ черезъ проведенную прямую (ao, a'o') проводимъ плоскость горизонтально-проектирующую и совмѣстимъ ее съ горизонтальною плоскостью проекцій. Тогда линія DE выразитъ совмѣщенное положеніе линіи сѣченія плоскостей $\alpha\beta\gamma$ и pqr, а A - совмѣщеніе данной точки (a.a'). Опустивъ изъ A перпендикуляръ на DE, получимъ совмѣщенное положеніе искомаго перпендикуляра, по которому найдемъ его проекціи (ao, a'o').

Посмотримъ, какъ опустить перпендикуляръ на плоскость, данную не слѣдами, а другими условіями. Пусть плоскость дана параллельными прямыми (ab, a'b') и (cd, c'd') (черт.193); требуется изъ точки (f,f') опустить перпендикуляръ на эту плоскость, не находя ея слѣдовъ. Мы знаемъ, что если прямая перпендикулярна къ плоскости, то ея проекціи перпендикулярны къ

Черт.193.

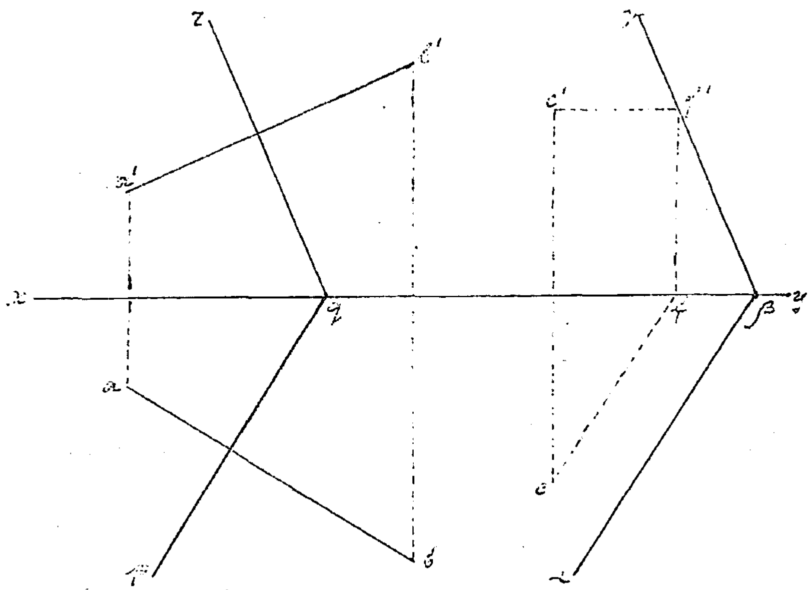


соотвѣтственнымъ слѣдамъ плоскости. Но такъ какъ слѣды не даны, то построимъ такія прямыя, которыя замѣнили бы слѣды плоскости. Такими прямыми будутъ горизонталь и фронталь данной плоскости. Построивъ по извѣстному правилу горизонталь (ph, p'h') и фронталь (ms, m's') данной плоскости и опустивъ изъ f перпендикуляръ fe на ph, а изъ f' - перпендикуляръ f'e' на m's', найдемъ проекціи искомаго перпендикуляра. Для нахожденія длины перпендикуляра нужно поступить согласно указаніямъ, сдѣланнымъ въ текстахъ чертежей 184 и 191.

З А Д А Ч А. Черезъ данную точку (c,c') провести плоскость, перпендикулярную данной прямой (ab, a'b')(черт.194).

Для рѣшенія задачи проведемъ вспомогательную плоскость, перпендикулярную къ данной прямой, для чего на оси беремъ произвольную точку q и опускаемъ изъ нея перпендикуляры на проекціи данной прямой, черезъ что получаемъ плоскость pqr, перпендикулярную прямой (ab, a'b'). Затѣмъ, по извѣстному уже

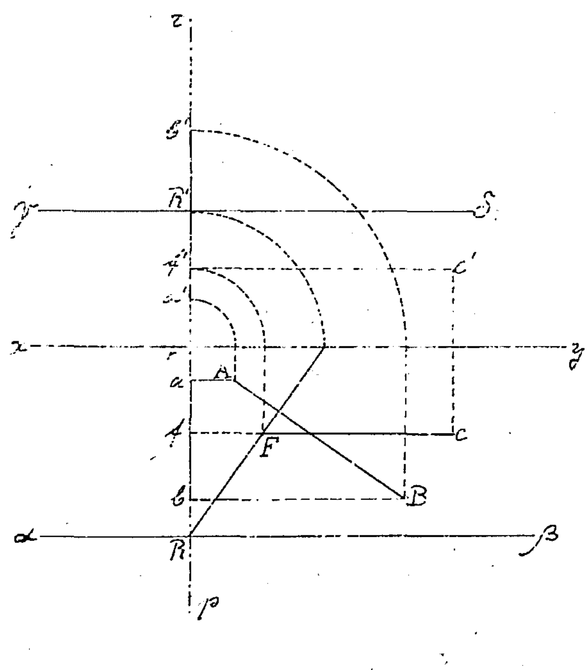
Черт.194.



правилу, черезъ данную точку (c, c′) проводимъ искомую плоскость $\alpha\beta\gamma$, параллельную плоскости pqr.

Рѣшимъ ту же задачу, полагая, что данная прямая находится въ профильной плоскости (черт.195). Искомая плоскость,

Черт.195.

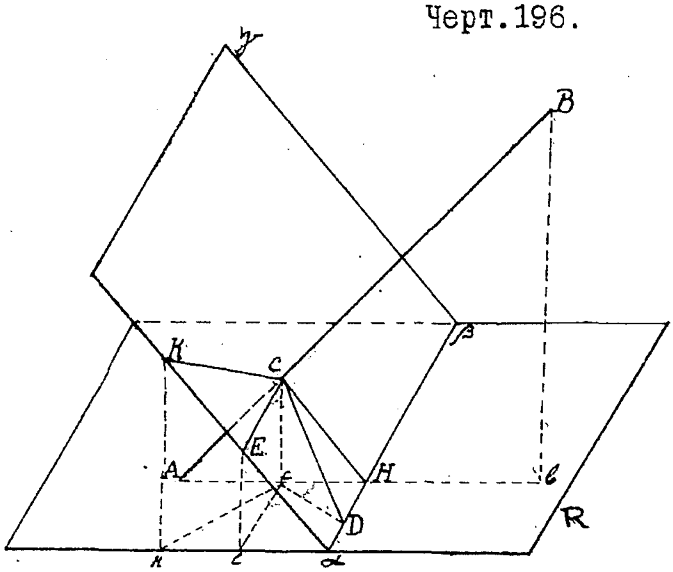


какъ перпендикулярная къ данной прямой, будетъ параллельна оси проекцій. Поэтому для построенія слѣдовъ искомой плоскости достаточно построить на нихъ по одной точкѣ. Для полученія этихъ точекъ проводимъ черезъ данную точку (c,c') прямую (cf, c'f') параллельно оси xy и находимъ точку встрѣчи ея (f, f') съ профильной плоскостью pqr, въ которой находится данная прямая $(ab,\ a'b')$; изъ точки (f, f') опустимъ перпендикуляръ на данную прямую $(ab,\ a'b')$, который будетъ принадлежать искомой плоскости, а потому слѣды его будутъ лежать на слѣдахъ плоскости. Построимъ этотъ перпендикуляръ: для этого плоскость pqr совмѣстимъ съ горизонтальной плоскостью проекцій и построимъ совмѣщенное положеніе AB данной прямой и F - совмѣщенное положеніе точки (f, f'). Изъ F опускаемъ перпендикуляръ FR на AB, который будетъ совмѣщеннымъ положеніемъ перпендикуляра, опущеннаго изъ (f, f') на $(ab,\ a'b')$. Находимъ слѣды этого перпендикуляра, для чего плоскость pqr приводимъ въ первоначальное положеніе. Точки R и R' будутъ искомыми слѣдами; проведя черезъ R и R' параллели оси, получимъ слѣды $\alpha\beta$ и $\gamma\delta$ искомой плоскости.

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ЛИНІЙ.

Перпендикулярность линій, лежащихъ въ пространствѣ, вообще говоря, проекціями не можетъ быть выражена, исключая нѣкоторыхъ частныхъ случаевъ положенія прямыхъ. Для этого докажемъ, что прямой уголъ не всегда сохраняетъ свою величину въ проекціяхъ. Чтобы это доказать, возьмемъ въ пространствѣ прямой уголъ и построимъ его проекцію. Пусть R (черт.196) будетъ одной изъ плоскостей проекцій, а AB - прямая, лежащая въ пространствѣ; Ab - ея проекція на плоскости R. На прямой AB возьмемъ точку C; ея проекція будетъ c. Если

ТИПО-ЛИТ. Ю. ВЕНЕРЪ ПРЕЕМН. О. ФАЛЬКЪ.
Листъ 13-й



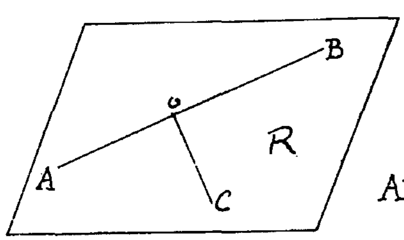
Черт.196.

черезъ точку C проведемъ плоскость $\alpha\beta\gamma$, перпендикулярную къ AB, то слѣдъ ея $\alpha\beta$ на плоскости R будетъ перпендикуляренъ проекціи Ab. Всякая прямая, проведенная на этой плоскости черезъ точку C, будетъ перпендикулярна къ AB, такимъ образомъ прямыя: CH, CD, CE, CK... перпендикулярны къ AB, а потому углы: BCH, BCD, BCE, BCK... - прямые. Проекція угла BCH выразится прямой cH, т.е. проекція прямого угла равна 0; проекція прямого угла BCD есть уголъ HcD, но этотъ уголъ - острый, потому что въ треугольникѣ HcD уголъ cHD - прямой, такъ какъ слѣдъ $\alpha\beta$ перпендикуляренъ къ Ab проекціи AB, по предыдущему. Если CE параллел. $\alpha\beta$, а слѣдовательно и плоскости R, то проекція прямого угла BCE выразится прямымъ угломъ Bce, потому что ce перпендикул. Ab. Проекція угла BCK есть тупой уголъ Hck, что очевидно. Такимъ образомъ видимъ, что проекція прямого угла можетъ быть равна 0, быть острымъ, тупымъ и прямымъ углами: это значитъ, что прямой уголъ не сохраняетъ своей величины въ проекціяхъ, и потому, если прямыя, лежащія въ пространствѣ, перпендикулярны, то ихъ проекціи могутъ быть и не перпендикулярны. Изъ всѣхъ прямыхъ угловъ замѣтимъ тотъ, у котораго одна сторона параллельна разсматриваемой плоскости проекцій, потому что онъ на эту плоскость проектируется прямымъ угломъ. На нашемъ чертежѣ такой уголъ есть ВСЕ. Такимъ образомъ прямой уголъ сохраняетъ свою величину въ проекціи только тогда, когда одна изъ сторонъ его параллельна разсматриваемой плоскости проекцій.

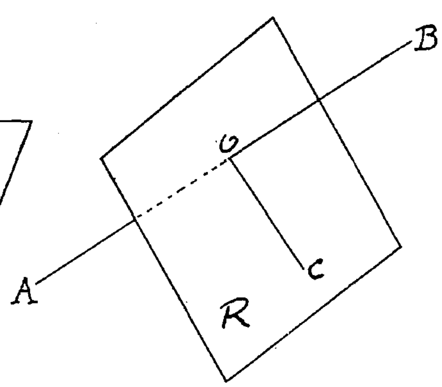
З А Д А Ч А. Изъ данной точки С на прямую АВ опустить перпендикуляръ.

Такъ какъ прямой уголъ не сохраняетъ своей величины въ проекціяхъ, то эта задача не можетъ быть рѣшена проведеніемъ перпендикуляровъ изъ проекцій данной точки къ проекціямъ данной прямой. Для рѣшенія этой задачи можно употребить три способа: 1) черезъ данную точку С и прямую АВ провести плоскость (черт.197) и въ этой плоскости изъ данной точки опустить перпендикуляръ на АВ; 2) черезъ данную точку С (черт.198) провести плоскость R, перпендикулярную къ данной прямой АВ, и точку встрѣчи О плоскости R съ АВ соединить съ данной точкой С; СО будетъ искомымъ перпендикуляромъ; 3) черезъ прямую АВ (черт.199) провести

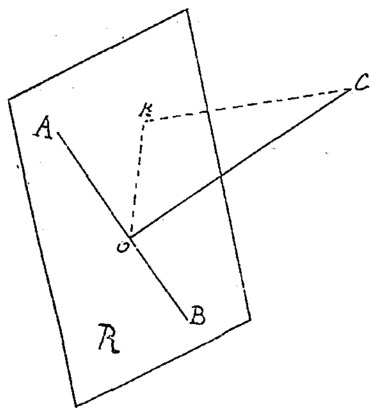
Черт.197.



Черт.198.



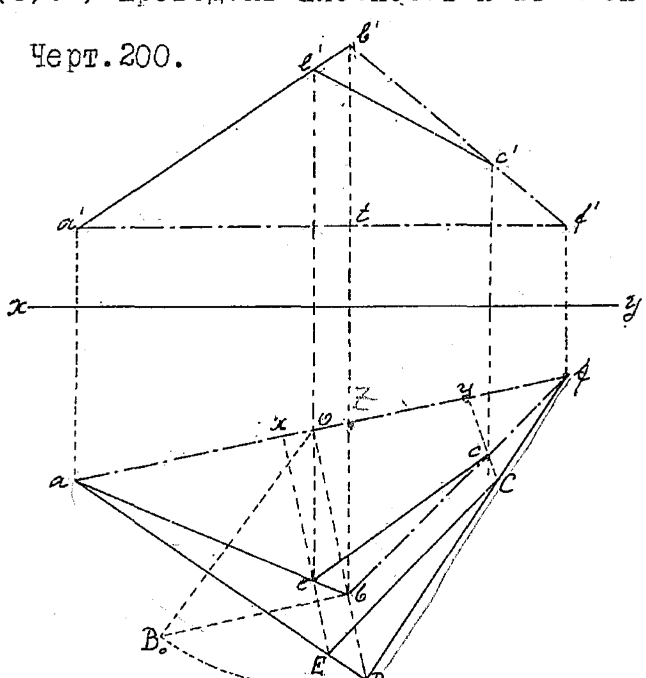
Черт.199.



произвольную плоскость R и на нее изъ данной точки C опустить перпендикуляръ Ck, а потомъ изъ k опустить перпендикуляръ на AB и полученную точку о соединить съ C; Co будетъ искомымъ перпендикуляромъ, что вытекаетъ изъ теоремы: „линія, лежащая на плоскости и перпендикулярная къ проекціи наклонной, перпендикулярна и къ самой наклонной". Если въ послѣднемъ случаѣ вмѣсто произвольной плоскости провести одну изъ проектирующихъ плоскостей, то построеніе значительно упрощается.

Рѣшимъ эту задачу **ПО ПЕРВОМУ СПОСОБУ, полагая,** что (c,c') - данная точка, а (ab, a'b') - данная прямая (чертежъ 200. Для этого черезъ прямую (ab, a'b') и точку (c,c') проведемъ плоскость и въ этой плоскости опустимъ

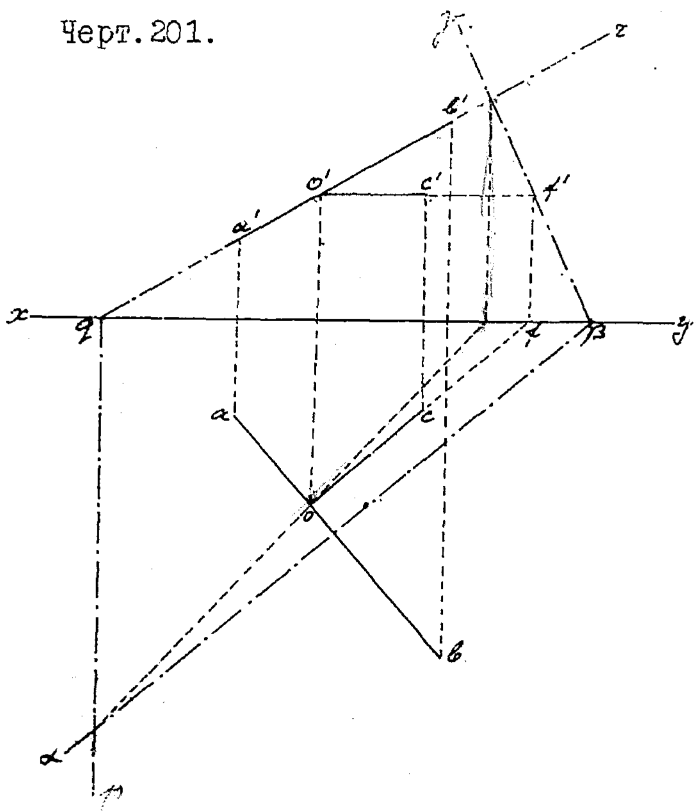
Черт.200.



перпендикуляръ изъ точки (c,c') на (ab, a'b'). Чтобы выполнить это построеніе, плоскость, опредѣляемую прямыми (ab, a'b') и (bc, b'c'), совмѣстимъ съ горизонтальною плоскостью или, что проще, вращеніемъ около какой-нибудь горизонтали (af, a'f') приведемъ ее въ положеніе, параллельное горизонтальной плоскости проекціи, и найдемъ новое положеніе, какъ прямой (ab, a'b'), такъ и точки (c,c'); для этого изъ b опускаемъ перпендикуляръ bo на ось вращенія af и изъ b возставляемъ перпендикуляръ bB_0 = b't; радіусъ вращенія oB_0 откладываемъ на прямой ob отъ точки o, и полученную точку B соединяемъ съ точками a и f, которыя при вращеніи положенія не измѣняютъ; aB будетъ новымъ положеніемъ прямой (ab, a'b'), а Bf - прямой (bf, b'f'), на которой лежитъ точка (c,c'), а потому новое положеніе точки (c,c') лежитъ на Bf; чтобы найти его, изъ c опускаемъ перпендикуляръ на ось вращенія и продолжаемъ его до встрѣчи съ Bf въ точкѣ C, которая и есть новое положеніе точки (c,c'). Такимъ образомъ aB и C лежатъ въ одной плоскости, и если изъ C опустимъ перпендикуляръ CE на Ba, то CE будетъ натуральной величиной искомаго перпендикуляра; чтобы найти его проекціи, изъ E опускаемъ перпендикуляръ на af; на этомъ перпендикулярѣ (какъ на слѣдѣ плоскости вращенія) будетъ лежать горизонтальная проекція точки E, которая въ то же время лежитъ на ab, слѣдовательно точка встрѣчи e будетъ горизонтальной проекціей подошвы перпендикуляра, опущеннаго изъ (c,c') на (ab, a'b'). По горизонтальной проекціи найдемъ вертикальную e'. Прямая (ce, c'e') - искомый перпендикуляръ.

ВТОРОЙ СПОСОБЪ рѣшенія задачи состоитъ въ томъ, что

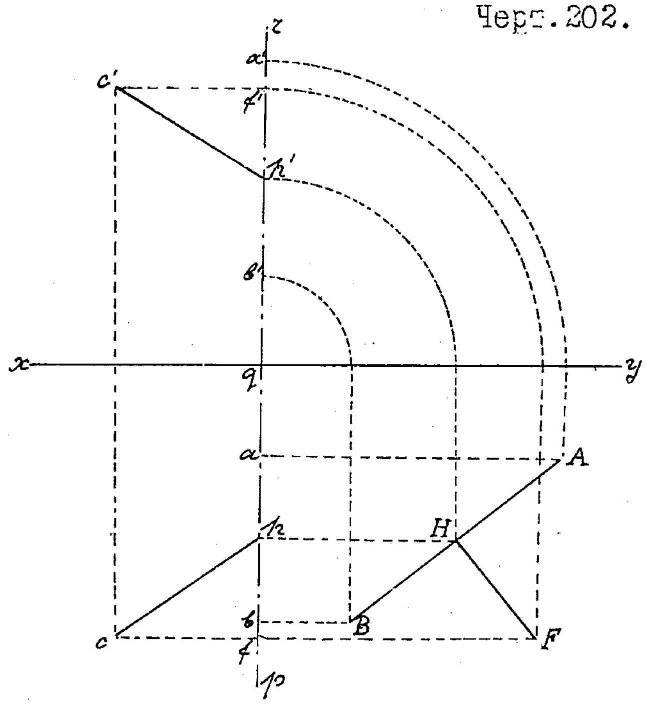
Черт.201.



черезъ данную точку (c,c')(чер.201) проводятъ плоскость $\alpha\beta\gamma$ перпендикулярно къ данной прямой и находятъ точку встрѣчи (o,o') этой плоскости съ данной прямой; эта точка (o,o') и будетъ подошвой искомаго перпендикуляра. Если точку o соединимъ съ c, а o' съ c', то получимъ проекціи (oc,o'c') искомаго перпендикуляра.

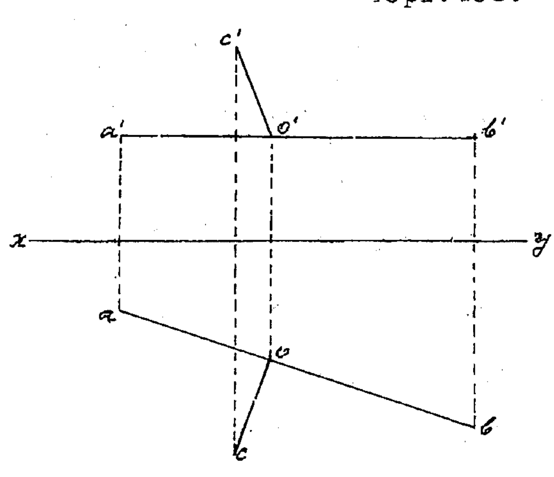
ТРЕТІЙ СПОСОБЪ рѣшенія задачи. Спустимъ перпендикуляръ изъ данной точки (c,c') на прямую (ab, a'b'), лежащую въ профильной плоскости. Для этого на профильную плоскость pqr изъ (c,c') опустимъ перпендикуляръ (cf, c'f') и изъ подошвы его (f,f') опустимъ перпендикуляръ на данную прямую (ab, a'b'). Это построеніе исполнимъ на совмѣщенномъ положеніи плоскости pqr съ горизонтальной плоскостью проекцій. Сдѣлавши это совмѣщеніе, найдемъ, что F выражаетъ совмѣщеніе точки (f,f'), а AB - совмѣщеніе данной прямой (чер.202). Опустивъ изъ F перпенд-ръ на AB, найдемъ точку H - совмѣщеніе подошвы искомаго перпендикуляра; по совмѣщенію точки

Черт.202.



и находимъ ея проекціи (h,h'); соединивъ с съ h и c' съ h', получимъ проекціи (ch, c'h') искомаго перпендик-ра. Рѣшеніе той же задачи, когда данная прямая будетъ параллельна одной изъ плоскостей проекцій, приводится къ простому построенію. Пусть прямая (ab, a'b')(чертежъ 203) параллельна горизонтальной плоскости проекцій; требуется изъ (c,c') опустить на нее перпендикуляръ. Мы знаемъ, что если одна изъ сторонъ угла параллельна одной изъ плоскостей проекцій, то прямой уголъ на эту плоскость проектируется въ натуральную величину. Поэтому для рѣшенія задачи достаточно опустить

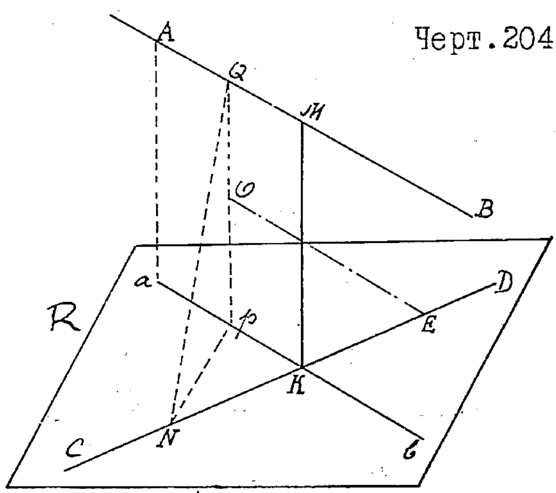
Черт.203.



перпендикуляръ изъ c на прямую ab. Полученную точку o спроектируемъ на вертикальную проекцію прямой и точку c' соединимъ съ c', тогда прямая (co, c'o') будетъ перпендикулярна къ прямой (ab, a'b'), а такъ какъ она проходитъ черезъ точку (с, с'), то она будетъ искомымъ перпендикуляромъ.

О КРАТЧАЙШЕМЪ РАЗСТОЯНІИ МЕЖДУ ПРЯМЫМИ.

Если прямыя въ пространствѣ не параллельны и не пересѣкаются, то онѣ называются скрещивающимися; между такими прямыми существуетъ кратчайшее разстояніе, которое перпендикулярно къ каждой изъ нихъ. Чтобы построить его, на одной изъ данныхъ прямыхъ CD (черт.204) беремъ произвольную точку E и проводимъ черезъ нее прямую OE параллел. AB. Черезъ пересѣкающіяся прямыя OE и DC проводимъ плоскость R. Изъ какой-нибудь точки A прямой AB опускаемъ перпендикуляръ на R и черезъ подошву его a проводимъ прямую ab паралл. OE, тогда ab будетъ проекціей AB на плоскости R. Изъ точки встрѣчи ab съ CD, т.е. изъ точки K возставимъ перпендикуляръ къ плоскости R, который будетъ находиться въ проектирующей плоскости bBAa и потому пересѣчется съ AB въ точкѣ M; прямая MK будетъ кратчайшимъ разстояніемъ между данными прямыми. Докажемъ, что MK перпендикулярна къ AB и CD. Для этого замѣтимъ, что линія KM перпендикул. плоскости R, а потому KM перпендикулярна ab и CD, но такъ какъ ab параллел. AB, то KM



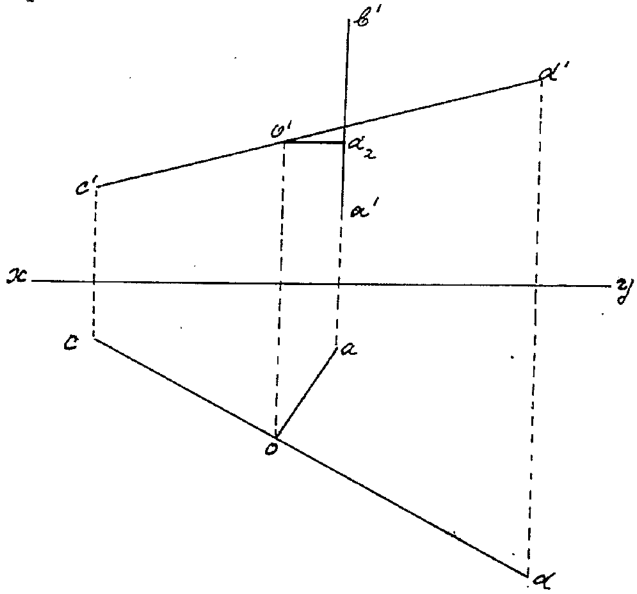
Черт.204.

перпендикул. AB. Такимъ образомъ это свойство кратчайшаго разстоянія доказано. Теперь докажемъ, что KM короче всякой другой прямой, соединяющей какія-нибудь двѣ точки данныхъ прямыхъ AB и CD. Возьмемъ на CD точку N и соединимъ ее съ произвольной точкой Q, взятой на прямой AB, и докажемъ, что $MK < NQ$. Для этого точку Q проектируемъ на плоскость R и полученную проекцію p соединяемъ съ точкой N, тогда въ прямоугольномъ Δ-кѣ QpN сторона $QN > Qp$, но $Qp = MK$; отсюда, слѣдовательно, $NQ > KM$, а это доказываетъ, что MK есть кратчайшее разстояніе.

Если прямыя даны проекціями, то ходъ построенія кратчайшаго разстоянія между ними остается тотъ же самый, т.е. мы должны на первой изъ нихъ построить точку и провести черезъ нее прямую параллельно другой данной прямой; черезъ двѣ эти пересѣкающіяся линіи провести плоскость, вторую изъ данныхъ прямыхъ спроектировать на эту плоскость, для чего нужно опустить перпендикуляръ изъ какой-нибудь ея точки на эту плоскость и изъ точки встрѣчи его съ плоскостью провести прямую параллельно второй данной прямой, а изъ точки встрѣчи этой параллели съ первой прямой возставить перпендикуляръ къ построенной плоскости или, что все равно, провести параллель прямой Aa и найти его пересѣченіе со второй прямой, черезъ что получимъ проекціи искомаго разстоянія.

При частныхъ положеніяхъ прямыхъ построеніе кратчайшаго разстоянія упрощается: наприм., если дана прямая (a, a'b'), перпендикулярная къ горизонтальной плоскости про-

Черт. 205.

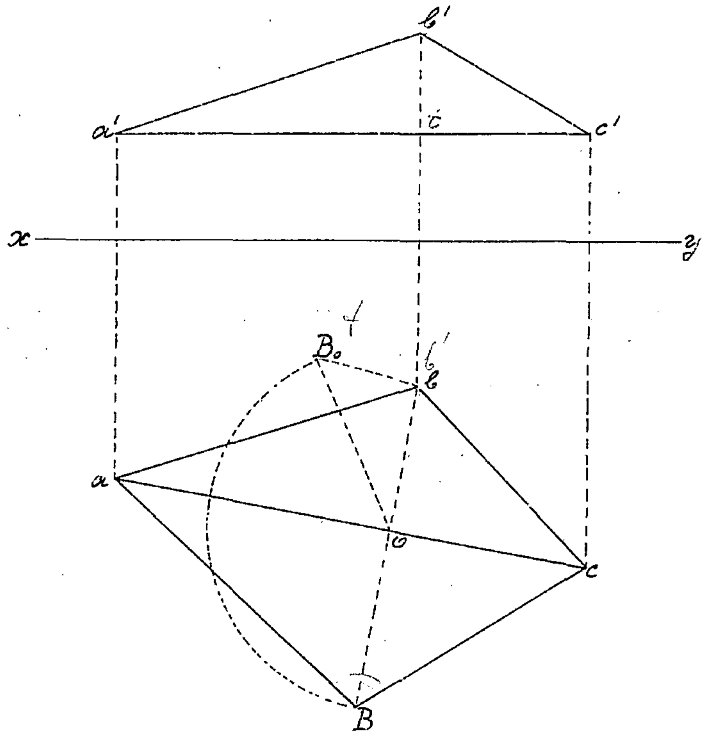


екцій, а другая (cd, c'd') - произвольная (черт. 205), то для построенія кратчайшаго разстоянія достаточно изъ точки a опустить перпендикуляръ на cd, потому что искомое разстояніе, будучи перпендикулярно къ прямой (a, a'b'), будетъ параллельно горизонтальной плоскости проекцій, и потому оно проектируется на эту плоскость въ натуральную величину въ направленіи, перпендикулярномъ къ cd, по свойству проекцій прямого угла. Такимъ образомъ ao будетъ выражать и длину искомаго разстоянія, и его горизонтальную проекцію. Для построенія вертикальной его проекціи проектируемъ точку o на c'd' и изъ o' проводимъ прямую, параллельную оси проекцій xy; (ao, a_2o') будутъ проекціями искомаго разстоянія. Кратчайшее разстояніе можетъ быть построено также, употребляя методъ вращенія или методъ перемѣны плоскостей проекцій. Всѣ эти построенія сводятся къ только что разсмотрѣнному случаю, и потому мы не будемъ разбирать ихъ отдѣльно.

УГОЛЪ МЕЖДУ ПРЯМЫМИ.

Прямыя, лежащія въ пространствѣ, могутъ пересѣкаться и не пересѣкаться. Построеніе угла между ними, какъ извѣстно изъ геометріи, сводится къ построенію угла, образуемаго прямыми, параллельными даннымъ и проходящими черезъ какую-нибудь

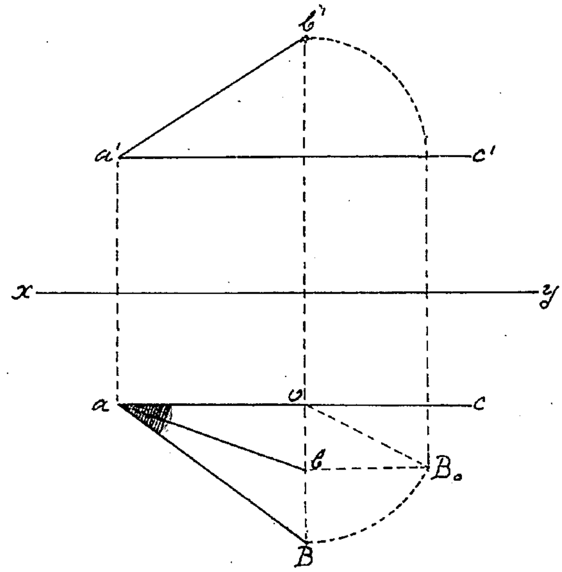
Черт.206.



точку. Пусть прямыя, параллельныя даннымъ и проходящія черезъ точку (b,b') (черт.206), будутъ: (ab, a'b') и (bc,b'c'). Чтобы построить уголъ, ими образуемый, проведемъ черезъ нихъ плоскости, и, если одинъ изъ слѣдовъ ея помѣщается въ предѣлахъ чертежа, то совмѣстимъ ее посредствомъ вращенія около этого слѣда съ плоскостью проекцій; но, такъ какъ слѣды могутъ не помѣститься въ предѣлахъ чертежа, то мы приведемъ плоскость въ положеніе, параллельное, положимъ, горизонтальной плоскости; для этого строимъ горизонталь, (ac, a'c') плоскости. Находимъ по извѣстному правилу новое положеніе точки (b,b'), которое есть B, такъ что уголъ aBc будетъ искомымъ.

Рѣшимъ ту же задачу въ предположеніи, что одна изъ его сторонъ (черт.207) параллельна xy. Прямую (ac, a'c') принимаемъ за горизонталь плоскости даннаго угла, и эту плоскость, вращеніемъ около горизонтали, приводимъ въ положеніе, параллельное горизонтальной плоскости. Для этого на другой данной прямой (ab, a'b') беремъ произвольную точку (b,b'), находимъ ея новое положеніе B и полученную точку B соединяемъ съ a; прямая aB выразитъ новое положеніе прямой (ab, a'b'), а уголъ caB будетъ искомымъ.

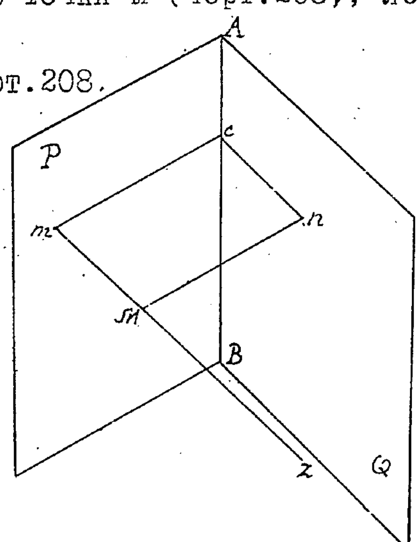
Черт.207.



У Г О Л Ъ   М Е Ж Д У   П Л О С К О С Т Я М И.

Построеніе угла между плоскостями можно свести на построеніе угла между линіями, къ нимъ перпендикулярными. Такое построеніе основано на геометрической теоремѣ: „если изъ точки M (черт.208), лежащей въ пространствѣ, опустимъ перпендикуляры на даннѣя плоскости P и Q, то уголъ, ими образуемый, вмѣстѣ съ линейнымъ угломъ двуграннаго, образованнаго плоскостями P и Q, составятъ два прямыхъ угла". Такимъ образомъ уголъ mMn + уголъ mcn

Черт.208.



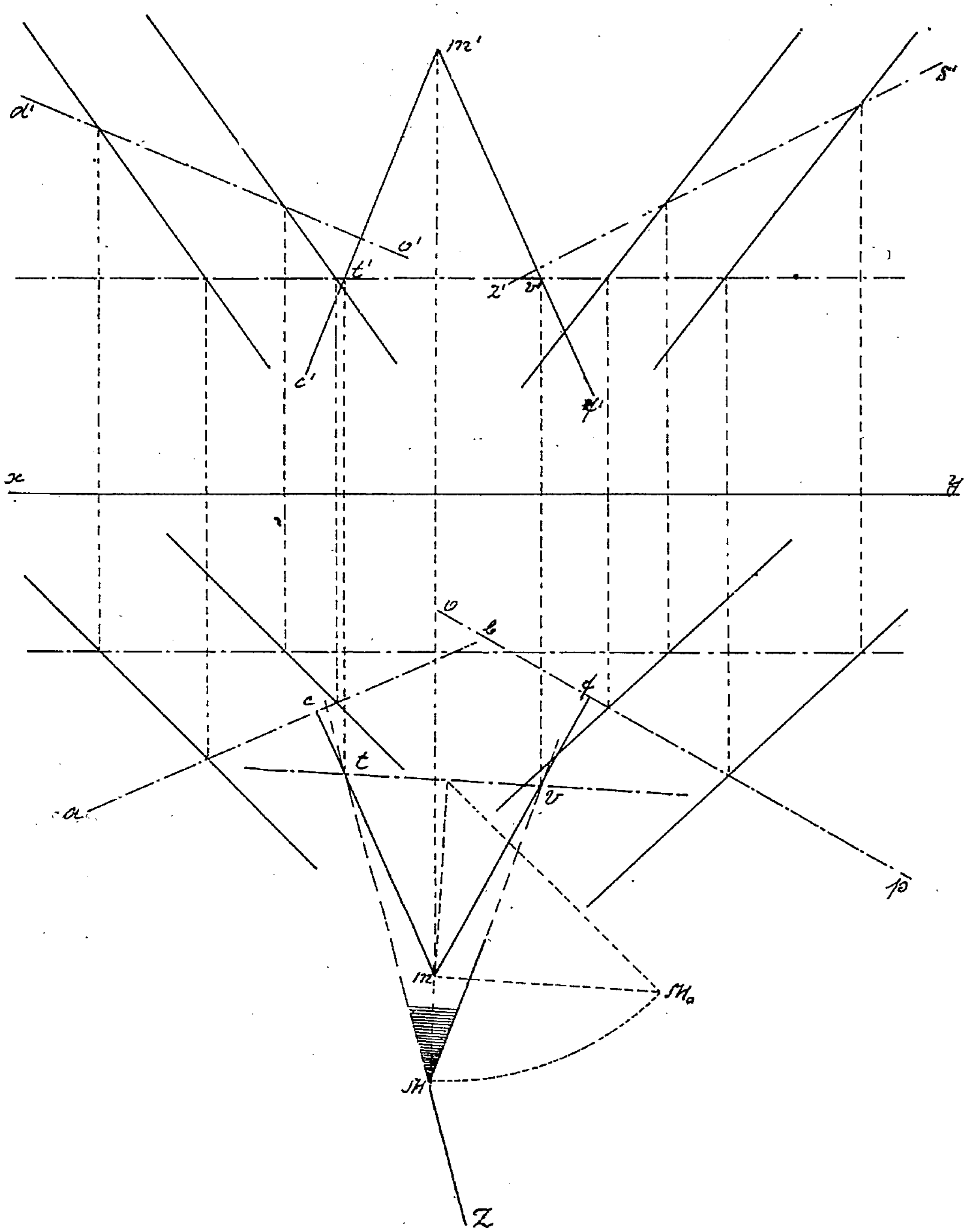
равны 2d, гдѣ уголъ mcn есть линейный уголъ даннаго двуграннаго; если одну изъ сторонъ угла, составленнаго перпендикулярами, продолжимъ, то будемъ имѣть ∠ mMn + ∠ nMz= = 2d; изъ сравненія этихъ двухъ равенствъ слѣдуетъ, что ∠ mcn = ∠ nMz.

На основаніи этого, для построенія угла, образуемаго плоскостями, которыя даны параллельными прямыми, поступаемъ такъ: изъ произвольной точки (m, m') (черт. 209) опустимъ перпендикуляръ, какъ на первую плоскость, такъ и на вторую. Перпендикуляръ на первую плоскость есть (mc, m'c'), гдѣ mc перпендикулярна къ ab (горизонтальной проекціи горизонтали), а m'c' перпендикулярна къ d'c' (вертикальной проекціи фронтали), а перпендикуляръ на вторую плоскость (mf, m'f'), при чемъ mf перпендикулярна ро - горизонтали второй плоскости, а m'f' перпендикулярна къ s'z' - вертикали второй плоскости. Уголъ между этими перпендикулярами найдется, когда плоскость этого угла совмѣстимъ съ одной изъ плоскостей проекцій, или же, какъ это сдѣлано у насъ, плоскость угла, посредствомъ вращенія около горизонтали (tv, t'v'), приведемъ въ положеніе, параллельное горизонтальной плоскости. Уголъ ZMv выражаетъ натуральную величину искомаго угла между данными плоскостями.

УГОЛЪ МЕЖДУ ЛИНІЕЙ И ПЛОСКОСТЬЮ.

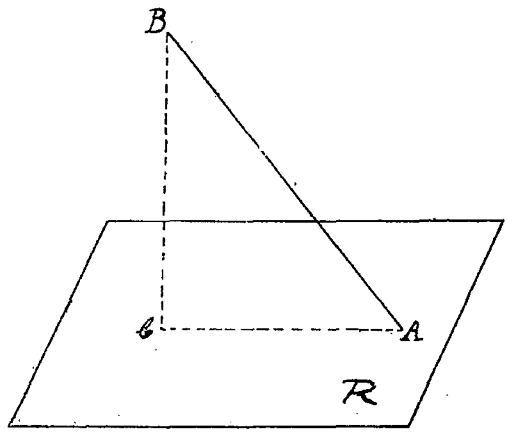
Подъ угломъ линіи съ плоскостью разумѣютъ уголъ, ко-

Черт.209.



торый образуетъ данная прямая съ своей проекціей на разсматриваемую плоскость. Этотъ уголъ разсматривается потому, что онъ представляется наименьшимъ изъ угловъ, образуемыхъ данной линіей съ прямыми на данной плоскости. Такимъ образомъ

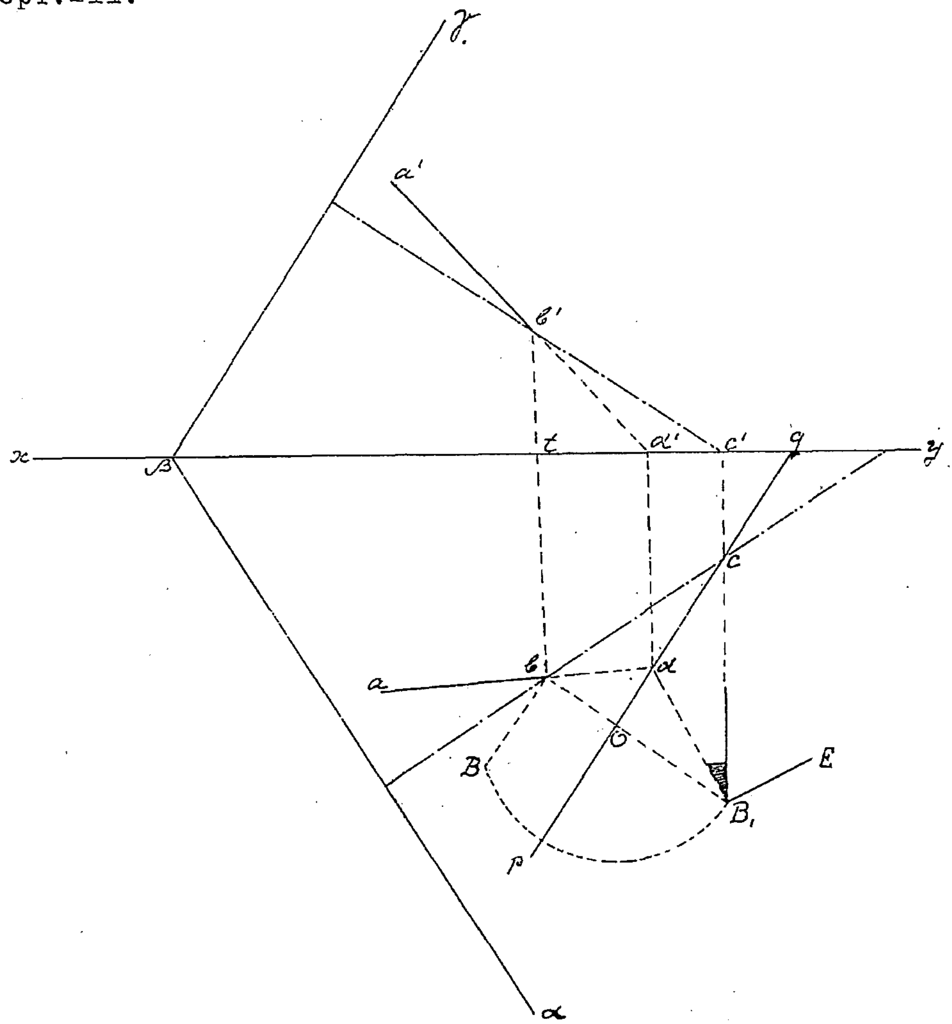
Черт.210.



при построеніи угла между линіей АВ и какой-нибудь плоскостью R (черт.210) нужно эту линію спроектировать на данную плоскость и построить уголъ между АВ и ея проекціей Аb, который и будетъ искомымъ. Для проектированія же линіи АВ на плоскость R нужно изъ какой-либо ея точки В спустить перпендикуляръ Вb на плоскость R и черезъ АВ и Вb провести плоскость, сѣченіе которой съ плоскостью R опредѣлитъ проекцію линіи АВ. Построивши уголъ ВАb, мы и найдемъ искомый уголъ. При рѣшеніи этой задачи можно поступать такъ: вмѣсто искомаго угла можно построить дополнительный къ нему до 90°, т.е. уголъ АВb. Тогда уголъ, дополнительный къ этому углу АВb до 90°, и будетъ искомымъ угломъ.

На основаніи этого замѣчанія построимъ уголъ между плоскостью $\alpha\beta\gamma$ и прямой (ab, a'b') (черт.211). Для этого изъ точки (b, b') опускаемъ перпендикуляръ (bc, b'c') на данную плоскость $\alpha\beta\gamma$ и строимъ уголъ между прямыми (ab, a'b') и (bc, b'c'); для этого черезъ данную прямую и перпендикуляръ проводимъ плоскость, находимъ ея горизонтальный слѣдъ pq, проходящій черезъ c и d, т.е. черезъ слѣды данной прямой и перпендикуляра. Полученную плоскость совмѣщаемъ съ горизонтальной плоскостью, находимъ совмѣщен-

Черт.211.



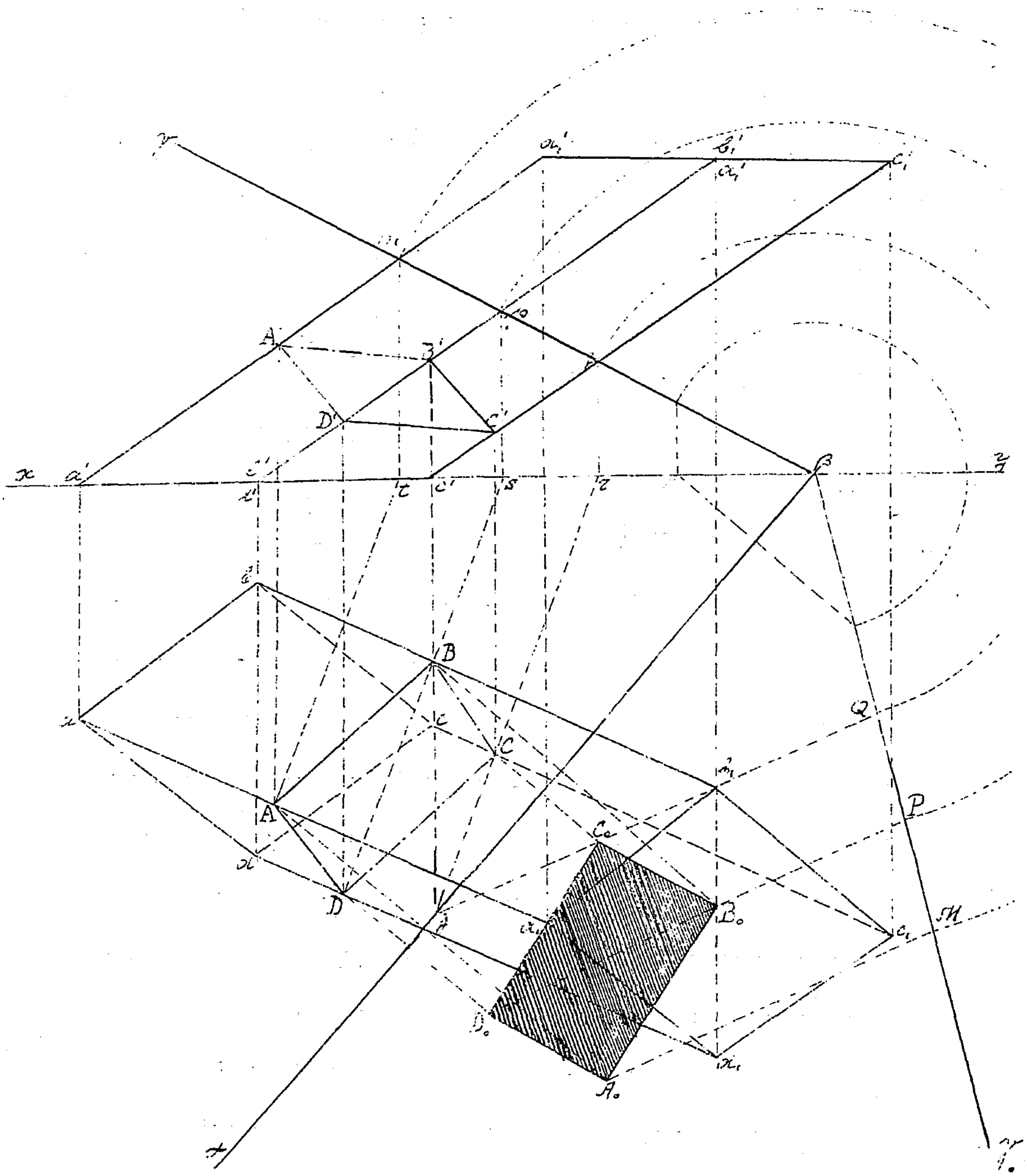
ное положенiе точки (b,b') и полученную точку B, соединяемъ съ c и d, которыя при вращенiи положенiя не измѣняютъ. Уголъ dB,c и будетъ соотвѣтствовать углу bBA на чертежѣ 210; если построить уголъ, дополнительный къ полученному, до 90°, т.е. уголъ cB,E, то онъ и будетъ искомымъ. Для той же цѣли, вмѣсто совмѣщенiя плоскости съ горизонтальной плоскостью проекцiй, можно привести ее въ положенiе, параллельное горизонтальной плоскости. Этотъ прiемъ рѣшенiя употребляется и въ томъ случаѣ, когда плоскость дана не слѣдами, а другими условiями.

ЗАДАЧИ НА ПЕРЕСѢЧЕНІЕ МНОГОГРАННИКОВЪ ПЛОСКОСТЬЮ.

При рѣшеніи задачъ этого рода ограничимся построеніемъ сѣченія призмъ и пирамидъ плоскостью. Разсмотримъ прежде сѣченіе призмы плоскостью. Положимъ, нужно построить сѣченіе призмы ($abcd$, $a_,b_,c_,d_,$, $a'b'c'd'$, $a_,'b_,'c_,'d_,'$), поставленной основаніемъ на горизонтальную плоскость проекцій, плоскостью $\alpha\beta\gamma$ (черт. 212).

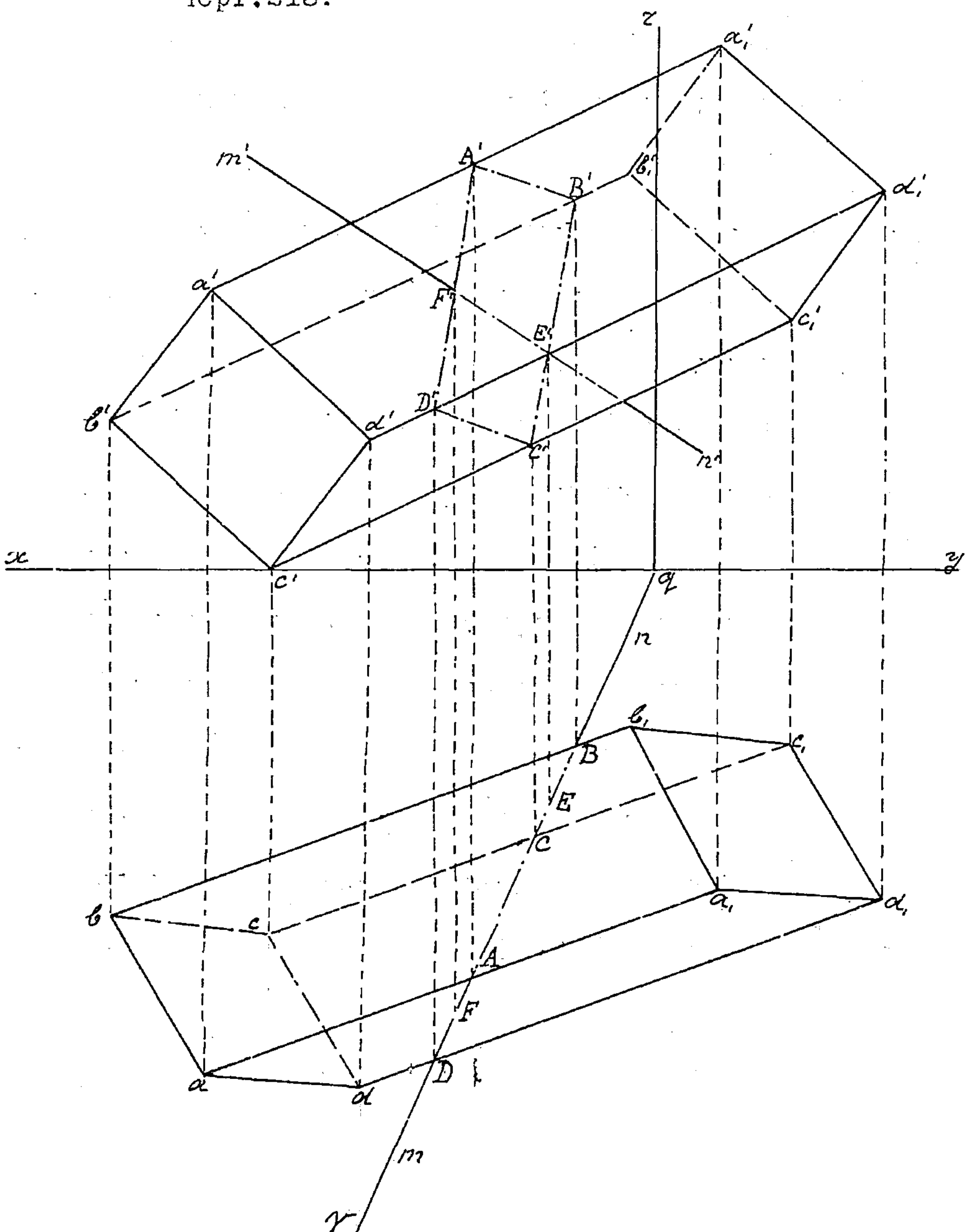
Общій пріемъ построенія сѣченія состоитъ въ томъ, что находятъ точки встрѣчи реберъ призмы съ данной плоскостью и потомъ полученныя точки, принадлежащія одной грани, соединяютъ прямыми, черезъ что получаютъ многоугольникъ сѣченія. Для построенія этихъ точекъ проводимъ черезъ рёбра призмы вертикально или горизонтально проектирующія плоскости и находимъ сѣченіе этихъ плоскостей съ данной плоскостью $\alpha\beta\gamma$. Точки встрѣчи полученныхъ линій съ соотвѣтствующими ребрами и будутъ искомыми. На черт. 212 проведены вертикально-проектирующія плоскости. Пересѣченіе горизонтальныхъ проекцій линій сѣченія съ горизонтальными проекціями реберъ дастъ точки A, B, C, D. Соединивъ A съ B, B съ C, C съ D, D съ A, получимъ горизонтальную проекцію сѣченія ABCD, а спроектировавъ полученныя точки на вертикальныя проекціи реберъ, получимъ вертикальную проекцію сѣченія A'B'C'D'. Если плоскость $\alpha\beta\gamma$ совмѣстимъ съ одной изъ плоскостей проекцій, положимъ, съ горизонтальной, то получимъ натуральную величину сѣченія. Сдѣлать это можно слѣдующимъ

Черт. 212.



образомъ: найдемъ совмѣщенное положенiе вертикальнаго слѣда плоскости $\alpha\beta\gamma$, т.е. прямую $\beta\gamma_0$, и на ней совмѣщенное положенiе точекъ m, p, q т.е. точки M, P, Q; точку Q соединяемъ съ g и черезъ точки P и M проводимъ прямыя, параллельныя Qg, черезъ что получаемъ совмѣщенное положеніе линія сѣченія вспомогательныхъ плоскостей съ плоскостью $\alpha\beta\gamma$. На этихъ прямыхъ должно находиться совмѣщенное положеніе точекъ(A,A'), (B,B'), (C,C') и (D,D');но это положеніе,какъ извѣстно,должно находиться на перпендикулярахъ, опущенныхъ изъ точекъ A,B, C и D на $\alpha\beta$, слѣдовательно оно находится на пересѣченіи этихъ линій въ точкахъ A_o, B_o, C_o и D_o; соединивъ полученныя точки, найдемъ натуральную величину сѣченія $A_oB_oC_oD_o$. При этомъ построеніи надо замѣтить,что вспомогательныя плоскости параллельны, а потому и линіи сѣченія ихъ съ плоскостью $\alpha\beta\gamma$ параллельны. При построеніи этого сѣченія можно пользоваться методомъ перемѣны плоскостей проекцій; въ такомъ случаѣ одну изъ плоскостей проекцій измѣняютъ такъ, чтобы она была перпендикулярна къ одному изъ слѣдовъ данной плоскости. Въ этомъ случаѣ построеніе проекцій упрощается. Примѣненіе этого способа мы разсмотримъ при построеніи сѣченія пирамиды плоскостью.

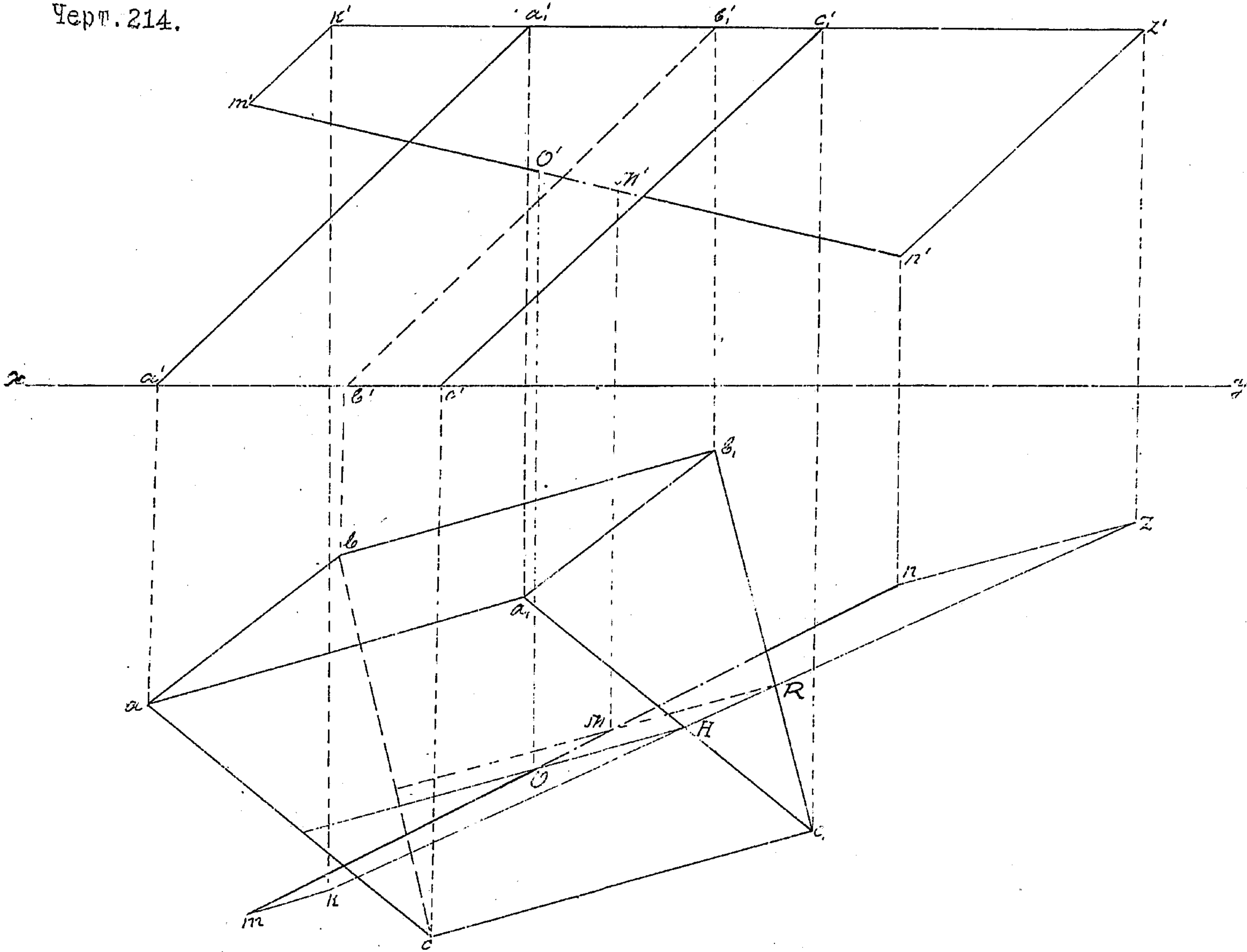
З А Д А Ч А. Построить точку встрѣчи прямой (mn,m'n')съ призмой (abcd, a,b,c,d,, a'b'c'd', a,'b,'c,'d,') (черт.218). Общій пріемъ нахожденія точекъ встрѣчи прямой съ данной призмой состоитъ въ томъ, что черезъ данную прямую проводятъ какую--нибудь плоскость(обыкновенно или проектирующую или параллельную боковымъ ребрамъ призмы) и находятъ проекціи сѣченія этой плоскости съ призмой; тогда точки, въ которыхъ эта прямая пересѣкаетъ полученный многоугольникъ сѣченія,и будутъ искомыми точками.Для рѣшенія задачи мы проводимъ горизонтально-проектирующую плоскость pqr;въ сѣченіи получится многоугольникъ(ABCD, Черт: 213.



A'B'C'D'). Замѣтимъ точки пересѣченія построеннаго многоуголь ника съ данной прямой. Вертикальныя проекціи этихъ точекъ будутъ F' и E'; опустивъ перпендикуляры изъ точекъ F' и E' на ось xy до встрѣчи съ mn, получимъ горизонтальныя проекціи F и E искомыхъ точекъ. Невидимыя части данной прямой, входящей въ призму, отмѣчены пунктиромъ; такимъ образомъ, если считать направленіе данной прямой отъ (m,m') къ (n,n'), то точка (F,F'), принадлежащая грани ($a,d,\ ad,\ a'_{,}d'_{,}a'd'$). будетъ точкой входа прямой въ призму, а точка (E,E'), принадлежащая грани ($cbc_{,}b_{,},\ c'b'c'_{,}b'_{,}$), будетъ точкой выхода прямой изъ призмы. Если точка (m,m') есть матеріальная точка, а прямая (mn, m'n') параллельна направленію солнечнаго луча, то точка (F,F') будетъ выражать падающую тѣнь отъ точки (m,m') на поверхности нашей призмы, потому что свѣтовой лучъ прежде встрѣчаетъ поверхность призмы въ точкѣ (F,F'), который и будетъ задержанъ.

Разсмотримъ теперь другой способъ построенія точекъ встрѣчи прямой съ поверхностью призмы. Пусть ($abca_{,}b_{,}c_{,}$, $a'b'c'a'_{,}b'_{,}c'_{,}$) - данная призма и (mn, m'n') - данная прямая (черт.214); требуется построить ихъ точки встрѣчи. Для рѣшенія задачи беремъ на прямой (mn, m'n') двѣ произвольныя точки (m,m') и (n,n') и черезъ нихъ проводимъ прямыя (mk, m'k') и (nz, n'z') параллельно боковымъ ребрамъ призмы Через эти прямыя проводимъ плоскость и находимъ слѣдъ ея на верхнемъ основаніи призмы или на горизонтальной плоскости, смотря по тому, что удобнѣе. На прилагаемомъ чертежѣ слѣдъ построенъ на верхнемъ основаніи. Для построенія этого слѣда продолжимъ вертикальную проекцію верхняго основанія $a'_{,}b'_{,}c'_{,}$ до пересѣченія съ прямыми m'k' и n'z' въ точкахъ k и z', которыя и будутъ вертикальными проекціями точекъ встрѣчи нашихъ прямыхъ съ плоскостью верхняго основанія. Найдя по вертикальнымъ проекціямъ k' и z' горизонтальныя k

Черт.214.

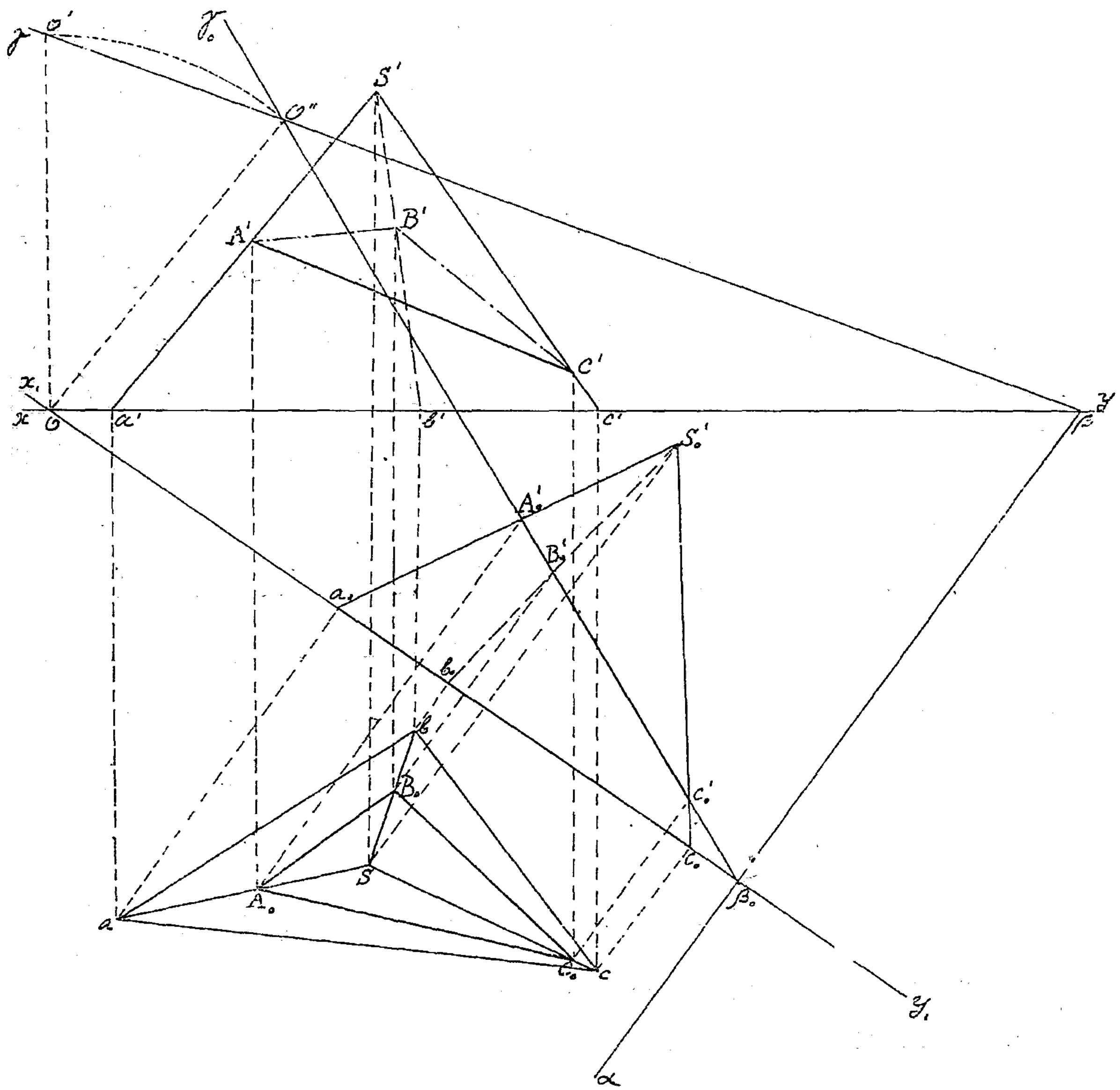


и z и соединивъ одноименныя проекціи прямыми, получимъ $(kz, k'z')$ - проекціи линіи сѣченія проведенной плоскости съ плоскостью верхняго основанія призмы. Если черезъ точки пересѣченія прямой kz съ ребрами верхняго основанія призмы проведемъ прямыя kO и RM параллельно боковымъ ребрамъ призмы, то онѣ выразятъ линіи сѣченія проведенной плоскости съ гранями призмы, а точки встрѣчи этихъ прямыхъ съ горизонтальной проекціей данной прямой mr - горизонтальныя проекціи точекъ встрѣчи данной прямой съ призмой. Найдя по горизонтальнымъ проекціямъ O и M - вертикальныя O' и M', получимъ точки (O,O') и (M,M'), которыя будутъ искомыми. Полагая, что точка (m,m') - матеріальная точка, а прямая $(mn, m'n')$ параллельна направленію свѣтового луча, найдемъ, что точка (O,O') есть падающая тѣнь на поверхности призмы отъ данной точки (m,m').

СѢЧЕНІЕ ПИРАМИДЫ ПЛОСКОСТЬЮ.

Положимъ, дана пирамида $(Sabc, S'a'b'c')$ и плоскость $\alpha\beta\gamma$ (черт.215) и требуется построить ихъ сѣченіе. Въ этомъ случаѣ можно или непосредственно построить точки встрѣчи плоскости $\alpha\beta\gamma$ съ ребрами пирамиды при данномъ ея положеніи, или же найти эти точки при помощи метода перемѣны плоскостей проекцій. Разсмотримъ сначала построеніе проекцій линіи сѣченія пирамиды при помощи перемѣны плоскостей проекцій. Для этого измѣнимъ вертикальную плоскость проекцій такъ, чтобы она стала перпендикулярна къ $\alpha\beta$; тогда x_1y_1 будетъ перпендикул. къ $\alpha\beta$. При этой перемѣнѣ горизонтальный слѣдъ нашей

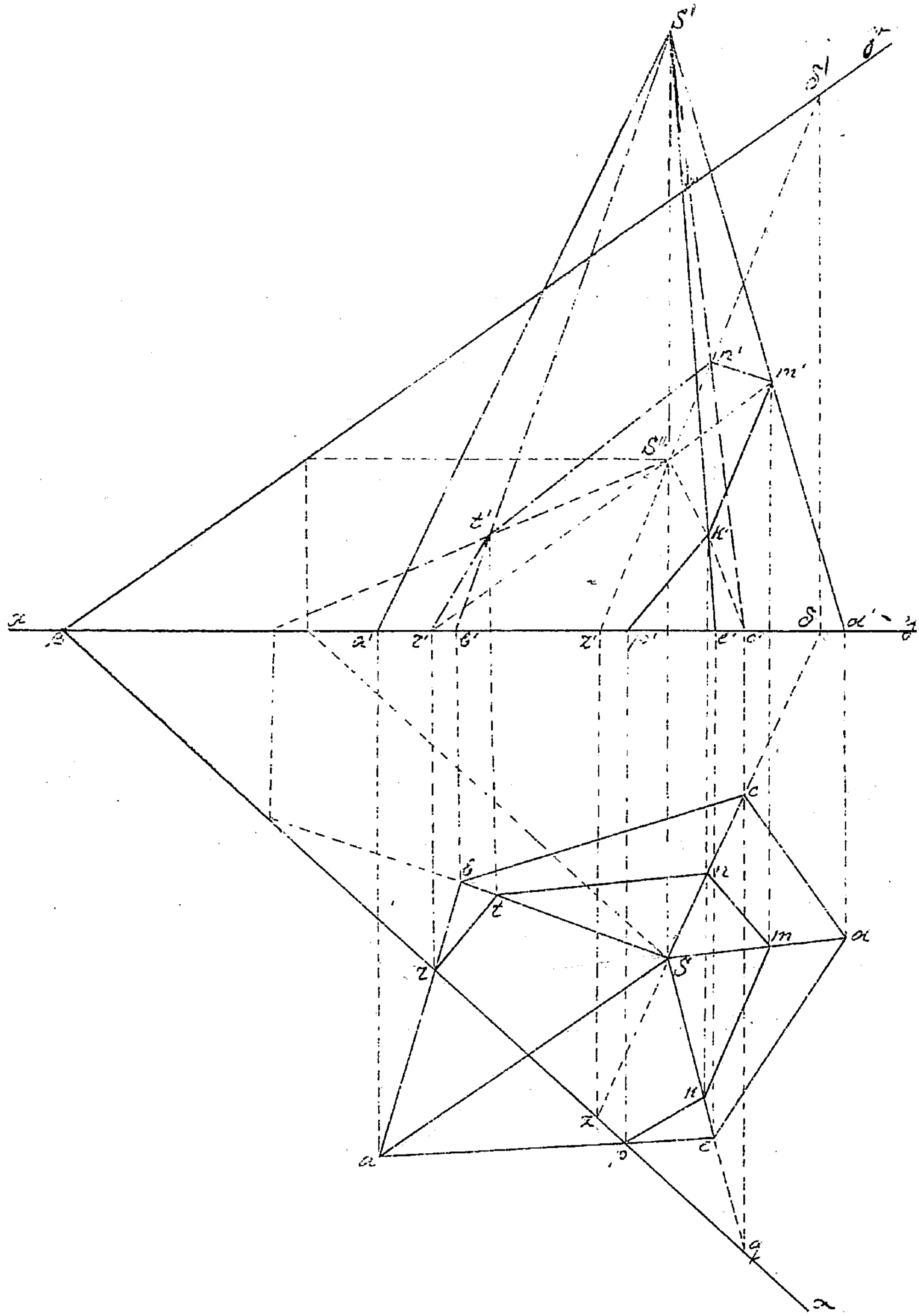
Черт.215.



плоскости $\alpha\beta$ не измѣнится, а вертикальный приметъ положеніе $\beta_0\gamma_0$. (Для этого, какъ извѣстно, изъ точки пересѣченія осей xy и x_1y_1 возставляемъ перпендикуляръ къ xy до пересѣченія съ $\beta\gamma$ и изъ точки O радіусомъ OO' описываемъ дугу до пересѣченія съ перпендикуляромъ, возставленнымъ въ точкѣ O къ оси x_1y_1; полученную точку O" соединяемъ съ β_0.) Такъ какъ горизонтальная плоскость не измѣняется, то и горизонтальная проекція пирамиды не измѣнится; чтобы найти новую вертикальную проекцію пирамиды, проектируемъ точки S, a, b, c на новую вертикальную плоскость и, такимъ образомъ, получаемъ вертикальную проекцію $S'_o a_o b_o c_o$ на новой вертикальной плоскости. Теперь мы имѣемъ пирамиду ($Sabc$, $S'_o a_o b_o c_o$) и сѣкущую плоскость $\alpha\beta_o\gamma_o$, перпендикулярную къ новой вертикальной плоскости проекцій. Сѣченіе плоскости $\alpha\beta_o\gamma_o$ съ пирамидой проектируется на новую вертикальную плоскость въ прямую $A'_o B'_o C'_o$, совпадающую со слѣдомъ $\beta_o\gamma_o$; вертикальныя проекціи вершинъ сѣченія будутъ точки $A'_o B'_o C'_o$; по вертикальнымъ проекціямъ строимъ горизонтальныя $A_o B_o C_o$. Но горизонтальная проекція пирамиды положенія своего не измѣнила, а равно не измѣнилась и плоскость $\alpha\beta\gamma$, а потому и горизонтальная проекція сѣченія ихъ - та самая, которую мы получили. По горизонтальной проекціи сѣченія находимъ вертикальную $A'B'C'$ на прежней вертикальной плоскости. Такимъ образомъ сѣченіе плоскости $\alpha\beta\gamma$ съ данной пирамидой будетъ ($A_o B_o C_o$, $A'B'C'$). Если при такомъ построеніи какая-либо точка опредѣлилась дурно (точка опредѣляется дурно, если прямыя пересѣкаются подъ очень острымъ угломъ), то пришлось бы искать такую точку встрѣчи ребра съ данной плоскостью непосредственно, т.е. провести черезъ ребра горизонтально или вертикально проектирующую плоскость и разсматривать сѣченіе этой плоскости съ требуемымъ ребромъ.

При второмъ способѣ построенія проекцій сѣченія пирамиды ($Sabcde$, $S'a'b'c'd'e'$) плоскостью $\alpha\beta\gamma$ поступаютъ

Черт.216.

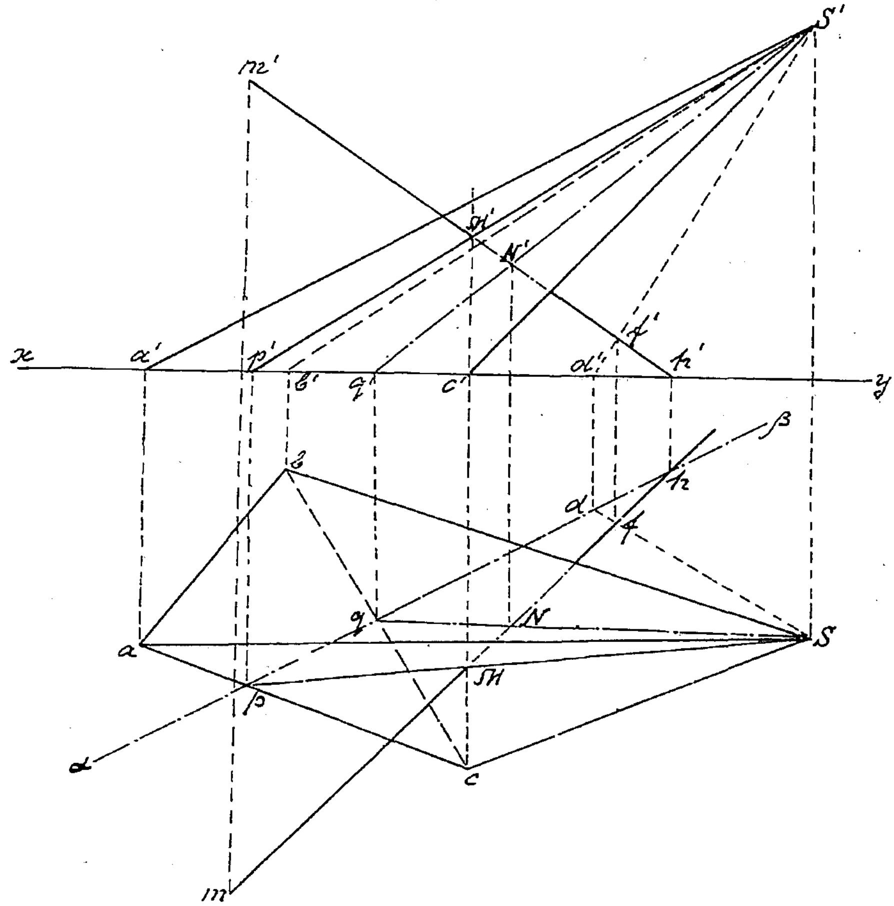


такъ (черт.216): находятъ точки встрѣчи реберъ пирамиды съ данной плоскостью и точки, принадлежащія одной грани, соединяютъ прямыми, черезъ что и получаютъ искомый многоугольникъ сѣченія. Такъ для полученія точки (n, n'), въ которой ребро $(Sc,\ S'c')$ пересѣкаетъ плоскость $\alpha\beta\gamma$, проводятъ черезъ это ребро горизонтально-проектирующую плоскость $z\delta\delta'$ и находятъ прямую $(z\delta,\ z'\delta')$ сѣченія ея съ $\alpha\beta\gamma$; пересѣченіе этой прямой съ ребромъ $(Sc,\ S'c')$ и опредѣлитъ точку (n, n'). Подобно этому мы можемъ построить и остальныя вершины сѣченія. Но это построеніе можно упростить. Для этого замѣтимъ, что горизонтально-проектирующія плоскости различныхъ реберъ пересѣкутся по прямой $(S, S'S'')$, перпендикулярной къ горизонтальной плоскости проекцій. Найдемъ точку (S, S''), въ которой прямая $(S, S'S'')$ пересѣкаетъ плоскость $\alpha\beta\gamma$. (На чертежѣ 216 указано построеніе этой точки.) При помощи этой точки (S, S'') легко построить проекціи вершинъ многоугольника сѣченія. Такъ для построенія вершины (k, k') достаточно ребро Se продолжить до встрѣчи съ $\alpha\beta$ въ точкѣ q, которую спроектировать на ось проекцій въ точку c' и эту послѣднюю соединить съ S'', тогда пересѣченіе прямыхъ $S'e'$ и $c'S''$ опредѣлитъ точку k' - вертикальную проекцію вершины сѣченія; по вертикальной проекціи k' находимъ горизонтальную k. Если плоскость $\alpha\beta\gamma$ совмѣстимъ съ горизонтальной плоскостью проекцій, то легко можемъ построить натуральную величину многоугольника сѣченія.

З А Д А Ч А. Построить точки встрѣчи прямой $(mh, m'h')$ съ поверхностью пирамиды $(Sabc,\ S'a'b'c')$ (черт. 217).

Положимъ, что намъ дана пирамида $(Sabc,\ S'a'b'c')$, ко-

Черт. 217.

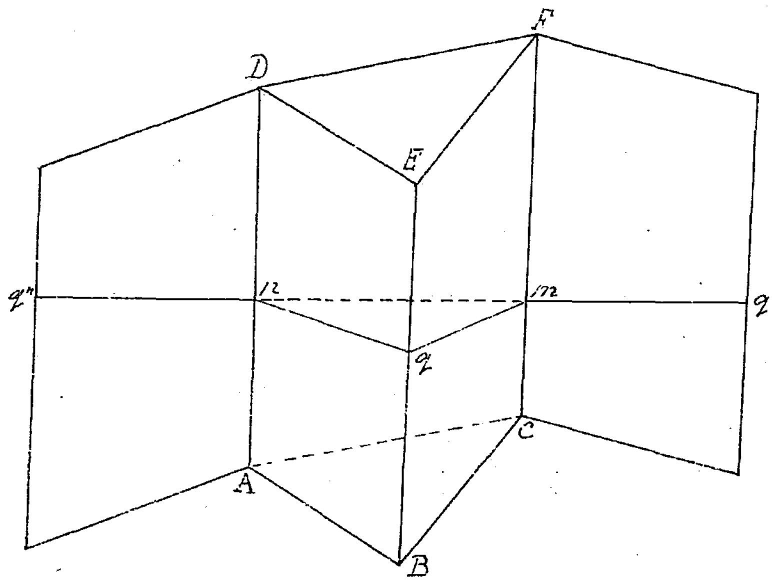


торую пересѣкаетъ прямая (mh, m'h'). Для рѣшенія задачи надо черезъ данную прямую провести какую-нибудь плоскость; обыкновенно проводятъ или проектирующую плоскость данной прямой, или же плоскость, проходящую черезъ вершину пирамиды. Проведемъ плоскость черезъ данную прямую (mh,m'h') и вершину (S,S'); для этого на прямой (mh, m'h') беремъ произвольную точку (f,f'), которую соединяемъ съ вершиной (S,S'), и черезъ эти двѣ прямыя (fS, f'S') и (mh,m'h') проводимъ плоскость, горизонтальный слѣдъ которой $\alpha\beta$ пройдетъ черезъ горизонтальные слѣды этихъ прямыхъ. Слѣдъ $\alpha\beta$ встрѣтитъ плоскость основанія пирамиды въ точкахъ p и q. соединяя которыя съ вершиной (S,S'), получимъ прямыя (pS, p'S') и (qS, q'S'), по которымъ проведенная плоскость пересѣкаетъ поверхность пирамиды. Искомыя точки встрѣчи должны лежать какъ на этихъ прямыхъ, такъ и на данной прямой, слѣдовательно ихъ горизонтальныя проекціи будутъ M и N, а вертикальныя - M' и N'. Такимъ образомъ искомыя точки встрѣчи будутъ (M,M') и (N,N'). Если бы случилось, что слѣдъ $\alpha\beta$ не пересѣкаетъ горизонтальной проекціи основанія, то и прямая (mh, m'h') не пересѣкала бы пирамиды. Если (m,m') - матеріальная точка, а (mh, m'h') - направленіе свѣтового луча, то (M,M') выразитъ падающую тѣнь отъ данной точки (m,m') на поверхность пирамиды.

РАЗВЕРТЫВАНІЕ ПРИЗМЪ И ПИРАМИДЪ.

Развернуть поверхность призмы - значитъ построить такой многоугольникъ, площадь котораго равнялась бы поверхности призмы. Этотъ многоугольникъ долженъ состоять изъ ряда параллелограммовъ, составляющихъ боковую поверхность призмы и расположенныхъ въ томъ же порядкѣ, въ какомъ они расположены на поверхности призмы; если къ полученному многоугольнику присоединимъ еще многоугольники основаній, то и получимъ искомую развертку. Положимъ, нужно развернуть на плоскости чертежа поверхность призмы (черт.218), которая основаніемъ поставлена на горизонтальную плоскость и боковыя ребра которой параллельны вертикальной плоскости проекцій. Въ этомъ случаѣ вертикальныя проекціи боковыхъ

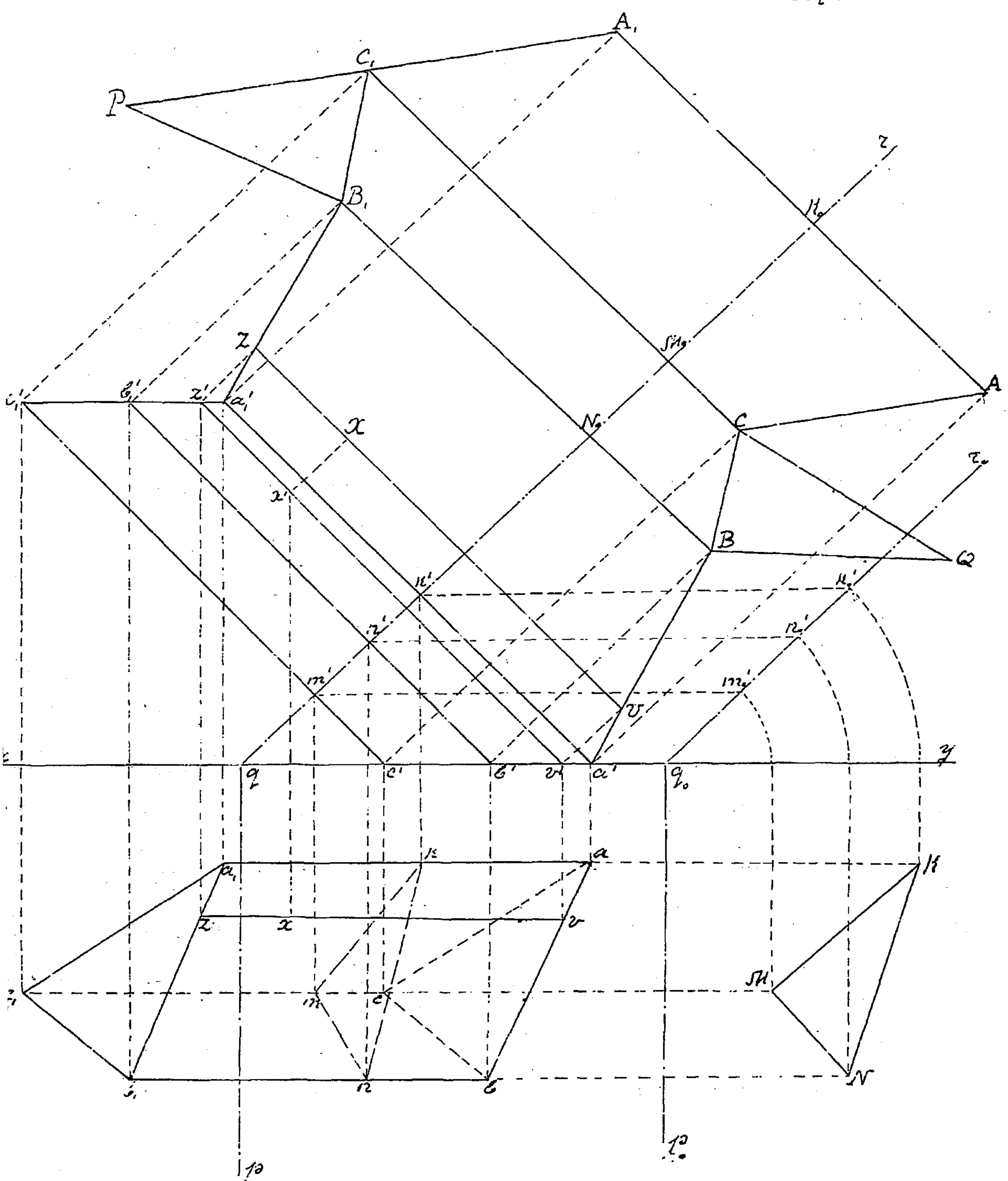
Черт.218.



реберъ будутъ выражать натуральную ихъ величину. Такое положенiе призмы мы беремъ для большей простоты построенiя ея развертки. Если бы боковыя ребра не были параллельны вертикальной плоскости, то посредствомъ перемѣны плоскостей проекцiй мы могли бы притти къ предыдущему случаю. При разверткѣ поверхности призмы периметръ перпендикулярнаго ея сѣченiя развертывается въ прямую, перпендикулярную къ боковымъ ребрамъ. Чтобы это доказать, положимъ, что mnq (черт.218) есть перпендикулярное сѣченiе призмы ABCDEF. Развернемъ поверхность этой призмы въ плоскость, для чего грань ADFC примемъ за ту плоскость, на которой будемъ строить развертку призмы, и съ этой плоскостью совмѣстимъ остальныя грани. Для этого разрѣжемъ призму по ребру BE и грань BEFC совмѣстимъ съ плоскостью грани ACFD, вращая около FC, тогда прямая mq приметъ положенiе mq', перпендикулярное къ FC, слѣдовательно mnq' будетъ перпендикулярна къ FC. Точно такъ же DEBA совмѣстимъ съ плоскостью грани ADFC, вращая около AD, тогда линiя nq приметъ положеніе nq", при чемъ nq" перпендикул. AD, но mn перпендикул. AD, слѣдовательно q"n есть продолженіе nq', т.е. развертка перпендикулярнаго сѣченія есть прямая линія, перпендикулярная къ боковымъ ребрамъ призмы. Этимъ свойствомъ перпендикулярнаго сѣченія будемъ пользоваться при построеніи развертки призмы.

Пересѣчемъ нашу призму плоскостью, перпендикулярной къ боковымъ ребрамъ (черт.219); горизонтальный слѣдъ ея pq - перпендикуляренъ къ xy, а вертикальный qr - перпендикуляренъ къ вертикальнымъ проекціямъ боковыхъ реберъ призмы. Построимъ сѣченіе призмы съ этой плоскостью. Для этого построимъ точки встрѣчи (m,m'), (n,n') и (k,k') боковыхъ реберъ съ плоскостью pqr и, соединивъ ихъ, получимъ горизонтальную проекцію mnk периметра перпендикулярнаго сѣченія; вертикальная его проекція m'n'k' выразится прямой. Для построенія развертки призмы надо знать натуральную величину сѣченія, поэтому совмѣстимъ плоскость pqr съ горизонтальной плоскостью. Но, чтобы не усложнять чертежа, сдѣлаемъ это совмѣщеніе на сторонѣ, для чего на оси проекцій беремъ произвольную точку q_o и черезъ нее проводимъ плоскость $p_o q_o r_o$, параллельную pqr, переносимъ точки m', n', k' въ m_o', n_o', k_o', проведя черезъ нихъ параллели оси. Затѣмъ плоскость $p_o q_o r_o$ совмѣщаемъ съ горизонтальной и находимъ совмѣщенное положеніе вершинъ перпендикулярнаго сѣченія, т.е. точки M, N и K; соединяя ихъ, получимъ натуральную величину MNK этого сѣченія. Зная длину сторонъ перпендикулярнаго

Черт. 219.



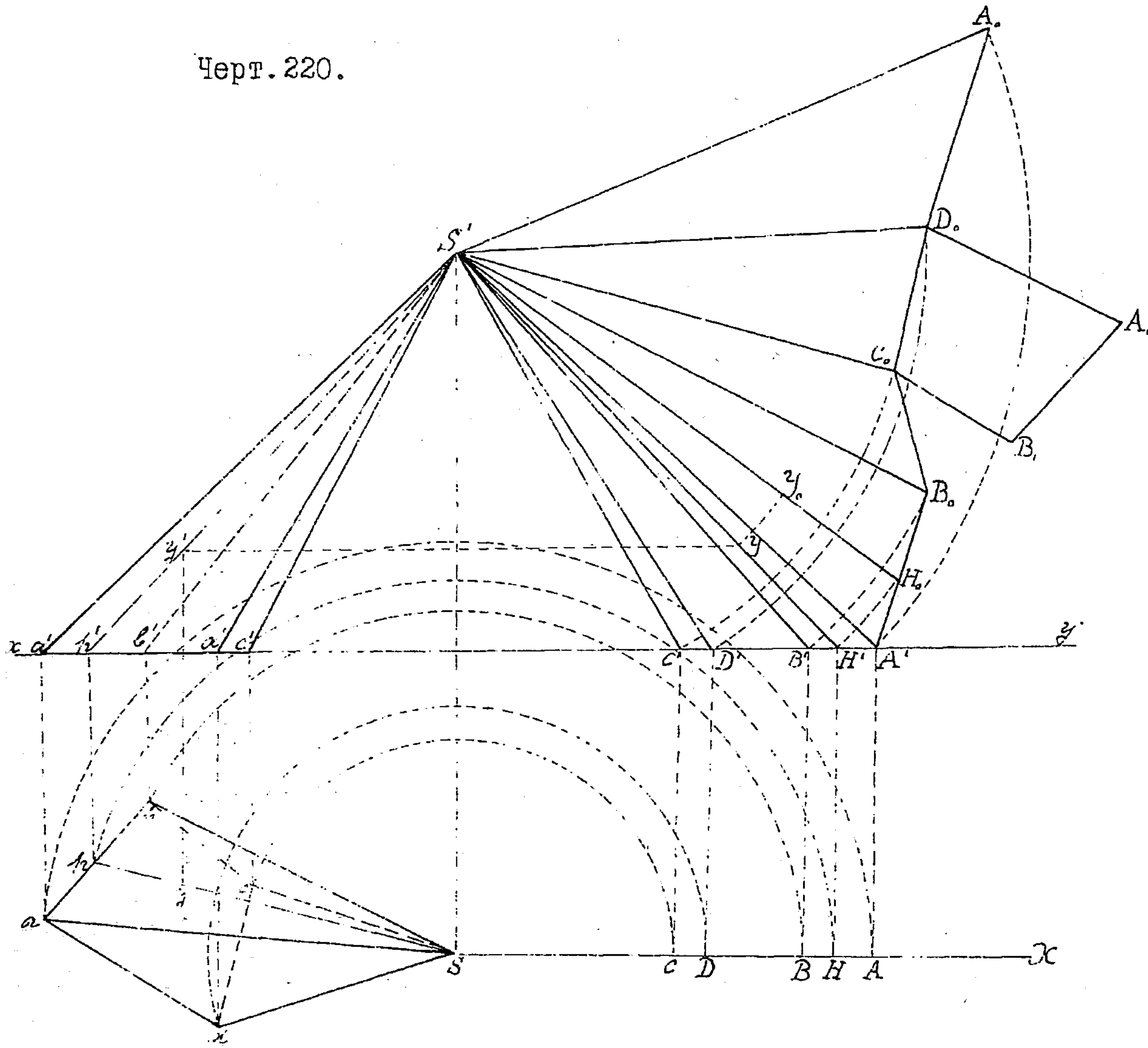
сѣченія и длину боковыхъ реберъ призмы, мы можемъ построить и ея развертку. Для этого за начало развертки примемъ ребро $a'a'_1$ и строимъ на немъ грань (aba_1b_1, $a'b'a'_1b'_1$), для чего на прямой qr отъ точки k' откладываемъ длину $k'N_o = KN$ и черезъ точку N_o проводимъ $BB_,$ паралл. $a'a'_,$ до встрѣчи съ перпендикулярами, опущенными на эту параллель изъ точекъ b' и $b'_,$, черезъ что получимъ точки B и $B_,$, соединивъ которыя съ a' и $a'_,$, получаемъ параллелограммъ $a'a'_,B_,B$, который и выразитъ натуральную величину разсматриваемой грани. Къ этой грани строимъ слѣдующую грань: $(bcb_,c_,,\ b'c'b'_,c'_,)$, для чего отъ точки N_o, на прямой qr, откладываемъ $N_oM_o = NM$; черезъ M_o проводимъ линію $CC_,$ парал. $BB_,$ и черезъ точки c' и $c'_,$ проводимъ параллели qr; получимъ точки C и $C_,$, соединивъ которыя и получимъ другой параллелограммъ $BB_,C_,C$, выражающій натуральную величину грани $(bcb_,c_,,\ b'c'b'_,c'_,)$. Точно такъ же получимъ параллелограммъ $CC_,A_,A$, выражающій натуральную величину грани $(cac_,a_,,\ c'a'c'_,a'_,)$. Полученный такимъ образомъ многоугольникъ $a'a'_,B_,C_,A_,ACB$ представляетъ развертку боковой поверхности призмы; при этомъ ломаная линія $a'BCA$ называется преобразованіемъ одного основанія, а ломаная линія $a'_,B_,C_,A_,$ — преобразованіемъ другого. Если на сторонахъ CB и $C_,B_,$ построимъ треугольники CBQ и $C_,PB_,$, равные основанію призмы, то получимъ фигуру $a'a'_,B_,PC_,A_,CQB$, площадь которой будетъ равна поверхности всей призмы, т.е. будемъ знать развертку призмы. Если по разверткѣ желаютъ получить призму въ натуральную величину, то ее чертятъ, напр., на листѣ жести или картона, потомъ перегибаютъ по ребрамъ $BB_,$ и $CC_,$ такъ, чтобы ребро $AA_,$ совпало съ $a'a'_1$, тогда ломаная линія $a'BCA$ образуетъ сомкнутый контуръ, который будетъ выражать основаніе призмы; ломаная линія $a'_1B_1C_1A_1$ будетъ выражать другое основаніе, и если перегнуть треугольники BCQ и B_1C_1F около BC и B_1C_1, то они закроютъ оба основанія призмы. Такимъ образомъ по разверткѣ мы воспроизводимъ призму въ натуральную величину. Если мы имѣемъ какую-нибудь точку x на поверхности призмы (черт. 219), то можемъ найти ея положеніе на разверткѣ. Положимъ, точка x находится на грани (ab, a_1b_1); проведемъ черезъ нее образующую zv, вертикальная проекція которой будетъ $z'v'$, и построимъ вертикальную проекцію данной точки x'. Найдемъ положеніе образующей $(zv, z'v')$ на разверткѣ. Для этого изъ точки z' опускаемъ перпендикуляръ на $a'a'_1$ до встрѣчи съ a'_1B_1 и черезъ полученную точку Z проводимъ ZV параллел. $a'a'_1$; если изъ x' опустимъ перпендикуляръ на ZV, то и получимъ точку X – положеніе точки (x, x') на разверткѣ.

Обратно, имѣя точку X на разверткѣ, мы можемъ найти ея положеніе на призмѣ. Для этого черезъ точку X проводимъ ZV параллел. $a'a'_1$ и по этому положенію образующей находимъ ея проекціи $(zv, z'v')$, на которыхъ должны лежать проекціи точки X, т.е. точки x и x'. Такимъ образомъ, если мы имѣемъ на поверхности призмы какую-нибудь фигуру, то можемъ найти ея положеніе на разверткѣ, и обратно: имѣя какую-нибудь фигуру на разверткѣ, можемъ найти ея положеніе на призмѣ.

РАЗВЕРТЫВАНІЕ ПИРАМИДЫ.

Положимъ, дана пирамида, поставленная основаніемъ на горизонтальную плоскость (черт.220), тогда ребра основанія проектируются на горизонтальную плоскость въ натуральную величину. Для того, чтобы развернуть поверхность пирамиды въ плоскость, мы должны построить на плоскости рядъ треугольниковъ, составляющихъ ея боковую поверхность и расположенныхъ въ томъ же порядкѣ, въ какомъ они расположены на поверхности пирамиды. Построивъ ихъ, мы получимъ нѣкоторый многоугольникъ, площадь котораго равна боковой поверхности пирамиды. Чтобы построить рядъ сказанныхъ треугольниковъ, надо знать длины ихъ сторонъ, а для этого необходимо построить натуральную величину боковыхъ реберъ по ихъ проекціямъ. Натуральная длина реберъ основанія пирамиды извѣстна - это суть горизонтальныя проекціи реберъ основанія. Для опредѣленія длины боковыхъ реберъ, вращаемъ ихъ около оси, перпендикулярной къ горизонтальной плоскости и проходящей черезъ вершину пирамиды (S,S') до положенія, параллельнаго вертикальной плоскости горизонтальныя ихъ проекціи примутъ положеніе прямой SX, параллельной оси проекціи xy, а вертикальныя опредѣлятъ натуральную длину боковыхъ реберъ; такимъ образомъ вертикальныя проекціи S'A', S'B', S'C' и S'D' - новаго положенія боковыхъ реберъ данной пирамиды опредѣляютъ натуральную длину ихъ,) т.е. S'A' выражаетъ длину ребра (Sa,S'a'), S'B' - ребра (Sb, S'b') и т.д.... Найдя длины боковыхъ

Черт. 220.



реберъ, приступимъ къ построенію треугольниковъ, составляющихъ боковую поверхность пирамиды. Для этого принимаемъ прямую S'A' за начало развертки и строимъ на ней треугольникъ $A'S'B_0$, который и выразитъ натуральную величину грани (Sab, S'a'b'). На линіи $S'B_0$ строимъ треугольникъ $S'B_0C_0$, который равенъ грани (Sbc, S'b'c'). Потомъ на линіи $S'C_0$ строимъ треугольникъ $S'C_0D_0$, равный грани (Scd, S'c'd') и, наконецъ, на линіи $S'D_0$ строимъ треугольникъ $S'A_0D_0$, равный грани (Sda, $S'd'a'$); построивъ эти треугольники, мы получимъ многоугольникъ $S'A_0D_0C_0B_0A'$, который и будетъ выражать развертку боковой поверхности пирамиды, при чемъ ломаная линія $A'B_0C_0D_0A_0$ выразитъ ту линію, въ которую развертывается основаніе пирамиды. Эта линія относительно основанія пирамиды называется ея преобразованіемъ. Если на одной изъ сторонъ преобразованія, положимъ на C_0D_0, построимъ многоугольникъ $C_0D_0B_1A_1$, равный основанію пирамиды, то получимъ фигуру $S'A_0D_0A_1B_1C_0B_0A'$, площадь которой равна полной поверхности пирамиды. Если на поверхности пирамиды находится какая-нибудь точка (y,y'), то легко построить ея положеніе на разверткѣ; для этого построимъ на разверткѣ положеніе образующей (Sh, $S'h'$), проходящей черезъ точку (y,y'), а для этого нужно отъ точки A', по направленію $A'B_0$, отложить $A'H_0 = ah$. Соединяя S' съ H_0, получимъ прямую $S'H_0$, которая будетъ выражать положеніе образующей (Sh, $S'h'$) на разверткѣ пирамиды. Точка (y,y') должна находиться на этой линіи на разстояніи отъ вершины пирамиды, равномъ (Sy, $S'y'$). Натуральная длина $S'Y_0$ разстоянія (Sy,$S'y'$) получится, когда линію (Sh, $S'h'$) повернемъ около той же оси, около которой вращали боковыя ребра, до положенія, параллельнаго вертикальной плоскости проекцій, и построимъ новое положеніе Y - точки (y,y') Обратно, если па разверткѣ пирамиды дана какая-нибудь точка Y_0, то ее легко получить на поверхности пирамиды, т.е. построить ея проекціи. Для этого соединяемъ точку S' съ данной точкой Y_o и продолжаемъ $S'Y_o$ до встрѣчи съ $A'B_o$, черезъ что получимъ на разверткѣ положеніе образующей $S'H_o$. Находимъ проекціи этой образующей, для чего на ребрѣ основанія горизонтальной проекціи той грани, на которой лежитъ эта образующая, откладываемъ отъ соотвѣтствующей точки разстояніе, равное $A'H_o$, въ нашемъ случаѣ на ребрѣ ab; отложимъ $ah = A'H_o$; точку h соединяемъ съ S и получаемъ горизонтальную проекцію Sh – образующей; по горизонтальной проекціи находимъ вертикальную $S'h'$. Затѣмъ описываемъ изъ точки S' радіусомъ $S'H_o$ дугу до встрѣчи съ xy въ точкѣ H', которую соединяемъ съ S', и изъ S' описываемъ еще дугу радіусомъ $S'Y_o$ до пересѣченія съ $S'H'$ въ точкѣ Y, по которой находимъ y' –искомую вертикальную проекцію. По вертикальной проекціи находимъ горизонтальную y, и такимъ образомъ искомая точка будетъ (y, y'). Итакъ, если на поверхности пирамиды дана какая-нибудь фигура, то ее легко получить и на разверткѣ, и обратно, если на разверткѣ дана какая-нибудь фигура, то ее можно получить и на поверхности пирамиды, т.е. построить ея проекціи. Къ построенію развертки пирамиды прибѣгаютъ въ томъ случаѣ, когда по данному чертежу желаютъ построить пирамиду въ натуральную величину. Для этого на картонѣ вырѣзываютъ развертку, перегибаютъ ее по ребрамъ $S'B_o$, $S'C_o$ и $S'D_o$ такимъ образомъ, чтобы ребро $S'A_o$ совпало съ $S'A'$, тогда ломаная линія $A'B_oC_oD_oA_o$ сомкнется и образуетъ периметръ основанія пирамиды; закрывъ основаніе многоугольникомъ $C_o D_o A_1 B_1$, получимъ пирамиду, по размѣрамъ равную той, которая дана на чертежѣ.

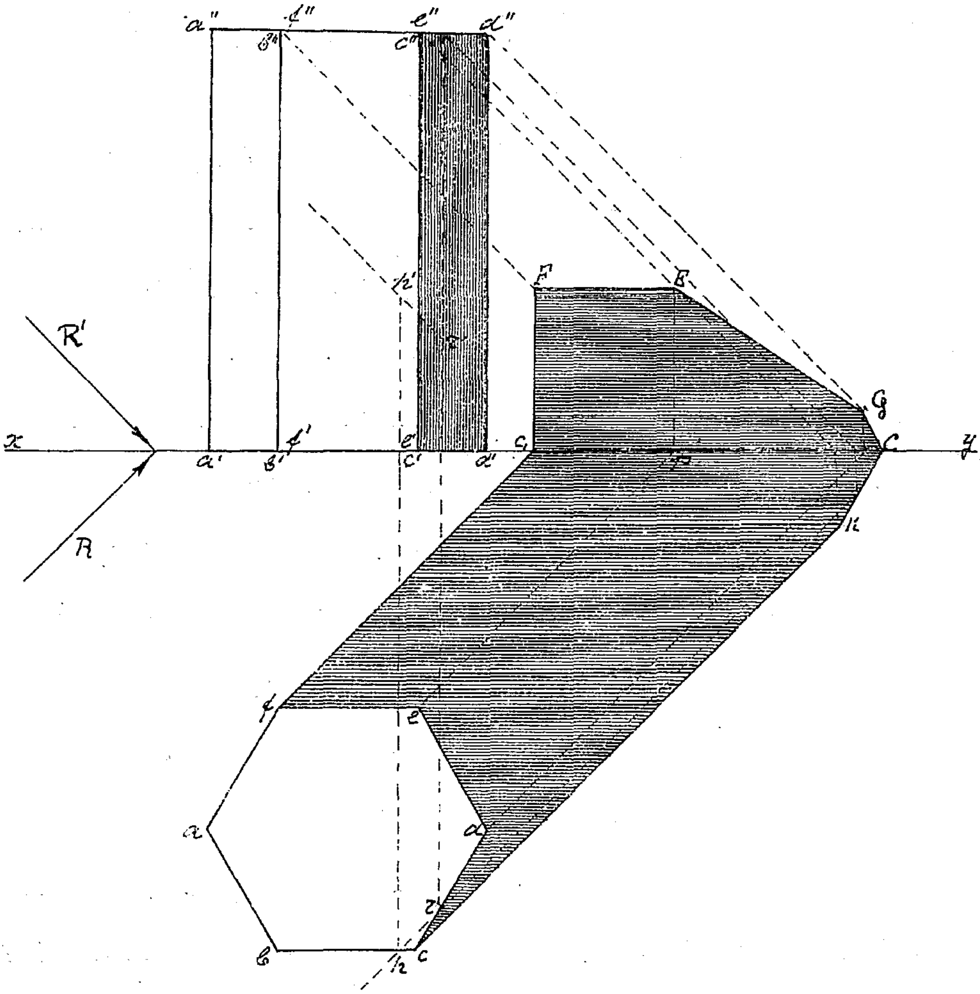
ПОСТРОЕНІЕ ТѢНЕЙ ОТЪ ТѢЛЪ, ОГРАНИЧЕННЫХЪ ПЛОСКОСТЯМИ.

Общій пріемъ построенія собственной и падающей тѣни всякаго тѣла состоитъ въ слѣдующемъ: проводятъ лучи, касательные къ поверхности этого тѣла, параллельно направленію свѣтового луча, тогда совокупность ихъ составитъ цилиндрическую поверхность, обвертывающую данное тѣло, а кривая касанія цилиндра съ даннымъ тѣломъ будетъ служить линіей отдѣла освѣщенной части отъ неосвѣщенной. Такимъ образомъ построивъ линію отдѣла, мы будемъ знать, какая часть нашего тѣла освѣщена и какая находится въ тѣни;эта тѣнь будетъ собственной тѣнью тѣла. Построивъ же сѣченіе обвертывающаго цилиндра съ плоскостями проекцій,мы ограничимъ на нихъ падающую тѣнь.

Если данное тѣло есть многогранникъ, то обвертывающій цилиндръ обратится въ призму съ боковыми ребрами, параллельными направленію даннаго луча, а кривая отдѣла освѣщенной части отъ неосвѣщенной - въ косой многоугольникъ. Посмотримъ, какимъ образомъ можетъ быть построенъ этотъ многоугольникъ или линія отдѣла на многогранной поверхности. Для этого замѣтимъ, что если лучъ освѣщаетъ хотя одну точку разсматриваемой грани, то эта послѣдняя на всемъ своемъ протяженіи будетъ освѣщена, а если нѣтъ, то она будетъ находиться въ тѣни, т.е. на одной и той же грани не можетъ быть одновременно освѣщенныхъ и темныхъ мѣстъ, такъ какъ при параллельности падающихъ лучей они будутъ одинаково наклонены къ разсматриваемой грани. Если обнаружимъ, что одна грань тѣла освѣщена, а другая нѣтъ, то линія отдѣла будетъ принадлежать линіи ихъ сѣченія, т.е. ребру разсматриваемаго тѣла. Такимъ образомъ, зная освѣщенныя и темныя грани, легко опредѣлить линію отдѣла. Итакъ, для возможности нахожденія линіи отдѣла надо умѣть опредѣлять :- можетъ ли быть освѣщена та или другая грань тѣла при данномъ направленіи лучей свѣта, или, что все равно, можетъ ли быть освѣщена хотя бы одна какая--нибудь точка этой грани.

Объяснимъ этотъ способъ построенія линіи отдѣла на прямой призмѣ (черт.221), поставленной основаніемъ на горизонтальную плоскость. Для этого на грани (cd, c'd'c"d") беремъ точку (r,r') и смотримъ, можетъ ли она быть освѣщена при данномъ направленіи (R,R') свѣтового луча; оказывается, что эта точка не можетъ быть освѣщена потому, что лучъ, проведенный черезъ нее параллельно (R,R'), пересѣкаетъ грань (bc, b'c'b"c") въ точкѣ (h,h'), которая его и задерживаетъ. Точки (h,h') свѣтовой лучъ достаетъ безпрепятственно, а потому эта точка, а слѣдовательно и грань освѣщены, грань же (cd, c'd'c"d") находится въ тѣни. Поэтому ребро (c, c'c") принадлежитъ

Черт.221.



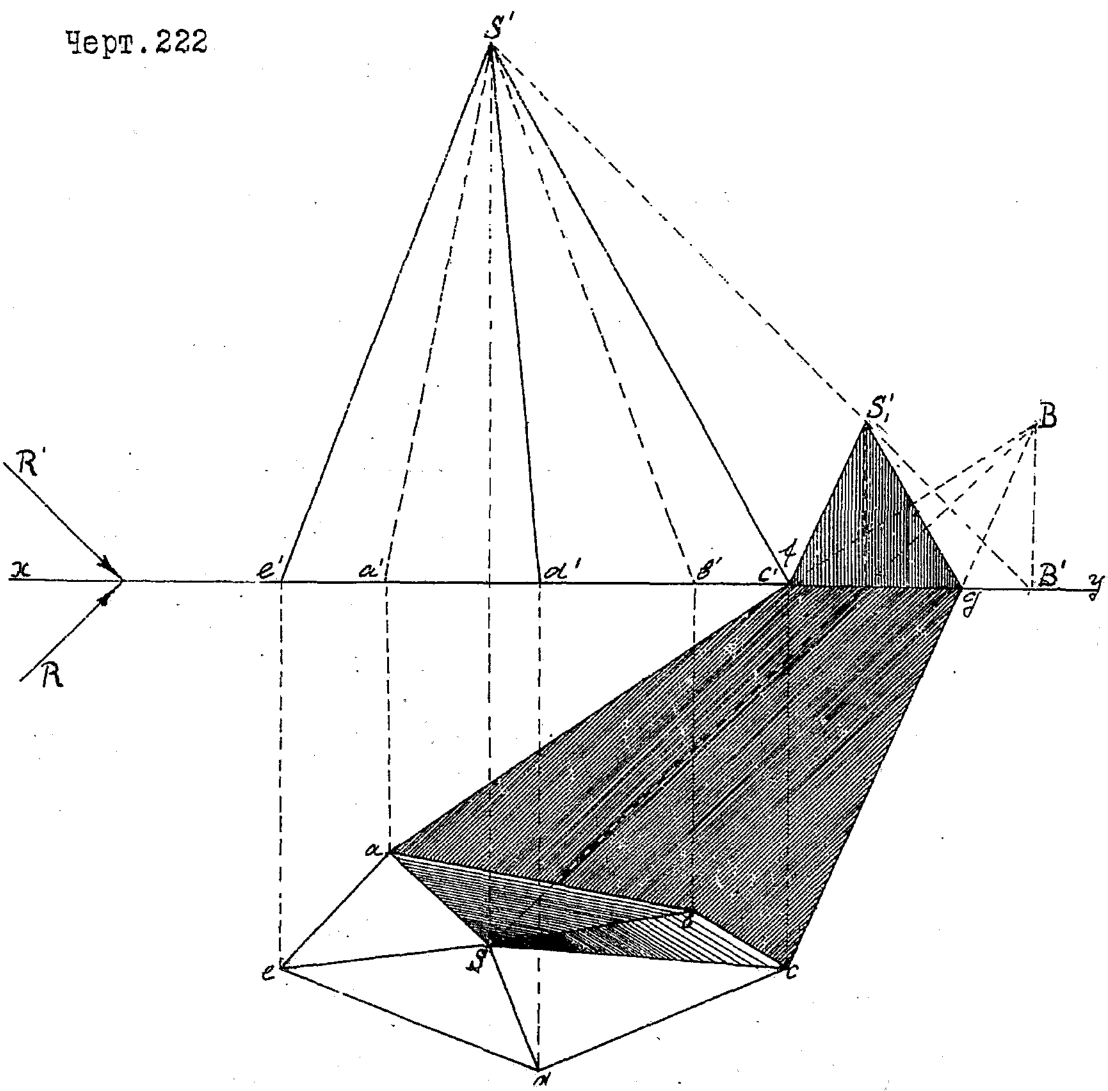
линіи отдѣла. Такимъ образомъ найдемъ, что грани, горизонтальныя проекціи которыхъ суть af, ab, bc, и верхнее основаніе призмы - освѣщены, а остальныя грани - въ тѣни, поэтому линія отдѣла будетъ итти по ребрамъ: (c, c'c") + + (cd, c"d") + (de, d"e") + (ef, e"f") + (f, f'f") + + (af, a'f') + (ab, a'b') + (bc, b'c'). Построивъ тѣнь kcbafc, FEGCk отъ линіи отдѣла на плоскостяхъ проекцій, получимъ падающую тѣнь отъ даннаго тѣла. Линію отдѣла освѣщенной части призмы отъ неосвѣщенной можно еще построить такъ: черезъ одно изъ боковыхъ реберъ, напримѣръ (e,e'e") призмы проводимъ плоскость epE, параллельно направленію падающаго луча, и находимъ слѣдъ ея ep на плоскости нижняго основанія; тогда плоскости, параллельныя построенной и касательныя къ данной призмѣ, будутъ тѣми предѣльными плоскостями, которыя ребрами касанія раздѣляютъ призму на освѣщенную и темную части. Для нашей призмы (черт.221) плоскость epE, проведенная черезъ боковое ребро параллельно (R,R'), будетъ плоскостью, горизонтально-проектирующей лучъ (R,R'), поэтому горизонтальный слѣдъ ея ep будетъ параллеленъ горизонтальной проекціи R падающаго луча; вслѣдствіе этого, если черезъ вершины f и c основанія проведемъ линіи fc, и ck параллельно R, то онѣ будутъ касательны къ основанію и будутъ служить горизонтальными слѣдами тѣхъ плоскостей, которыя ребрами касанія (f, f'f") и (c, c'c") раздѣлятъ призму на части: освѣщенную (горизонтальная проекція fabc) и неосвѣщенную (остальная часть). Зная, что верхнее основаніе освѣщено, а нижнее - нѣтъ, легко получить остальную часть линіи отдѣла, а построивъ отъ нея падающую тѣнь, найдемъ и тѣнь призмы.

Падающая тѣнь близъ реберъ fe, ed и dc будетъ сильнѣе, чѣмъ тѣнь, находящаяся дальше отъ нихъ. Собственная тѣнь на грани (dc, c'c'd"c") будетъ сильнѣе около ребра (c, c'c"), чѣмъ около ребра (d, d'd").

ПОСТРОЕНІЕ СОБСТВЕННОЙ И ПАДАЮЩЕЙ ТѢНИ ОТЪ ПИРАМИДЫ, СТОЯЩЕЙ НА ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ ПРОЕКЦІЙ.

Построимъ линію отдѣла освѣщенной части пирамиды отъ неосвѣщенной (черт.222). Для этого проведемъ черезъ вершину пирамиды линію (SB, S'B'), параллельную направленію луча падающаго свѣта, и найдемъ слѣды ея B и S'₁ на плоскостяхъ проекцій. На горизонтальной проекціи основанія пирамиды выбираемъ такія точки a и c, чтобы при сое-

Черт.222

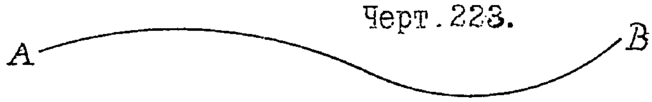


диненіи ихъ съ B - горизонтальнымъ слѣдомъ проведеннаго луча - получить двѣ линіи aB и Bc, не пересѣкающія основанія пирамиды; тогда плоскости aSB и cSB, будучи параллельны направленію свѣтового луча, коснутся пирамиды по ребрамъ (aS, a'S') и (Sc, S'c'), которыя и раздѣлятъ боковую поверхность пирамиды на свѣтлую и темную части, такъ что линія отдѣла будетъ (aS, a'S') и (Sc, S'c').Построимъ падающую тѣнь на плоскостяхъ проекцій. Для этого построимъ падающую тѣнь отъ линіи отдѣла Понятно, что тѣнь отъ ребра (aS, a'S') на горизонтальной плоскости будетъ af, а на вертикальной - fS_1', отъ ребра (Sc, S'c') - будетъ cgS_1'. Собственная тѣнь пирамиды будетъ на граняхъ (aSb, a'S'b') и (Scb, S'b'c'); горизонтальная проекція этой тѣни на нашемъ чертежѣ видима, а вертикальная - невидима.

КРИВЫЯ ЛИНІИ.

Кривою линіей называется геометрическое мѣсто точки, движущейся въ пространствѣ по какому-нибудь закону (или же кривой линіей называется пересѣченіе какихъ-ниб. поверхностей). Если точка при движеніи находится въ одной плоскости, то кривая называется п л о с к о ю, если же это условіе не соблюдается, то кривая называется кривою д в о й н о й к р и в и з н ы. Въ плоской кривой всѣ ея точки находятся въ одной плоскости, тогда какъ въ кривой двойной кривизны точки ея не находятся въ одной плоскости; примѣромъ такой кривой можетъ служить винтовая линія. Кромѣ того кривыя дѣлятся на геометрическія и графическія. Геометрическими кривыми линіями называются такія, законъ образованія которыхъ извѣстенъ и которыя могутъ быть выражены уравненіями; такія кривыя могутъ быть продолжены въ ту или другую сторону. Графическими кривыми называются тѣ, которыя получаются отъ черченія на доскѣ или бумагѣ; такъ, если мы проведемъ произвольную кривую AB

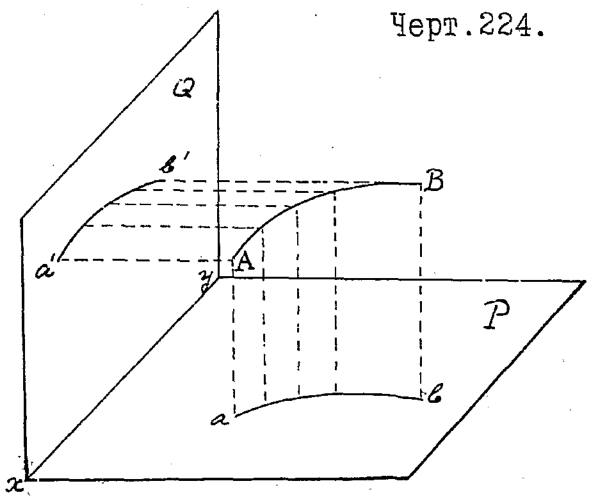
Черт.223.



(черт.223), то она называется графической; такія кривыя не могутъ быть продолжены въ ту или другую сторону, потому что законъ образованія ихъ неизвѣстенъ.

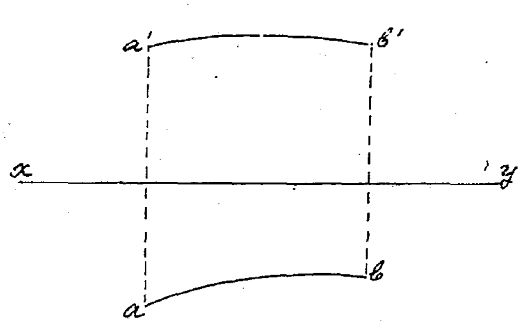
Кривыя линіи, какъ и прямыя, въ начертательной геометріи выражаются проекціями. Чтобы получить проекціи какой-нибудь кривой AB (черт.224) на плоскостяхъ проекцій P и Q, мы должны изъ различныхъ точекъ кривой опустить перпендикуляры на горизонтальную и вертикальную плоскости проекцій. Проектирующія различныхъ точекъ кривой на какую-нибудь плоскость проекцій будутъ между собой параллельны; совокупность такихъ прямыхъ составитъ цилиндрическую поверхность, поэтому совокупность горизонтально-проектирующихъ составитъ горизонтально-проектирующую поверхность, а совокупность вертикально-проектирующихъ - вертикально-проектирующую поверхность, и на проекцію кривой мы можемъ смотрѣть какъ на сѣченіе проектирующей поверхности съ пло-

Черт.224.



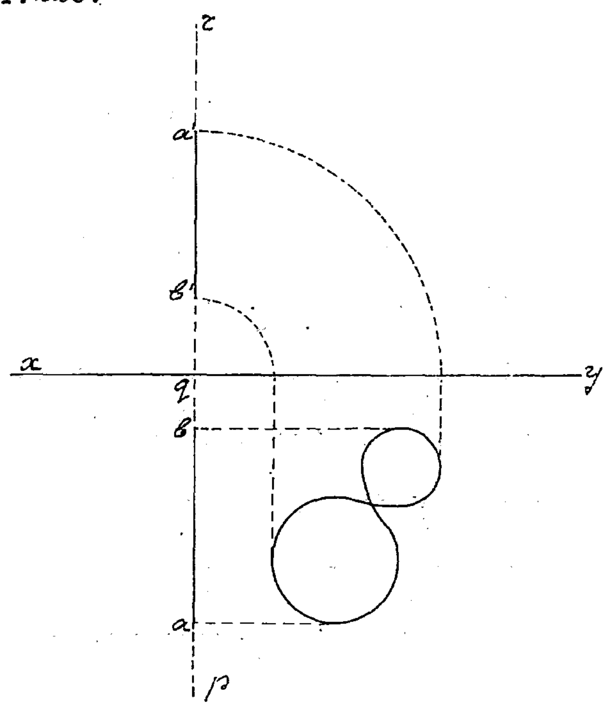
скостью проекцій. Въ нашемъ примѣрѣ (чертежъ 224) горизонтальной проекціей будетъ кривая ab, проходящая черезъ подошвы горизонтально-проектирующихъ, а вертикальной - кривая a'b', проходящая черезъ подошвы вертикально-проектирующихъ прямыхъ. Если проекціи кривой на плоскостяхъ проекцій даны, то дана и кривая, лежащая въ пространствѣ, потому что если черезъ проекціи проведемъ проектирующія поверхности, то пересѣченіе ихъ и дастъ кривую. Такимъ образомъ вмѣсто кривой мы можемъ разсматривать ея проекціи. Если плоскости проекцій совмѣстимъ, то обѣ проекціи кривой расположатся на одной плоскости; при этомъ проекціи кривой могутъ имѣть различныя положенія относительно оси (черт.225). Это зависитъ отъ

Черт:225:



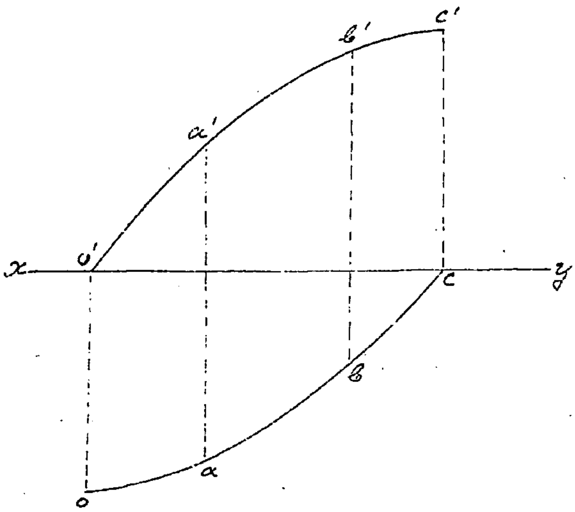
того, въ какомъ изъ угловъ пространства находится разсматриваемая часть кривой и какъ она расположена относительно плоскостей проекцій. Проекціями кривой вообще служатъ кривыя, но въ частныхъ случаяхъ проекціями кривой могутъ служить и отрѣзки прямыхъ, при чемъ это обстоятельство указываетъ на то, что кривая будетъ плоскою. Если плоскость кривой наклонена къ обѣимъ плоскостямъ проекцій, то проекціями кривой будутъ кривыя линіи, если плоскость кривой перпендикулярна къ одной изъ плоскостей проекцій, то кривая проектируется на эту плоскость въ прямолинейный отрѣзокъ. Если кривая - плоская и притомъ находится въ профильной плоскости, то обѣ ея проекціи выразятся прямолинейными отрѣзками (ab, a'b') (черт. 226), перпендикулярными къ оси xy, а для того, чтобы имѣть понятіе о формѣ кривой, мы должны имѣть совмѣщенное положеніе этой кривой на одной изъ плоскостей проекцій. При такихъ условіяхъ мы можемъ построить проекціи какой угодно точки, принадлежащей данной кривой.

Черт. 226.



Если обѣ проекціи кривой суть линіи кривыя, то линія, ими опредѣляемая, можетъ быть и плоской кривой, и кривой двойной кривизны. Положимъ, намъ нужно по даннымъ

Черт.227

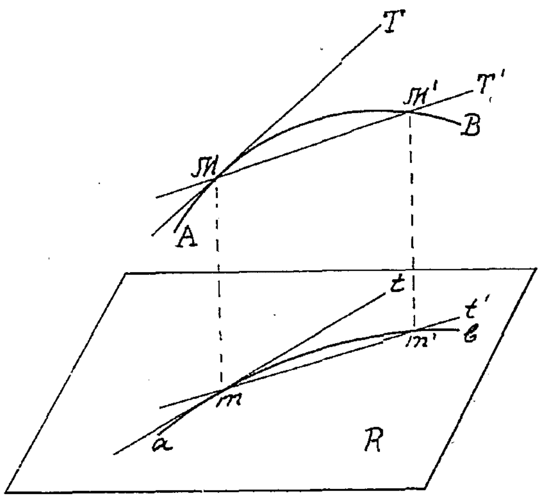


проекціямъ кривой(ac, a'c') (черт.227)узнать, будетъ ли она плоскою или двойной кривизны. Для этого беремъ на кривой три точки(a,a'), (b,b') и (c,c') и черезъ нихъ проводимъ плоскость, и затѣмъ смотримъ, будутъ ли находиться остальныя точки кривой въ этой плоскости: если будутъ, то кривая - плоская, въ противномъ случаѣ она - двойной кривизны. Иногда по проекціямъ кривой можно сдѣлать заключеніе о томъ, будетъ ли данная кривая плоская или двойной кривизны: если одна изъ проекцій кривой - прямая линія, то сама кривая будетъ плоскою, если же одна проекція будетъ сомкнутая кривая, а другая - отрѣзокъ вогнутой или выпуклой кривой, то сама кривая будетъ двойной кривизны. Вообще, когда форма одной проекціи кривой рѣзко отличается отъ другой, то это обстоятельство служитъ признакомъ того, что кривая -двойной кривизны.

Слѣдами кривой называются точки встрѣчи ея съ плоскостями проекцій. Положимъ, надо построить слѣды кривой (ab, a'b') (черт.227). Тогда изъ точки встрѣчи вертикальной проекціи съ осью возставляемъ къ ней перпендикуляръ oo' до пересѣченія съ горизонтальной проекціей въ точкѣ o, которая и будетъ горизонтальнымъ слѣдомъ кривой, а возставивъ перпендикуляръ cc' изъ точки встрѣчи горизонтальной проекціи съ осью до встрѣчи съ вертикальной проекціей кривой, получимъ точку c', которая будетъ вертикальнымъ слѣдомъ кривой. Если же проекціи кривой не пересѣкаютъ оси проекцій, то слѣды кривой не всегда можно построить. Если кривая геометрическая, т.е. такая, законъ образованія которой извѣстенъ, то слѣды ея можно построить, потому что такую кривую можно продолжить; если же кривая графическая, то слѣдовъ ея нельзя построить, потому что, не зная закона ея теченія, ее нельзя продолжить. Кривая линія можетъ имѣть или одинъ, или два, или нѣсколько слѣдовъ, но можетъ случиться, что не имѣетъ ни одного; это зависитъ отъ вида кривой и ея расположенія относительно плоскостей проекцій; напримѣръ, окружность можно расположить такъ, что она будетъ имѣть два слѣда, или такъ, что она не будетъ имѣть ни одного. Если данная кривая есть синусоида, то она можетъ имѣть или нѣсколько слѣдовъ, или ни одного.

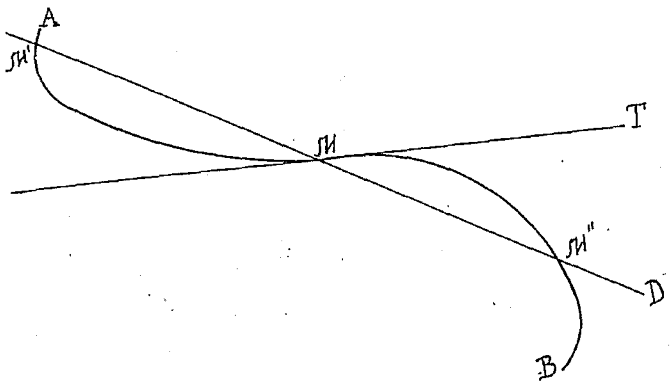
Касательною къ кривой въ данной точкѣ называется предѣльное положеніе сѣкущей, къ которому она стремится, когда другая ея точка пересѣченія стремится совпасть съ первой. Такимъ образомъ, если точка M' (черт.228) -пересѣченія сѣкущей MT' съ кривой AB - стремится совпасть съ точкой M, то сѣкущая MT' стремится къ своему предѣльному положенію MT, которое и называется касательной къ

Черт. 228.



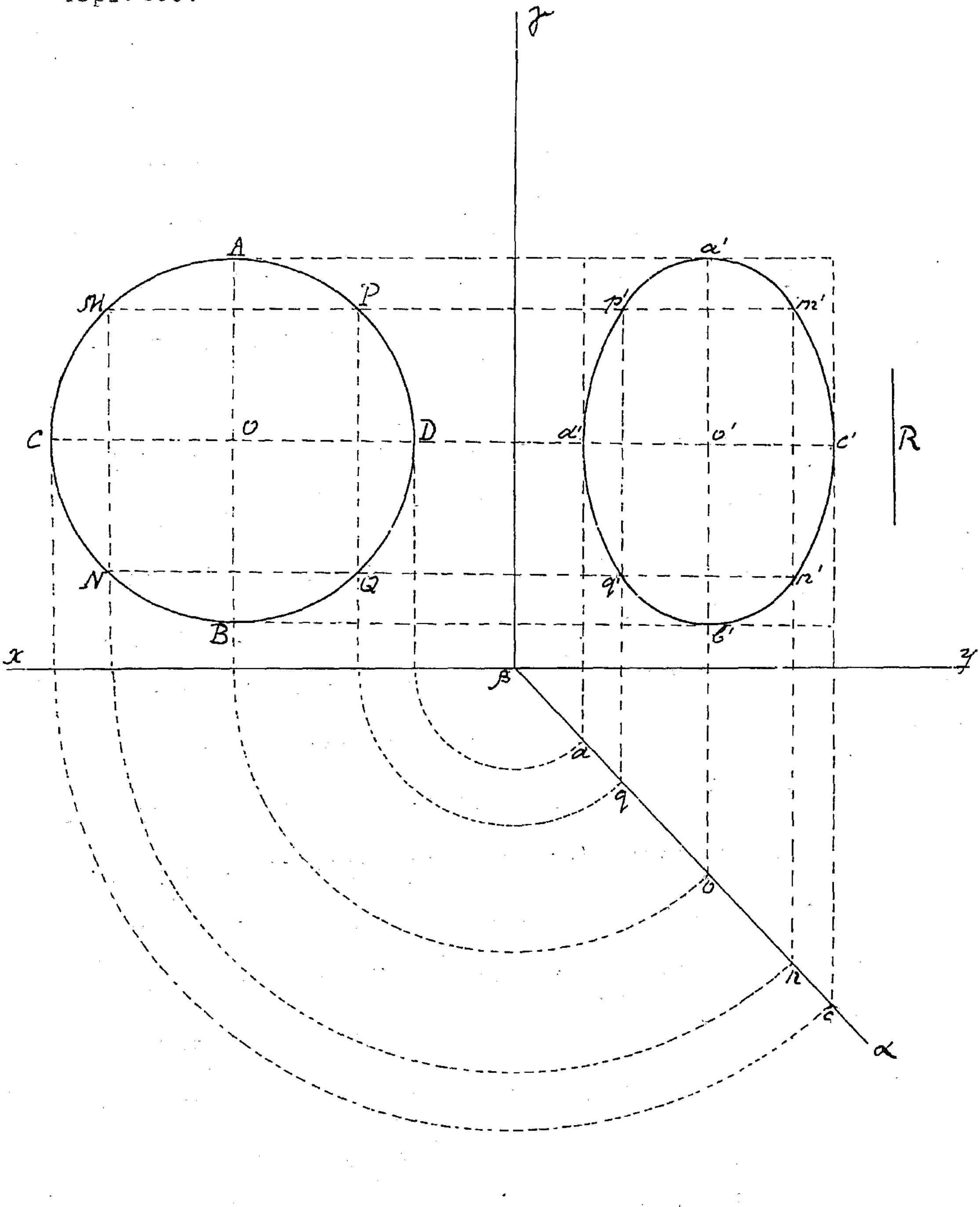
данной точкѣ М. Относительно касательной докажемъ слѣдующую теорему: „если прямая касается кривой, то ея проекція касается проекціи кривой" (черт. 228). Для доказательства проводимъ сѣкущую MT' и находимъ ея проекцію mt' на плоскости R. Если точка M' приближается къ М, то и m' приближается къ m, и когда M' совпадетъ съ М, т.е. сѣкущая MT' обратится въ касательную MT, то и сѣкущая mt' обратится въ касательную mt къ кривой ab. Это и показываетъ, что если прямая касательна къ кривой, то ея проекціи касается проекція этой кривой. Такимъ образомъ, чтобы провести касательную въ какой-нибудь точкѣ кривой, данной проекціями, достаточно построить касательныя къ проекціямъ этой кривой въ разсматриваемой точкѣ, которыя и опредѣлятъ касательную къ кривой въ пространствѣ. Нужно замѣтить, что существуютъ способы проведенія касательныхъ только къ геометрическимъ кривымъ; зная уравненіе кривой, мы можемъ строго провести къ ней касательную; къ графической же кривой можно провести касательную только приблизительно. Касательная можетъ и пересѣкать кривую; такъ, напримѣръ, если сѣкущая вращается около точки М (черт.

Черт.229.



229-ый), такъ что точки M' и M" стремятся совпасть съ M, то предѣльнымъ положеніемъ этой сѣкущей будетъ прямая T, касательная къ точкѣ M, въ которой она въ то же время пересѣкаетъ кривую. Въ точкѣ M кривая изъ вогнутой становится выпуклой: эта точка M называется т о ч к о й п е р е г и б а. Вообще, касательная къ кривой можетъ имѣть съ ней нѣсколько общихъ точекъ (напримѣръ, касательная къ спирали). Если дана геометрическая кривая, то легко построить ея проекціи. Построимъ проекціи окружности, лежащей въ данной плоскости. Положимъ, что окружность дана въ плоскости $\alpha\beta\gamma$, перпендикулярной къ горизонтальной плоскости; въ этой плоскости пусть дано положеніе центра (c, c') и величина радіуса R (черт.230). Горизонтальная проекція окружности будетъ cd = 2R, т.е. прямая, совпадающая съ горизонтальнымъ слѣдомъ $\alpha\beta$, а вертикальная - эллипсъ. Чтобы построить этотъ эллипсъ, найдемъ на вертикальной плоскости совмѣщенное положеніе O центра (o, o') и изъ точки O радіусомъ, равнымъ R, опишемъ окружность, которая выразитъ совмѣщенное положеніе данной окружности. Затѣмъ проведемъ въ этой окружности два взаимно-перпендикулярныхъ діаметра

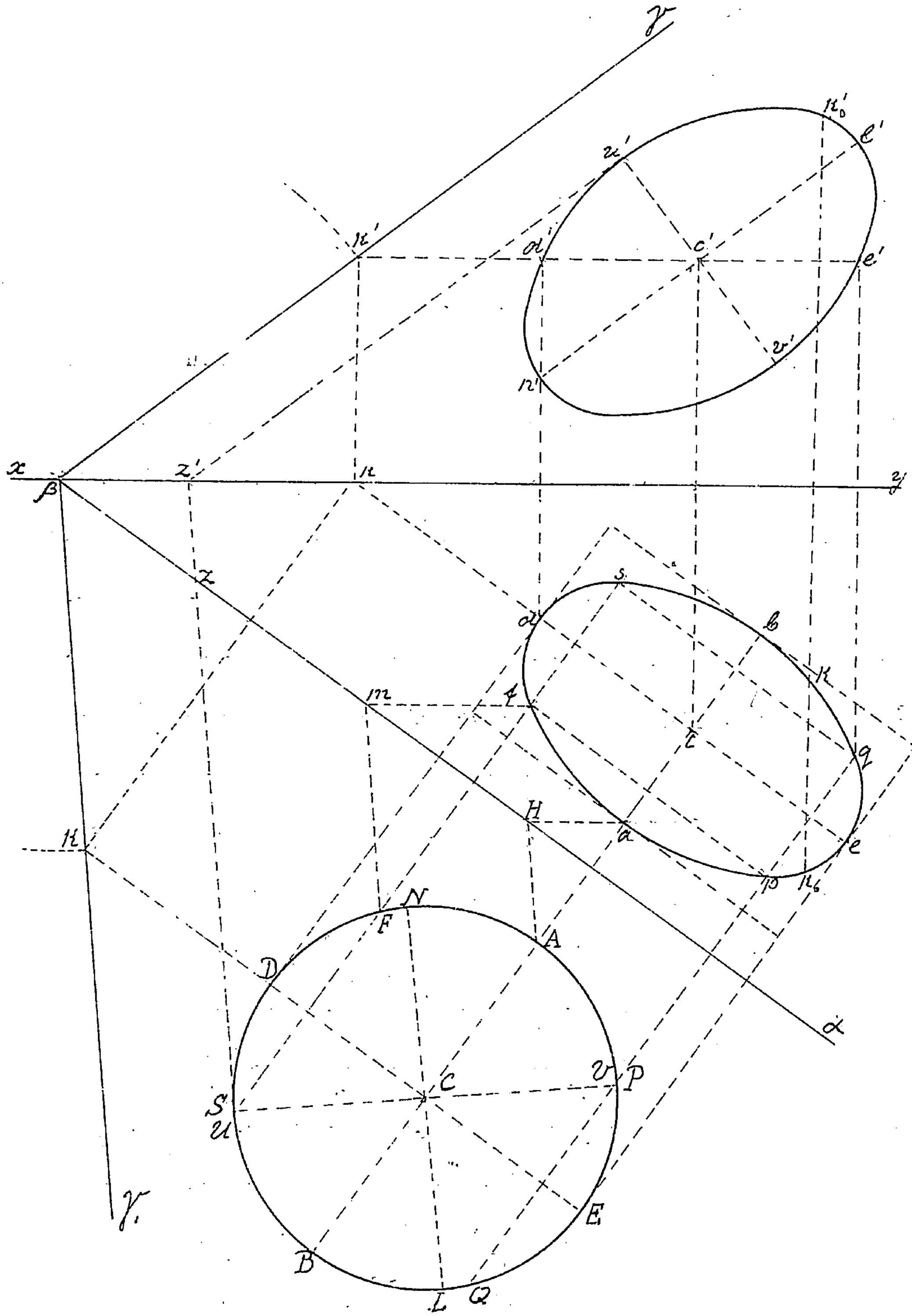
Черт. 230.



AB и CD, изъ которыхъ второй параллеленъ оси xy, т.е. параллеленъ горизонтальной плоскости проекцій, а первый къ ней перпендикуляренъ. Діаметръ AB проектируется на горизонтальную плоскость въ точку O, а на вертикальную - въ натуральную величину (a'b'), и потому онъ будетъ служить большой осью искомаго эллипса, діаметръ же CD на горизонтальную плоскость проектируется въ натуральную величину cd, а на вертикальную - въ прямую c'd', перпендикулярную къ a'b'; c'd' будетъ служить малой осью эллипса. Зная оси эллипса, легко построить и самый эллипсъ по точкамъ. Мы употребимъ нѣсколько иной пріемъ для отысканія точекъ, принадлежащихъ эллипсу, а именно: если въ окружности проведемъ рядъ хордъ MN, PQ, параллельныхъ діаметру AB и, какъ обыкновенно дѣлаютъ, симметрично ему расположенныхъ, и возвратимъ плоскость $\alpha\beta\gamma$ въ первоначальное положеніе, то получимъ рядъ точекъ m', n', p' и q', принадлежащихъ вертикальной проекціи окружности; построивъ достаточное число точекъ и соединивъ ихъ по лекалу, получимъ эллипсъ, выражающій вертикальную проекцію окружности. Если окружность находится въ плоскости, перпендикулярной къ вертикальной плоскости проекцій, то построеніе ея проекцій подобно предыдущему. Разница будетъ только въ томъ, что вертикальной проекціей будетъ отрѣзокъ вертикальнаго слѣда плоскости, а горизонтальной - эллипсъ.

Положимъ теперь, что окружность находится въ плоскости $\alpha\beta\gamma$ (черт.231), наклоненной къ обѣимъ плоскостямъ проекцій, и въ этой плоскости она опредѣляется центромъ (c, c') и величиной радіуса. Для построенія проекцій этой окружности, которыя будутъ эллипсами, совмѣстимъ данную плоскость $\alpha\beta\gamma$ съ горизонтальной плоскостью проекцій и найдемъ совмѣщеніе центра (c, c'), т. е.

Черт.231.



точку С; для этого проводимъ черезъ центръ горизонталь (ск, с'к') и находимъ ея совмѣщеніе СК; опустивъ изъ точки с перпендикуляръ на $\alpha\beta$ до встрѣчи съ СК, получимъ точку С - совмѣщеніе центра (с,с'). Изъ этого центра описываемъ даннымъ радіусомъ окружность, которая и выразитъ совмѣщеніе данной окружности. По совмѣщенному положенію окружности находимъ ея проекціи. Прежде построимъ горизонтальную проекцію; для этого проведемъ въ этой окружности два перпендикулярныхъ діаметра АВ и DE, при чемъ второй проведемъ параллельно горизонтальному слѣду $\alpha\beta$ данной плоскости. Діаметръ DE, какъ параллельный горизонтальному слѣду, будетъ проектироваться на горизонтальную плоскость проекцій въ натуральную величину de параллел.$\alpha\beta$, между тѣмъ какъ всѣ остальные діаметры, какъ наклонные къ горизонтальной плоскости, будутъ на нее проектироваться въ величину, меньшую натуральной, и потому горизонтальная проекція діаметра DE - линія de - будетъ большой осью эллипса, выражающаго горизонтальную проекцію данной окружности. Построимъ теперь горизонтальную проекцію діаметра АВ, для чего черезъ точку А проведемъ АН параллельно $\beta\gamma_1$; эта параллель выразитъ совмѣщеніе фронтали, и потому ея горизонтальная проекція получится, если черезъ Н проведемъ прямую На, параллельную оси проекцій ху. Точка встрѣчи этой прямой съ перпендикуляромъ, опущеннымъ изъ точки А на $\alpha\beta$, т.е. точка а и будетъ горизонтальной проекціей А. Отложивъ на продолженіи линіи ас длину bc, равную ac, получимъ точку b, которая будетъ горизонтальной проекціей B. Линія ab, очевидно, есть малая ось эллипса. Построивъ по осямъ эллипсъ, получимъ горизонтальную проекцію окружности. Горизонтальную проекцію можно построить по точкамъ; для этого въ окружности проведемъ рядъ хордъ, параллельныхъ діаметру AB и, какъ обыкновенно дѣлаютъ, симметрично съ нимъ расположенныхъ; найдемъ по извѣстнымъ правиламъ проекціи крайнихъ точекъ этихъ хордъ, такъ что точки f, s, q и p будутъ соотвѣтственно проекціями точекъ F, S, Q и P. Такимъ образомъ можно получить сколько угодно точекъ, принадлежащихъ горизонтальной проекціи окружности; соединивъ эти точки по лекалу, получимъ искомый эллипсъ. Для построенія вертикальной проекціи окружности проведемъ въ ней два діаметра: NL параллельно $\beta\gamma_1$ и UV перпендикулярно LN. Діаметръ NL, какъ параллельный $\beta\gamma_1$, будетъ параллеленъ вертикальной плоскости проекцій и потому проектируется на эту плоскость въ натуральную величину, которую мы получимъ, отложивъ отъ точки c' на линіи n'l' паралл. $\beta\gamma$ по радіусу въ ту и другую сторону. Діаметръ UV проектируется на вертикальную плоскость по линіи, перпендикулярной къ n'l' или, что все равно, перпендикулярной къ $\beta\gamma$. Для полученія длины вертикальной проекціи этого діаметра (UV) проведемъ черезъ U прямую Uz, параллельную $\beta\gamma_1$, вертикальную проекцію которой z'u' найдемъ, опустивъ изъ точки z перпендикуляръ на xy и проведя черезъ полученную точку z' прямую z'u' параллел. $\beta\gamma$, которая и будетъ искомой вертикальной проекціей. Пересѣченіе линіи z'u' съ перпендикуляромъ, опущеннымъ изъ c' на $\alpha\beta$, и дастъ точку u', вертикальную проекцію точки U. Отложивъ на томъ же перпендикулярѣ линію c'v' отъ точки c', получимъ прямую u'v', которая и будетъ малой осью эллипса. Построивъ по найденнымъ осямъ эллипсъ, получимъ вертикальную проекцію данной окружности. Изъ этого построенія проекцій круга видно, что горизонтальной проекціи dfape соотвѣтствуетъ вертикальная проекція d'n'v'e', а горизонтальной dsbqe соотвѣтствуетъ вертикальная d'u'l'e'; поэтому, чтобы по вертикальной проекціи точки K' круга построить горизонтальную, нужно брать точку K, а не K_o.

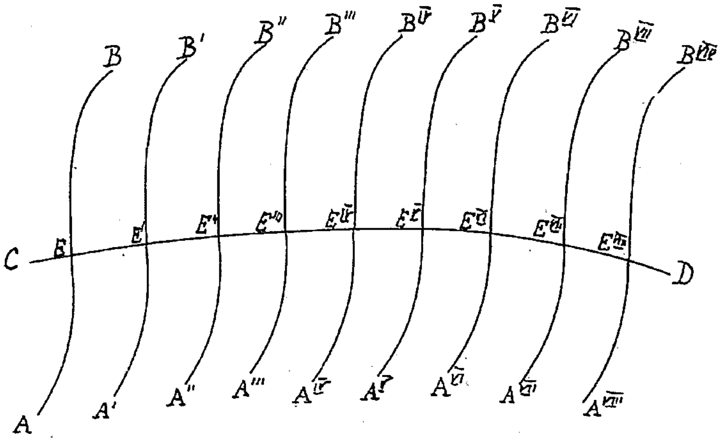
-------- о --------

ВТОРАЯ ЧАСТЬ.

О ПОВЕРХНОСТЯХЪ.

П о в е р х н о с т ь ю называется геометрическое мѣсто линіи, движущейся въ пространствѣ по какому-нибудь закону. Законъ движенія можетъ состоять въ томъ, что какая-нибудь точка движущейся линіи постоянно находится на нѣкоторой неподвижной кривой. Напримѣръ, если кривая CD (черт.232) неподвижна, а кривая AB движется такимъ образомъ, что какая-нибудь ея точка E скользитъ по CD, зани-

Черт.232.

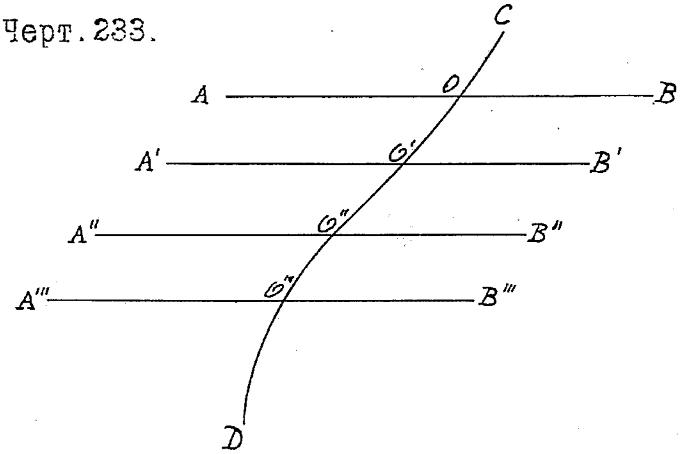


мая послѣдовательно положенія: E', E'', E''' и т.д, то это и будетъ опредѣлять законъ движенія линіи AB, которая производитъ такимъ образомъ поверхность. Такъ какъ линія AB производитъ поверхность, то она называется п р о и з в о д я щ е й или о б р а з у ю щ е й; линія же CD направляетъ движеніе образующей и потому называется н а п р а в л я ю щ е й.

Образующая линія можетъ быть постояннаго вида и перемѣннаго, т.е. можетъ сохранять свои размѣры при движеніи или измѣнять ихъ; она можетъ быть прямою или кривою.

Если образующей служитъ прямая (черт.233), то поверхность, ею описанная, называется л и н ê й ч а т о ю; если же кривая, то поверхность называется

Черт.233.

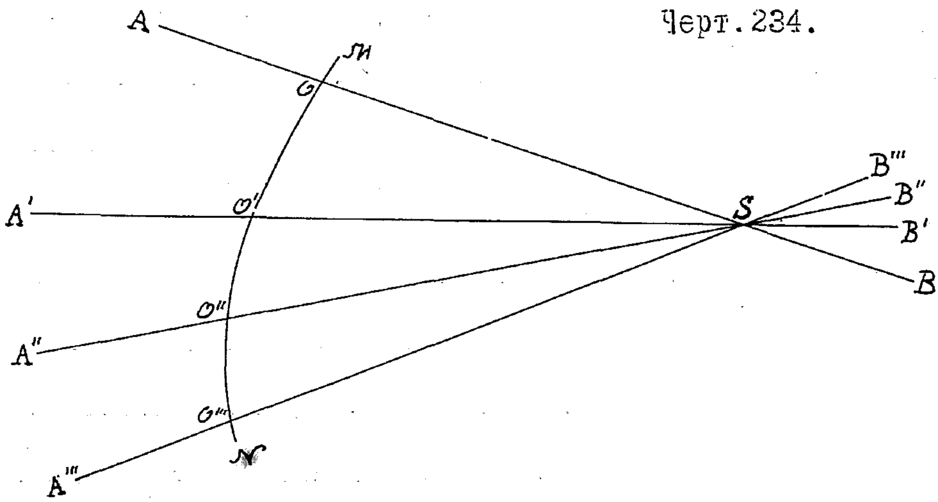


к р и в о ю. Линейныя поверхности бываютъ двухъ родовъ: р а з г и б а ю щ і я с я и н е р а з г и б а ю щ і я-с я или к о с ы я.

Разсмотримъ поверхности линейчатыя. Если образующая АВ (черт.233) движется такъ, что два смежныхъ ея положенія находятся въ одной плоскости, напримѣръ АВ и А'В', то поверхность называется разгибающейся, потому что она можетъ развернуться въ плоскость безъ разрыва между частями. Дѣйствительно, положимъ, что мы имѣемъ такую поверхность; проведя плоскости черезъ каждыя два положенія образующей, получимъ поверхность многогранника, и если смежныя положенія образующей чрезвычайно близки, то грани этой поверхности будутъ чрезвычайно малы, такъ что поверхность мы можемъ разсматривать какъ состоящую изъ безконечно большого числа безконечно узкихъ граней; но такую поверхность легко развернуть въ плоскость. Для этого примемъ плоскость какой-нибудь грани, положимъ АВА'В', за ту, съ которой будутъ совмѣщены остальныя грани; тогда, чтобы смежную грань А'В'А"В" совмѣстить съ этой плоскостью, будемъ вращать ее около А'В' до совпаденія съ первой гранью; третью грань будемъ вращать около А"В" до совпаденія съ двумя первыми гранями и т.д.; такимъ образомъ развернемъ эту поверхность въ плоскость. Но если два смежныхъ положенія образующей, какъ бы близки они ни были, не находятся въ одной плоскости, то поверхность будетъ косая или неразгибающаяся. Къ поверхностямъ разгибающимся относятся цилиндрическія и коническія. Цилиндрическая поверхность происходитъ отъ движенія прямой АВ (черт.233) по нѣкоторой кривой CD такимъ образомъ, что эта прямая всегда сохраняетъ положеніе, параллельное первоначальному, т.е. образующія AB, A'B', A"B"... параллельны между собой. Изъ этого опредѣленія цилиндрической поверхности слѣдуетъ, что два смежныхъ положенія образующей находятся въ одной плоскости и, слѣдовательно, эта поверхность относится къ классу разгибающихся.

Коническія поверхности происходятъ отъ движенія прямой AB (черт.234) по нѣкоторой кривой MN, при чемъ одна

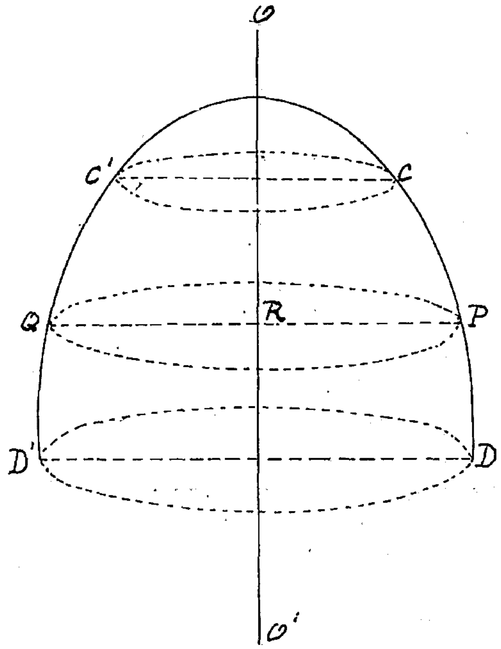
Черт. 234.



изъ точекъ этой прямой постоянно проходитъ черезъ неподвижную точку S, называемую вершиной или центромъ конической поверхности. Эта поверхность состоитъ изъ двухъ частей или двухъ полъ, которыя соединяются въ точкѣ S. Законъ образованія этой поверхности указываетъ на то, что она принадлежитъ также къ числу разгибающихся поверхностей, потому что два смежныхъ положенія образующей находятся въ одной плоскости.

Если кривая CD (плоская или двойной кривизны) вращается около неподвижной прямой OO' (черт.235) такъ, что

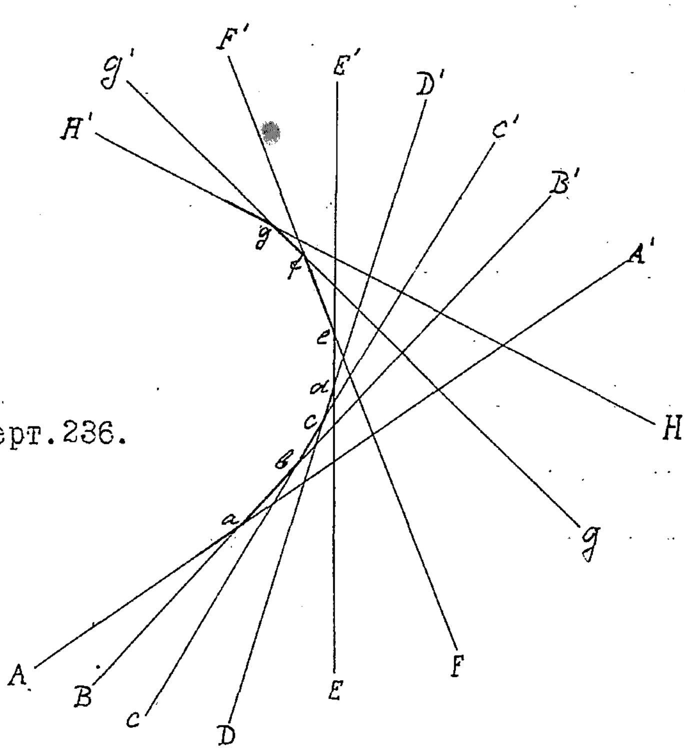
Черт.235.



каждая точка кривой CD сохраняетъ свое разстояніе отъ этой прямой, то линія CD образуетъ кривую поверхность, называемую п о в е р х н о с т ь ю в р а щ е н і я; при такомъ движеніи каждая точка кривой CD описываетъ окружность, центръ которой находится на прямой OO', а радіусомъ служитъ разстояніе этой точки кривой до прямой OO', и обратно: всякое сѣченіе такой поверхности плоскостью, перпендикулярной къ OO', будетъ кругъ, центръ котораго будетъ находиться на прямой OO'. Неподвижная прямая OO' называется осью поверхности вращенія, а линія CD - образующей ея. Одна и та же поверхность можетъ быть образована движеніемъ различныхъ линіи, напримѣръ, разсмотрѣнная поверхность вращенія была образована кривой CD, но эта же поверхность можетъ быть образована движеніемъ круга перемѣннаго радіуса. Дѣйствительно, вообразимъ, что кругъ, котораго плоскость перпендикулярна къ OO', центръ R - находится на этой линіи и конецъ радіуса P - на кривой CD - перемѣщается, оставаясь постоянно перпендикулярнымъ къ OO', и притомъ радіусъ этого круга измѣняется такъ, что конецъ его P постоянно находится на линіи CD; тогда этотъ кругъ производитъ поверхность, которая раньше получилась отъ вращенія кривой CD.

Если CD и OO' лежатъ въ одной плоскости, то CD называется м е р и д і а н о м ъ поверхности вращенія, или вообще всякое сѣченіе поверхности вращенія плоскостью, проведенной черезъ ось вращенія, называется меридіаномъ, а сѣченіе плоскостью, перпендикулярной къ оси вращенія, называется п а р а л л е л ь ю. Въ нашемъ случаѣ окружности CC', QP, DD'..... будутъ параллелями поверхности.

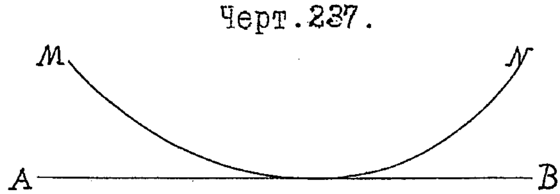
Разсмотримъ теперь поверхность, образуемую движеніемъ касательной къ кривой двойной кривизны и докажемъ, что эта поверхность разгибающаяся. Возьмемъ въ пространствѣ рядъ прямыхъ линій AA', BB', CC' и т.д. (черт.236) такъ, чтобы онѣ попарно лежали въ одной плоскости, т.е. чтобы AA' и BB' лежали въ одной плоскости (онѣ пересѣкаются въ точкѣ a), BB' въ одной плоскости съ CC', CC' - съ DD' и т.д., и притомъ



Черт.236.

чтобы каждыя двѣ смежныя плоскости не совпадали, а составляли между собою весьма малый двугранный уголъ. Тогда мы получимъ ломаную линію abcd..., расположенную какъ-нибудь въ пространствѣ. Проведя черезъ каждыя двѣ смежныя образующія плоскости, получимъ нѣкоторую многогранную поверхность, состоящую вообще изъ двухъ полъ: одну полу составляютъ грани AaB, BbC, CcD..., а другую - грани A'aB', B'bC', C'cD'.... Если грани AaB, BbC, CcD и т.д. будутъ уменьшаться, приближаясь къ нулю, равно какъ и двугранные углы, составляемые каждыми двумя послѣдовательными гранями, то въ предѣлѣ наша многогранная поверхность обратится въ кривую, ломаная abcd.... - въ кривую двойной кривизны. Докажемъ теперь, что эта поверхность разгибающаяся. Для этого будемъ разсматривать ее какъ многогранную поверхность, грани которой очень малы. Примемъ плоскость какой-нибудь грани AaB за ту, съ которой будемъ совмѣщать остальныя грани, тогда, чтобы совмѣстить съ этой плоскостью грань BbC, будемъ вращать ее около ребра Bb до совпаденія съ первой гранью; грань CcD будемъ вращать около ребра Cc и т.д., и такимъ образомъ развернемъ первую полу данной поверхности въ плоскость. Подобно этому можно развернуть и вторую полу поверхности. Итакъ, если мы имѣемъ какую-нибудь кривую MN двоякой кривизны (черт.237), то, двигая по ней касательную AB, получимъ разгибающуюся поверхность. Кривая MN называется р е б р о м ъ

Черт.237.

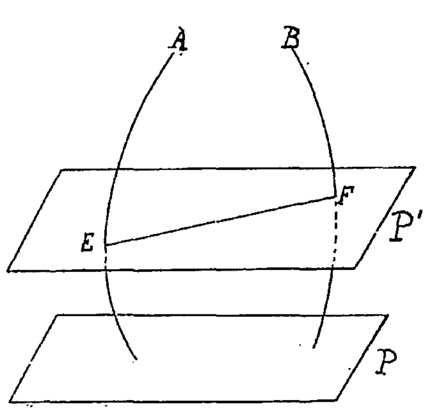


возврата разгибающейся поверхности.

Косыя или неразгибающіяся поверхности бывают двухъ родовъ. Къ первому роду относятся тѣ поверхности, всѣ образующія которыхъ параллельны какой-нибудь плоскости. Такія поверхности называются цилиндроидами. Плоскость, параллельная образующимъ, называется направляющей плоскостью. Въ косыхъ поверхностяхъ второго рода образующія не параллельны одной поверхности. Для того, чтобы построить поверхность перваго рода, надо знать кромѣ направляющей плоскости еще двѣ направляющія линіи.

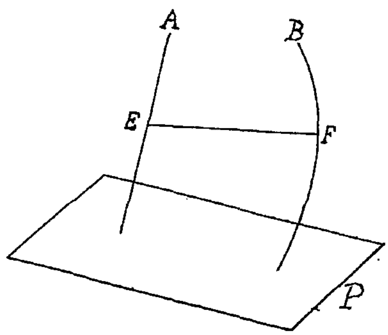
Пусть даны направляющія линіи A и B и направляющая плоскость P (черт.238). Чтобы построить поверхность перваго рода, беремъ на прямой A произвольную точку E и проводимъ черезъ нее плоскость P′ параллел. P. Точку F встрѣчи этой плоскости съ направляющей B соединяемъ съ E и получаемъ образующую EF искомой поверхности, такъ какъ EF параллел. P и пересѣкаетъ обѣ направляющія A и B. Проводя рядъ подобныхъ плоскостей, мы получимъ рядъ образующихъ, и, если плоскости возьмемъ достаточно близко одну къ другой, то получимъ изображеніе поверхности перваго рода.

Черт.238.

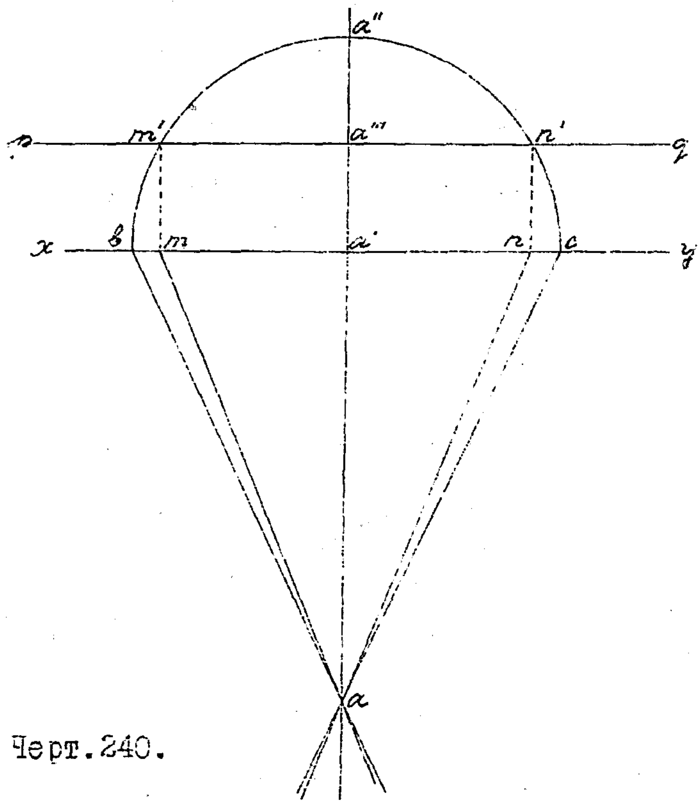


Если одной изъ направляющихъ служитъ прямая, то такая поверхность называется к о н о и д о м ъ. Чтобы построить такую поверхность, поступаемъ, какъ и въ предыдущемъ случаѣ, т.е. проводимъ образующія поверхности, параллельно направляющей плоскости (черт.239).

Черт.239.



Въ архитектурѣ встрѣчается коноидальная поверхность, у которой одной направляющей служитъ прямая, перпендикулярная къ направляющей плоскости, а другой - окружность или эллипсъ, лежащій въ плоскости, тоже перпендикулярной къ направляющей плоскости. Валлисъ назвалъ ее к о н о и д а л ь н ы м ъ к л и н о м ъ. Построимъ проекціи коноидальнаго клина. За кривую направляющую возьмемъ полуокружность, діаметръ которой совпадаетъ съ осью xy, а за прямолинейную - прямую (a, a'a"), перпендикулярную къ горизонтальной плоскости проекцій, такъ чтобы вертикальная ея проекція проходила черезъ центръ окружности ba"c (черт.240); за направляющую плоскость примемъ горизонтальную плоскость проекцій. Для построенія образующихъ проводимъ рядъ плоскостей, параллельныхъ горизонтальной плоскости проекцій, и соединяемъ точки пересѣченія ихъ съ направляющими (bc, ba"c) и (a, a'a"). Верхняя образующая (a, a'a") получится, если мы проведемъ плоскость параллельно направляющей плоскости такъ, что ея вертикаль-



Черт.240.

ный слѣдъ касается полукруга въ точкѣ а". Полученная образующая (а а', а") будетъ перпендикулярна къ вертикальной плоскости проекцій. Построимъ еще двѣ какія-нибудь образующія; для этого проводимъ плоскость pq параллельно горизонтальной плоскости проекцій. Эта плоскость пересѣчетъ полукругъ въ точкахъ (m,m') и (n,n'), а прямую (а, а'а") - въ точкѣ (а,а'''); соединяя точки (m,m') и (n,n') съ (а,а'''), получимъ двѣ образующія (am, a''' m') и (an, a''' n'). Продолжая проводить подобныя плоскости, мы получимъ рядъ образующихъ, которыя и составятъ изображеніе поверхности, называемой коноидальнымъ клиномъ.

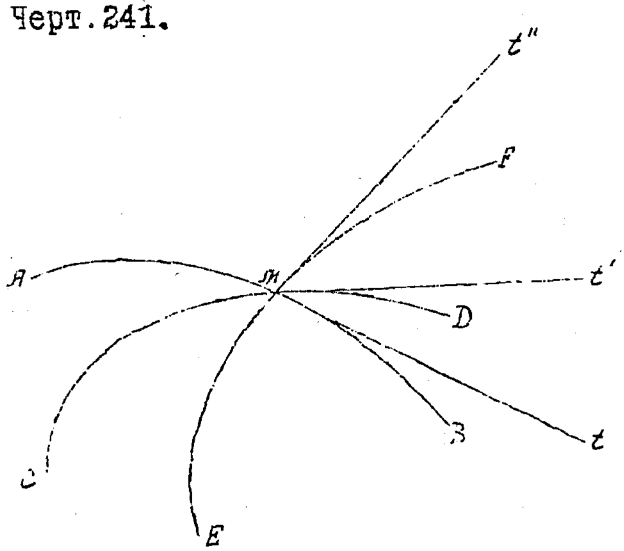
Простѣйшею изъ неразгибающихся поверхностей служитъ такъ называемая к о с а я п л о с к о с т ь или г и п е р б о л и ч е с к і й п а р а б о л о и д ъ.

Эта поверхность перваго рода и образуется отъ движенія прямой линіи по двумъ прямолинейнымъ направляющимъ, не лежащимъ въ одной плоскости, оставаясь все время параллельной данной направляющей плоскости. Если бы прямолинейныя направляющія лежали въ одной плоскости, то при движеніи по нимъ прямой получилась бы обыкновенная плоскость.

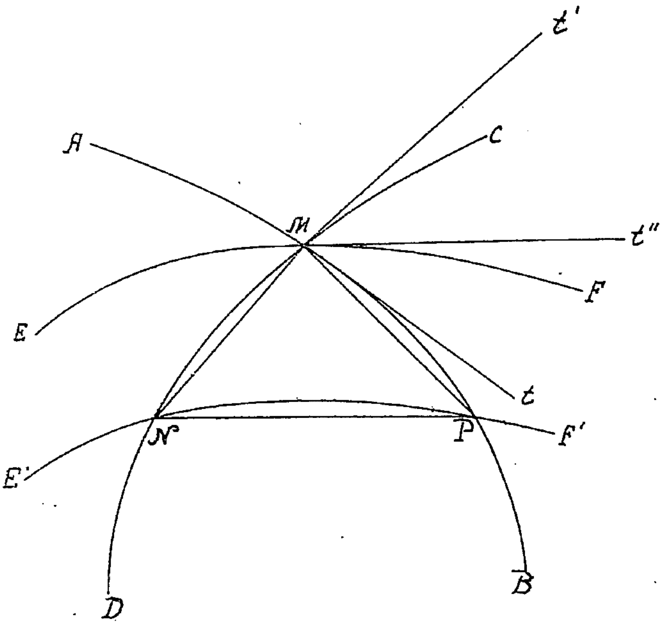
ОБЩЕЕ СВОЙСТВО ПЛОСКОСТЕЙ, КАСАТЕЛЬНЫХЪ КЪ ПОВЕРХНОСТИ.

Всѣ поверхности по отношенію къ касательной плоскости обладаютъ слѣдующимъ свойствомъ: если черезъ какую-нибудь точку M по поверхности проведемъ кривыя линіи AB, CD, EF ....(черт. 241-ый) и къ нимъ касательныя линіи MT, MT', MT"...., то всѣ онѣ будутъ находиться въ одной плоскости, называемой касательной плоскостью къ данной кривой поверхности въ разсматриваемой точкѣ. Чтобы оправдать такое опредѣленіе касательной плоскости, докажемъ, что всѣ касательныя линіи къ разсматриваемымъ кривымъ въ точкѣ M находятся въ одной плоскости. Для этого проводимъ черезъ точку M (черт. 24?) три различныхъ кривыхъ AB, CD и EF

Черт. 241.

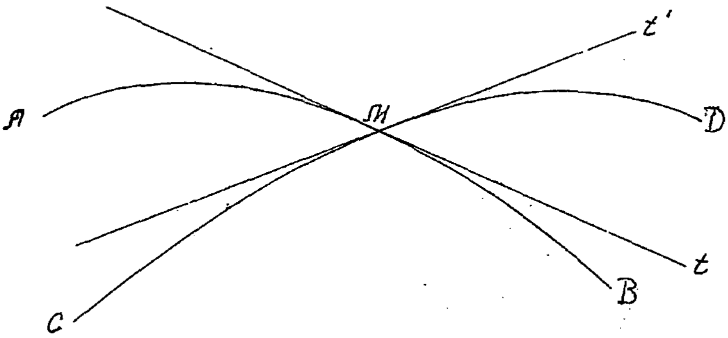


Черт. 242.

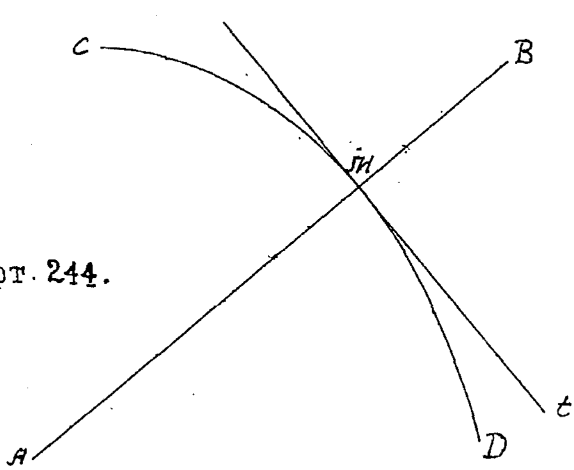


и къ нимъ касательныя Mt, Mt' и Mt", и будемъ разсматривать данную поверхность какъ происшедшую отъ движенія кривой EF по двумъ направляющимъ: AB и CD. Пусть, одно изъ положеній этой линіи будетъ E'F'; соединяя точку M съ точками встрѣчи ея N и P съ кривыми AB и CD, получимъ треугольникъ MNP, стороны котораго MN, NP и PM суть сѣкущія кривыхъ CD, E'F' и AB. Положимъ теперь, что линія E'F' движется по обратному направленію, тогда можно предположить, что она занимаетъ послѣдовательно тѣ мѣста, которыя она занимала при движеніи изъ положенія EF къ E'F'. При этомъ обратномъ движеніи точки N и P будутъ приближаться къ M, потому что кривая E'F' приближается къ EF, сѣкущая MN а также сѣкущія MP и NP стремятся совпасть съ касательными къ разсматриваемымъ кривымъ въ точкѣ M. Когда E'F' совпадетъ съ EF, то сѣкущая MN обратится въ касательную Mt', сѣкущая MP - въ касательную Mt; но такъ какъ сѣкущія оставались все время въ одной плоскости, то предѣльныя ихъ положеній, т.е. касательныя Mt, Mt', Mt" будутъ тоже въ одной плоскости.

Черт.243.



Вслѣдствіе того, что кривая EF была взята произвольно, заключаемъ, что въ плоскости, опредѣляемой касательными Mt и Mt', будутъ находиться касательныя ко всякой кривой. Итакъ, касательная плоскость представляетъ геометрическое мѣсто касательныхъ линій по всевозможнымъ кривымъ, проходящимъ черезъ данную точку по поверхности. Такъ какъ плоскость опредѣляется двумя пересѣкающимися прямыми, то для построенія касательной плоскости въ какой-нибудь точкѣ M поверхности, мы должны по поверхности провести двѣ кривыя AB и CD (черт.243) и къ нимъ касательныя Mt и Mt', которыя и опредѣлятъ искомую касательную плоскость. Если разсматриваемъ поверхность линейчатую, т.е. происшедшую отъ движенія прямой линіи, то черезъ каждую точку ея можно провести прямолинейную образующую AB, которая (черт.244) будетъ находиться въ касательной плоскости, потому что эта послѣдняя содержитъ касательныя линіи ко всякой кривой, про-

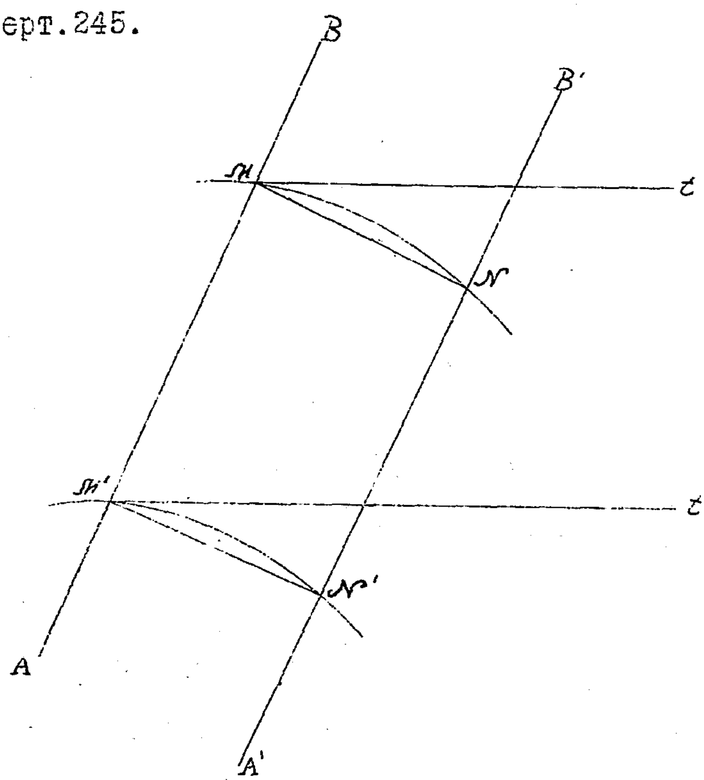


Черт. 244.

веденной через данную точку поверхности, а слѣдовательно и касательную къ прямой АБ, которая сама есть АБ. Чтобы получить другую прямую, принадлежащую касательной плоскости, проведемъ черезъ точку М прямой АВ какую-нибудь кривую CD и къ ней касательную Mt, тогда плоскость BMt и будетъ искомой.

Мы знаемъ, что линейчатыя поверхности бываютъ разгибающіяся и косыя, и такія поверхности по отношенію къ касательной плоскости существенно различаются между собой.

Черт.245.

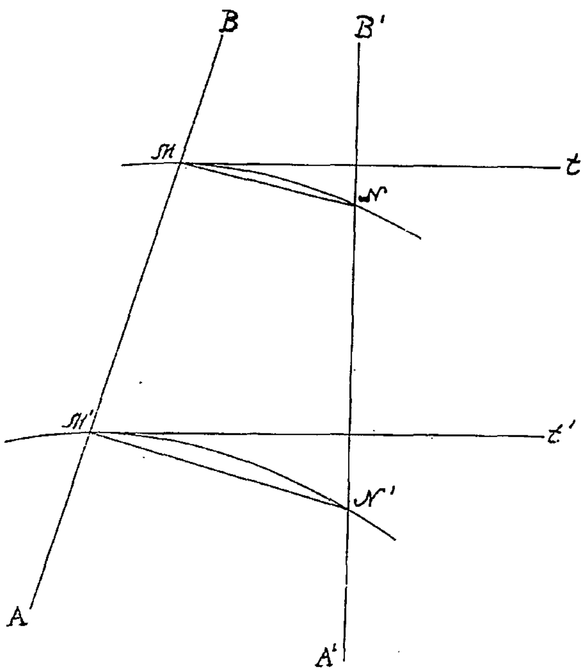


Въ поверхности разгибающейся касательная плоскость касается поверхности по всей длинѣ образующей АБ, и если въ точкѣ М проведемъ касательную плоскость, то каждая точка прямой АБ будетъ служить точкой прикосновенія, а если въ различныхъ точкахъ М и М' и т.д. прямой АБ (черт.245) проведемъ касательныя плоскости, то онѣ совпадутъ въ одну, такъ что касательная плоскость будетъ одна и та же для различныхъ точекъ прямой АВ. Если же разсматриваемая поверхность - косая или неразгибающаяся, то для каждой точки прямой образующей касательная плоскость имѣетъ свое положеніе, такъ что плоскости, касательныя къ поверхности въ точкахъ М и М' (черт.246), образуютъ между собой нѣкоторый уголъ. Докажемъ это свойство касательной плоскости.

Возьмемъ разгибающуюся поверхность, т.е. такую, въ которой два смежныхъ положенія образующей АВ и А'В' лежатъ въ одной плоскости (черт.245), и проведемъ къ ней въ точкахъ М и М' образующей АВ касательныя плоскости ВМt и ВМ't' и докажемъ, что онѣ совпадаютъ въ одну. Для этого соединимъ точки М и М' съ точками N и N', въ которыхъ кривыя МN и М'N', проведенныя черезъ точки М и М' по данной поверхности, пересѣкаютъ смежную образующую А'В', черезъ что получимъ плоскій четыреугольникъ М'N'МN (онъ плоскимъ будетъ потому, что АВ и А'В' находятся въ одной плоскости), стороны котораго суть сѣкущія кривыхъ МN и М'N'.

Далѣе положимъ, что образующая А'В' приближается къ АВ, тогда точки N и N' будутъ приближаться къ М и М', а сѣкущія МN и М'N' соотвѣтственно будутъ приближаться къ касательнымъ Мt и М't'. Когда А'В' совпадетъ съ АВ, то сѣкущія превратятся въ касательныя Мt и М't', но такъ какъ онѣ находятся все время въ одной плоскости ВМN, то и предѣльныя ихъ положенія тоже находятся въ одной плоскости, т.е. плоскость ВМt совпадетъ съ плоскостью ВМ't', а это показываетъ, что касательныя плоскости къ поверхности въ точкахъ M и M' будутъ одной и той же плоскостью, или касательная плоскость касается поверхности по всей длинѣ образующей. Вслѣдствіе этого, если надо построить касательную плоскость къ разгибающей поверхности въ данной точкѣ, то ее можно построить въ какой-нибудь другой точкѣ той же образующей. Такъ какъ поверхности цилиндрическія и коническія суть разгибающіяся, то къ такимъ поверхностямъ касательныя плоскости будутъ прикасаться по всей длинѣ прямолинейной образующей.

Черт.246.



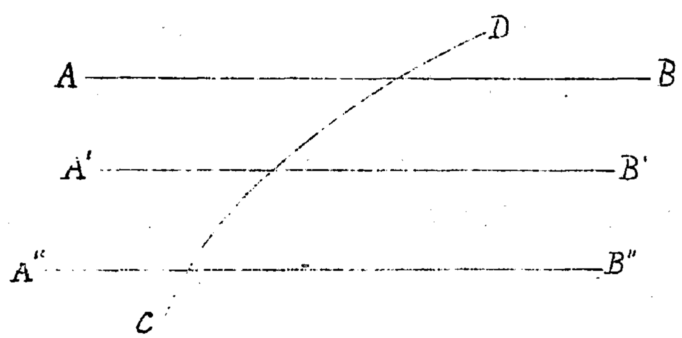
Теперь докажемъ, что касательныя плоскости BMt и BM't', проведенныя въ точкахъ M и M' одной образующей къ неразгибающейся поверхности (черт.246), не совпадаютъ между собою, а образуютъ нѣкоторый уголъ. Для этого соединяемъ точки M' и M съ N' и N и получаемъ четыреугольникъ MNM'N', вершины котораго не будутъ лежать въ одной плоскости, потому что въ неразгибающейся поверхности двѣ смежныя образующія AB и A'B' не лежатъ въ одной плоскости; стороны же его MN и M'N' представляютъ сѣкущія соотвѣтствующихъ кривыхъ, и вслѣдствіе того, что этотъ четыреугольникъ косой, можно сказать, что плоскость BMN будетъ составлять нѣкоторый уголъ съ плоскостью BM'N'. Положимъ теперь, что A'B' стремится совпасть съ AB, тогда по свойству косой поверхности A'B' и AB не будутъ находиться въ одной плоскости, и, слѣдовательно, четыреугольникъ MNM'N' всегда будетъ косой, т.е. плоскости BMN и BM'N' всегда будутъ составлять между собой нѣкоторый уголъ, поэтому онѣ будутъ составлять уголъ и въ предѣлѣ, т.е. когда A'B' совпадетъ съ AB и сѣкущія MN и M'N' обратятся въ касательныя Mt и Mt'. Слѣдовательно заключаемъ, что касательныя плоскости къ поверхности въ разныхъ точкахъ одной и той же образующей имѣютъ различныя положенія, такъ что если въ точкѣ M, прямолинейной образующей AB, къ поверхности проведемъ касательную плоскость, то она будетъ касаться только въ точкѣ M, а въ остальныхъ точкахъ она будетъ пересѣкать ее, и если мы будемъ точку M перемѣщать по образующей AB, то плоскость будетъ вращаться около AB и часть поверхности будетъ лежать съ одной стороны касательной плоскости, часть - съ другой.

Поверхность въ проекціяхъ дается тѣми условіями, которыя позволяютъ построить какую угодно ея точку. Если эти условія даны, то говорятъ, что поверхность дана. Иногда такія условія не могутъ быть выражены графически и поверхность въ этомъ случаѣ дается рядомъ образующихъ. Иногда также даютъ сѣченіе этой поверхности плоскостями, параллельными горизонтальной и вертикальной плоскостямъ проекцій, и чѣмъ эти сѣченія будутъ ближе между собой, тѣмъ мы лучше имѣемъ возможность составить понятіе о формѣ поверхности.

П О В Е Р Х Н О С Т И   Ц И Л И Н Д Р И Ч Е С К І Я   И   К О Н И Ч Е С К І Я.

Цилиндрическая поверхность происходитъ отъ движенія прямой по нѣкоторой кривой линіи такимъ образомъ, что пря-

Черт. 247.

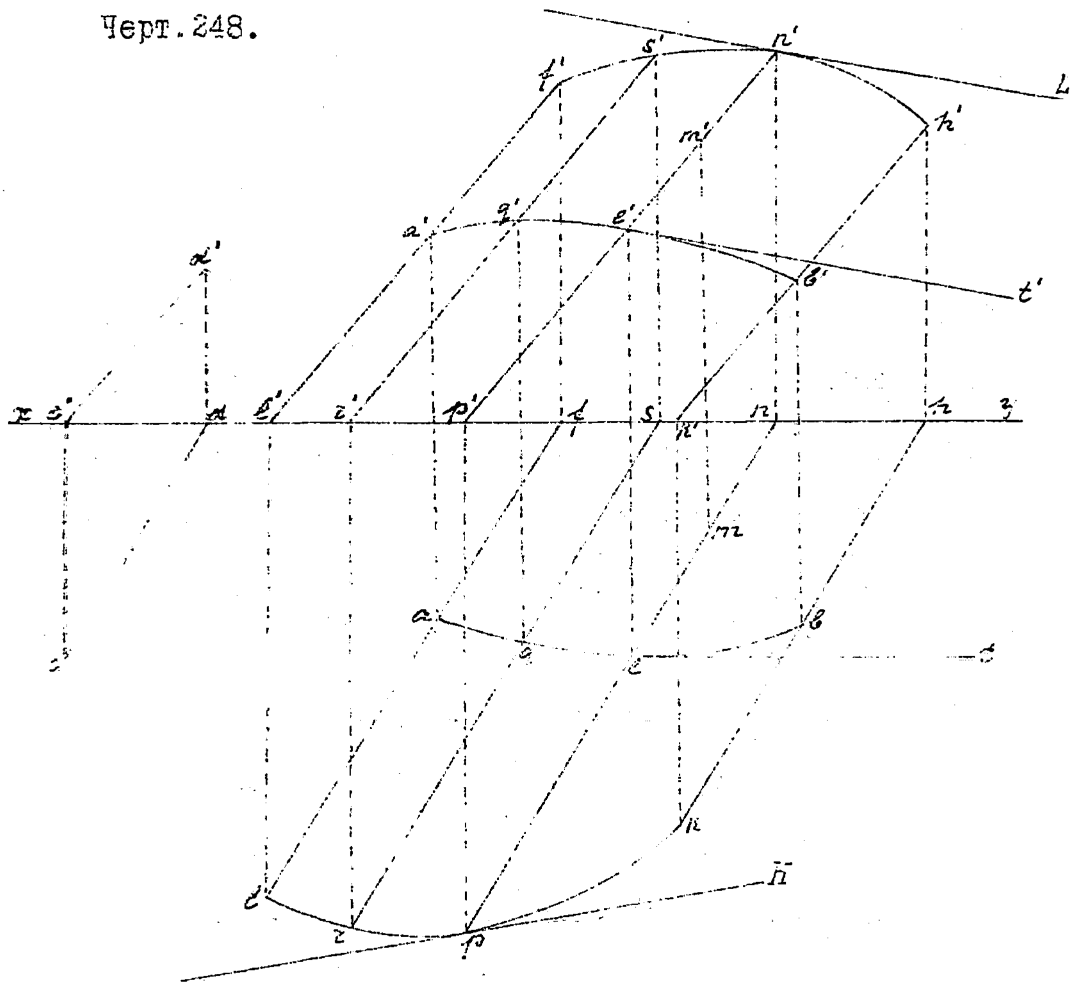


мая во всѣхъ своихъ положеніяхъ остается параллельной самой себѣ. Если AB (черт. 247-ой) есть образующая поверхности и параллельна своимъ смежнымъ положеніямъ A'B', A"B"...., то поверхность, ею произведенная, будетъ цилиндрическая; линія CD, которая направляетъ движеніе прямой, называется н а п р а в л я ю щ е й. Если кривая CD плоская и въ то же время сомкнутая, то она называется о с н о в а н і е м ъ цилиндрической поверхности.

Въ проекціяхъ - цилиндрическая поверхность дается проекціями направляющей и направленіемъ образующей, такъ что, если эти условія даны, то дана и цилиндрическая поверхность, потому что по этимъ даннымъ можно построить сколько угодно точекъ ея.

Дѣйствительно, пусть (ab, a'b') - проекціи направляющей (черт.248), а (cd, c'd') - направленіе образующей. По этимъ даннымъ можно построить какія угодно образующія линіи и точки цилиндрической поверхности. По-

Черт.248.



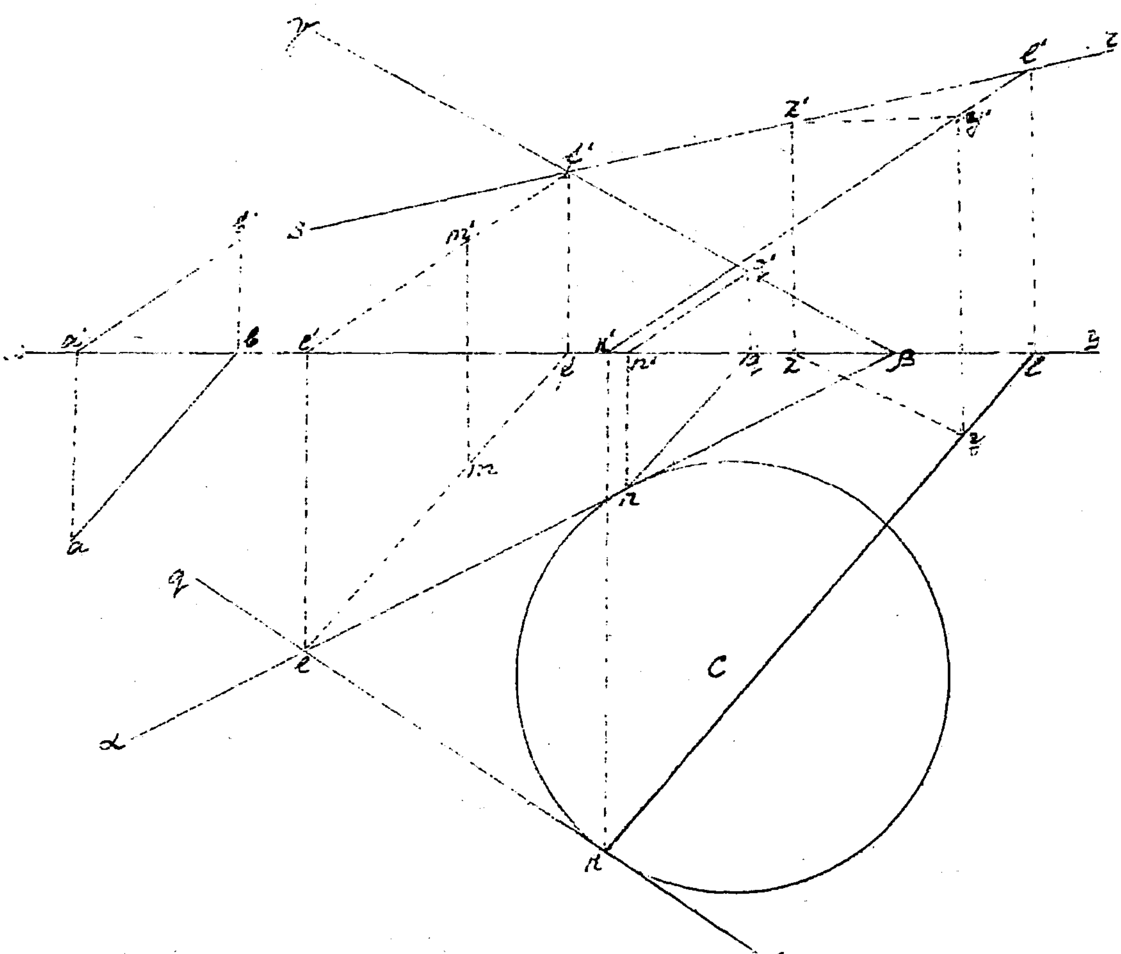
строимъ образующую, проходящую черезъ точку (a,a'); для этого черезъ a проводимъ lf параллел. cd, а черезъ a' - l'f' паралл. c'd' и получимъ образующую (lf, l'f')въ этой точкѣ. Подобнымъ образомъ строимъ образующія (rs, r's') и (kh, k'h'), проходящія черезъ точки (q,q') и (ъ,ъ'). Если построимъ слѣды образующихъ, то получимъ точки, принадлежащія слѣдамъ поверхности; соединивъ одноименные слѣды по лекалу, получимъ горизонтальный слѣдъ (lpk) и вертикальный - (f's'h') цилиндрической поверхности. Такъ какъ между образующими (lf, l'f') и (kh, k'h') находятся всѣ остальныя части цилиндрической поверхности, то эти образующія называются п р е д ѣ л ь н ы м и о б р а з у ю щ и м и или о ч е р к о м ъ цилиндрической поверхности.

Разсмотримъ, какимъ образомъ на данной цилиндрической поверхности построить точку. Положимъ, что дана горизонтальная проекція m точки, лежащей на цилиндрической поверхности; требуется построить вертикальную проекцію этой точки. Для этого проводимъ черезъ точку m прямую, параллельную cd, которую примемъ за горизонтальную проекцію той образующей, на которой находится искомая точка; затѣмъ строимъ вертикальную проекцію этой образующей, для чего точку встрѣчи прямой pn съ горизонтальной проекціей ab образующей, т.е. точку e, проектируемъ на вертикальную плоскость и получаемъ точку e', лежащую на направляющей и принадлежащую той образующей, на которой лежитъ искомая точка: черезъ e' проводимъ p'n' параллел. c'd' и изъ m опускаемъ перпендикуляръ на xy до встрѣчи съ p'n' въ точкѣ m', которая и будетъ искомой вертикальной проекціей точки, лежащей на цилиндрической поверхности.

По сдѣланному раньше замѣчанію мы можемъ сказать, что провести касательную плоскость въ точкѣ (m,m') - все равно, что провести касательную плоскость въ точкѣ (e,e') той же образующей. Провести касательную плоскость въ (e,e') легче, чѣмъ въ точкѣ (m,m'), потому что черезъ (e,e') проходитъ кривая (ab, a'b'), а черезъ (m,m') не проходитъ никакой кривой. Если къ (ab, a'b') провести касательную (et, e't'), то плоскость, опредѣляемая образующей (pn, p'n') и касательной (et, e't'), и будетъ искомой. Если построенъ горизонтальный слѣдъ lk данной поверхности, а также и вертикальный f'h', то, проведя въ точкѣ p, которая есть горизонтальный слѣдъ образующей (pn, p'n'), касательную Hp къ слѣду lk, можемъ сказать, что эта касательная будетъ лежать въ построенной плоскости; но линія Hp въ то же время находится на горизонтальной плоскости; слѣдовательно, Hp есть горизонтальный слѣдъ касательной плоскости. Если бы въ точкѣ h' провели касательную къ f'h', то она выразила бы вертикальный слѣдъ касательной плоскости. Отсюда мы видимъ, что если къ цилиндрической поверхности въ какой-нибудь ея точкѣ проведена касательная плоскость, то слѣды ея будутъ касаться слѣдовъ поверхности въ точкахъ, которыя будутъ слѣдами образующей соприкосновенія.

З А Д А Ч А. Къ цилиндрической поверхности, данной направляющей, которая есть окружность C, лежащая въ горизонтальной плоскости, и направленіемъ образующей (ab, a'b'), провести касательную плоскость черезъ данную точку(m,m').

Такъ какъ направляющая C (черт.249) находится на горизонтальной плоскости, то, слѣдовательно, она будетъ выражать и горизонтальный слѣдъ цилиндрической поверхности. Данная точка (m,m') можетъ лежать на этой поверхности или

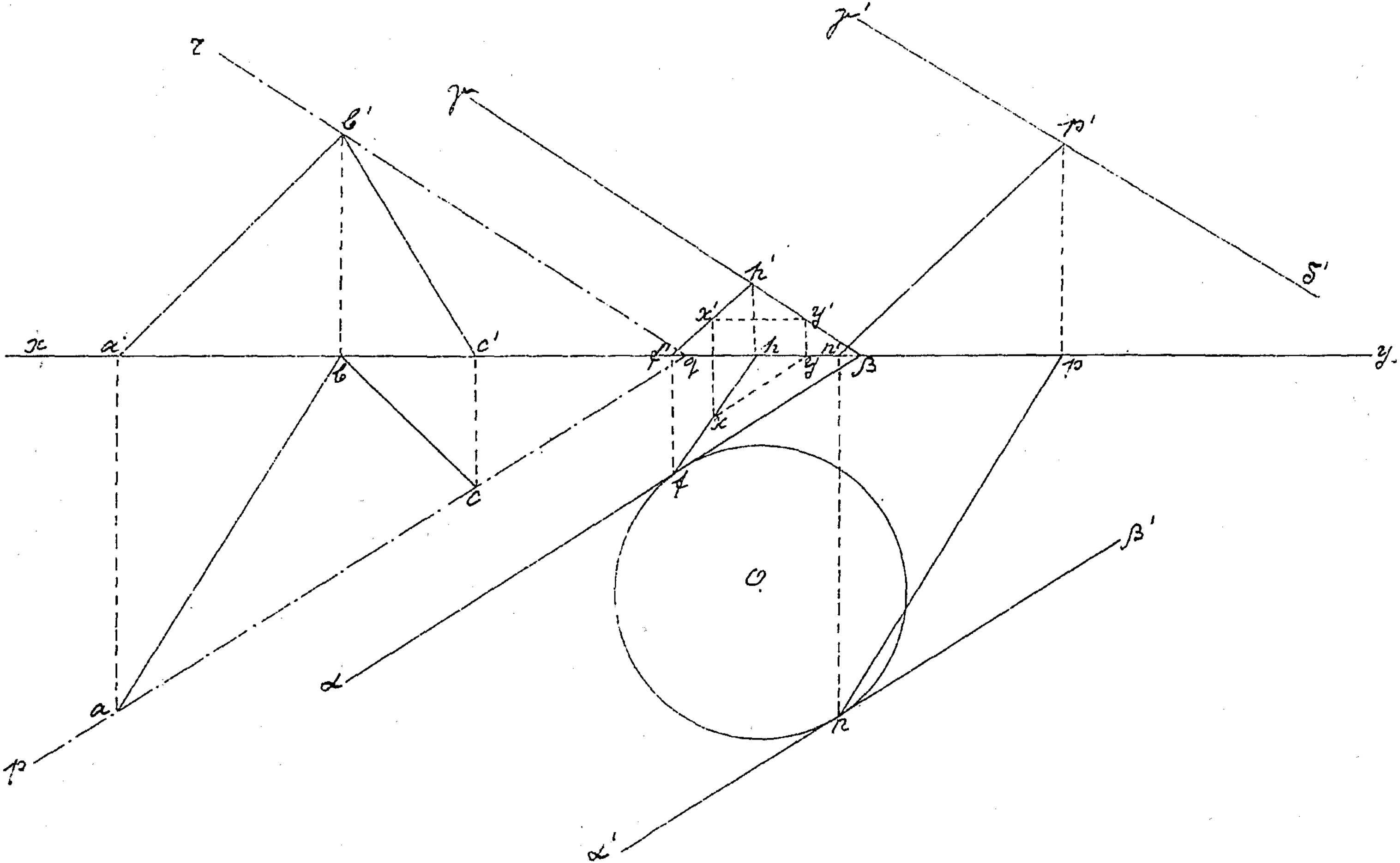


Черт.249.

внѣ ея; чтобы опредѣлить ея положенiе относительно поверхности, проведемъ черезъ данную точку прямую($ef,e'f'$) параллельно (ab, $a'b'$): если данная точка находится на цилиндрической поверхности, то горизонтальный слѣдъ e прямой (ef, $e'f'$) долженъ лежать на горизонтальномъ слѣдѣ поверхности; такъ какъ въ данномъ случаѣ это условіе не выполнено, т.е. точка e находится внѣ окружности C, то данная точка (m, m') находится внѣ цилиндрической поверхности. Такимъ образомъ требуется изъ внѣшней точки провести касательную плоскость къ цилиндрической поверхности. Положимъ, что искомая плоскость проведена; тогда она будетъ касаться цилиндрической поверхности по образующей, т.е. по прямой, параллельной (ab, $a'b'$); прямая же (ef, $e'f'$) параллельна образующей и проходитъ черезъ точку (m, m'), принадлежащую касательной плоскости, поэтому она будетъ принадлежать этой плоскости, и слѣды ея, т.е. точки e и f' будутъ принадлежать слѣдамъ искомой плоскости. Но ранѣе мы видѣли, что горизонтальный слѣдъ касательной плоскости касается горизонтальнаго слѣда поверхности; поэтому, если изъ точки e проведемъ касательную en къ окружности C (которая есть горизонтальный слѣдъ поверхности), то и получимъ горизонтальный слѣдъ $\alpha\beta$ касательной плоскости; соединяя β съ f', получимъ вертикальный слѣдъ искомой плоскости $\alpha\beta\gamma$. Для построенія образующей прикосновенія замѣтимъ, что точка (n, n'), въ которой $\alpha\beta$ касается окружности C, будетъ выражать горизонтальный слѣдъ этой образующей, и если черезъ эту точку проведемъ прямую, параллельную (ab, $a'b'$), то и получимъ образующую (nq $n'q'$), при чемъ вертикальный слѣдъ ея (q, q') долженъ находиться на вертикальномъ слѣдѣ $\beta\gamma$ касательной плоскости. Такъ какъ изъ точки e къ окружности можно провести двѣ касательныя :- en и ek, то заключаемъ, что изъ внѣшней точки къ нашей поверхности можно провести двѣ касательныя плоскости $\alpha\beta\gamma$ и pqsr. Такъ какъ горизонтальный слѣдъ pq второй касательной плоскости на нашей эпюрѣ въ предѣлахъ чертежа не пересѣкается съ осью xy, то для нахожденія вертикальнаго слѣда этой послѣдней строимъ образующую касанія (kl, k'l') и вертикальный слѣдъ ея l' соединяемъ съ f', черезъ что и получаемъ вертикальный слѣдъ rs второй плоскости. Если вертикальный слѣдъ образующей (kl, k'l') не помѣщается въ предѣлахъ чертежа, то на этой образующей слѣдуетъ взять какую-нибудь точку (y, y') и черезъ нее провести параллель pq, т.е. прямую (yz, y'z'), которая будетъ принадлежать искомой плоскости, а потому вертикальный слѣдъ ея z' будетъ принадлежать вертикальному слѣду sr искомой плоскости. Если бы точка e - горизонтальный слѣдъ прямой (ef, e'f') - получилась на горизонтальномъ слѣдѣ цилиндрической поверхности, т.е. на окружности C, то черезъ данную точку (m, m') къ поверхности можно было бы провести только одну касательную плоскость, а если бы точка e получилась внутри окружности C, то вопросъ былъ бы невозможенъ, потому что изъ такой точки къ окружности C нельзя провести ни одной касательной линіи, а потому нельзя провести и касательной плоскости къ данной поверхности. На нашемъ чертежѣ черезъ данную точку (m, m') можно провести двѣ касательныя плоскости, но ихъ иногда можно провести больше двухъ. Это зависитъ отъ вида и формы кривой, служащей горизонтальнымъ слѣдомъ. Если эта кривая - второго порядка, то изъ внѣшней точки можно провести къ ней только двѣ касательныхъ,- если третьяго, то три, 4-го - четыре и т.д. Число касательныхъ линій къ слѣду опредѣляетъ число касательныхъ плоскостей къ поверхности.

З А Д А Ч А. Провести касательную плоскость къ цилиндрической поверхности, параллельно данной прямой (чертежъ 250).

Положимъ, что намъ дана цилиндрическая поверхность направляющей O, которая есть окружность, лежащая на горизонтальной плоскости, и направленіемъ образующей (ab, a'b'); къ этой поверхности надо провести касательную плоскость параллельно данной прямой (bc, b'c'). Для рѣшенія задачи допустимъ, что искомая плоскость построена, тогда она будетъ параллельна двумъ прямымъ: (bc, b'c') -по условію и (ab, a'b')- потому, что она касательная къ цилиндрической поверхности по всей длинѣ образующей. Такимъ образомъ оказалось, что касательная плоскость будетъ параллельна плоскости, опредѣляемой прямыми (ab, a'b') и (bc, b'c'), т.е. параллельна плоскости pqr. Мы знаемъ, что если плоскости параллельны, то и одноименные слѣды ихъ параллельны. Горизонтальный слѣдъ искомой плоскости параллеленъ pq, но онъ также касается горизонтальнаго слѣ-

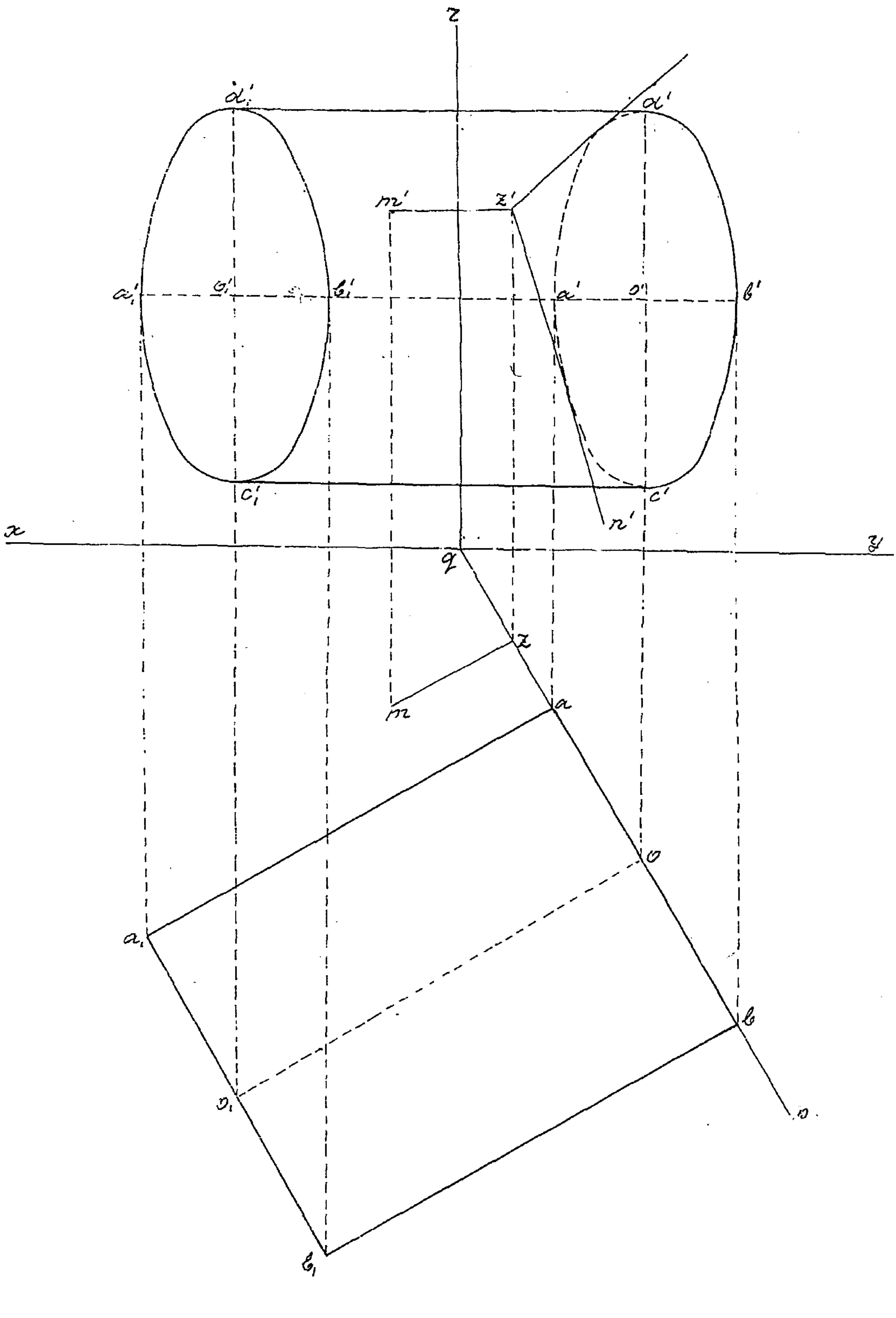


Черт. 250.

да поверхности, т.е. окружности O; слѣдовательно, проведя къ окружности O касательную $\alpha\beta$ параллел. pq, а изъ β - параллель qr, получимъ искомую плоскость $\alpha\beta\gamma$. Другое рѣшеніе будетъ $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$, такъ какъ къ данной окружности можно провести двѣ касательныя, удовлетворяющія данному условію. Можетъ случиться, что вертикальный слѣдъ qr вспомогательной плоскости въ предѣлахъ чертежа не помѣщается, тогда надо построить образующую прикосновенія (fh, $f'h'$), вертикальный слѣдъ h' которой будетъ принадлежать вертикальному слѣду касательной плоскости; чтобы получить другую точку, принадлежащую вертикальному слѣду, беремъ на этой образующей произвольную точку (x, x') и черезъ нее проводимъ прямую (xy, $x'y'$), параллельную $\alpha\beta$; эта послѣдняя будетъ лежать въ искомой плоскости, и потому вертикальный слѣдъ ея y' принадлежитъ вертикальному слѣду искомой плоскости; соединяя h' съ y', получимъ искомый слѣдъ $\beta\gamma$. Такъ какъ горизонтальный слѣдъ второй плоскости не пересѣкаетъ оси xy въ предѣлахъ чертежа, то для нахожденія вертикальнаго слѣда мы строимъ образующую касанія (np, $n'p'$) и черезъ точку p' проводимъ $\gamma'\delta'$ параллельно qr.

З А Д А Ч А. Построить проекціи прямого цилиндра по радіусу основанія и высотѣ, если основаніе лежитъ въ плоскости pqr, перпендикулярной къ горизонтальной плоскости проекцій, и провести къ нему касательную плоскость черезъ данную точку (черт.251) (m, m'). Построимъ проекціи

Черт. 251.



цилиндра. По извѣстному правилу строимъ проекціи круга (ab, a'b'), лежащаго въ данной плоскости pqr и служащаго основаніемъ цилиндра. Образующія цилиндра будутъ перпендикулярны къ плоскости основанія, т.е. къ плоскости pqr, поэтому горизонтальныя ихъ проекціи будутъ перпендикулярны къ слѣду pq. Такъ какъ образующія цилиндра, будучи перпендикулярны къ pqr, параллельны горизонтальной плоскости, то онѣ проектируются на эту плоскость въ натуральную величину, и, чтобъ ихъ построить, надо на перпендикулярахъ, возстановленныхъ изъ точекъ a и b къ прямой pq, отложить длины aa, и bb,, равныя длинѣ образующей. Горизонтальная проекція другого основанія выразится отрѣзкомъ a,b,, равнымъ и параллельнымъ ab. Чтобы построить вертикальную проекцію цилиндра, строимъ вертикальную проекцію другого основанія a,'b,', которая выразится эллипсомъ, равнымъ вертикальной проекціи перваго основанія. Проведя касательныя c'c,' и d'd,' къ построеннымъ эллипсамъ, параллельно оси проекцій, получимъ вертикальную проекцію даннаго цилиндра.

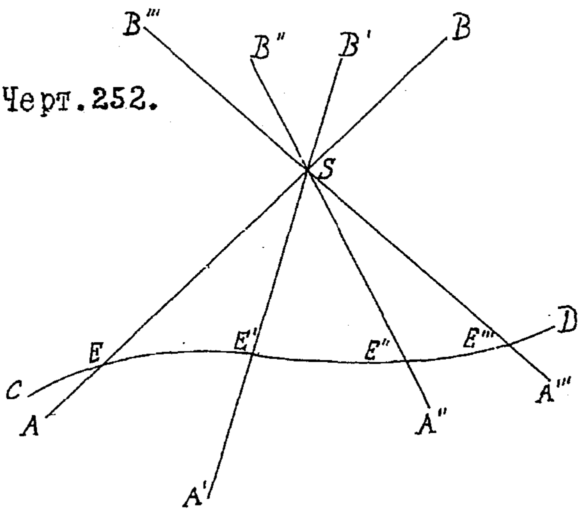
Теперь изъ данной точки (m,m') проведемъ къ этому цилиндру касательную плоскость. Для этого черезъ точку (m,m') проведемъ прямую (mz, m'z') параллельно образующей даннаго цилиндра и найдемъ точку (z,z') встрѣчи этой прямой съ плоскостью pqr.

Искомая плоскость должна проходить черезъ прямую (mz, m'z'), а слѣдъ ея на плоскости pqs - черезъ точку (z,z'); но слѣдъ касательной плоскости на плоскости pqr долженъ касаться слѣда цилиндрической поверхности на той же плоскости pqr, поэтому, если изъ точки (z,z') къ первому основанію цилиндра проведемъ касательную (zp, z'n'), то получимъ еще прямую, принадлежащую искомой плоскости. Такимъ образомъ прямыя (mz, m'z') и (zp, z'n') опредѣлятъ положеніе касательной плоскости, проведенной изъ точки (z,z') къ нашей поверхности. Такъ какъ изъ точки (z,z') къ первому основанію цилиндра можно провести двѣ касательныя линіи, то и къ цилиндрической поверхности черезъ точку (m,m') можно провести двѣ касательныхъ плоскости.

О КОНИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ.

Было замѣчено, что коническая поверхность происходитъ отъ движенія прямой AB, перемѣщающейся въ пространствѣ такъ, что она при этомъ постоянно проходитъ черезъ неподвижную точку S (черт.252) и пересѣкаетъ данную линію CD. Прямая AB называется образующею, линія CD - направляющею, а точка S - вершиною или центромъ конической поверхности. Эта поверхность, какъ видно, состоитъ изъ двухъ полъ, сходящихся въ точкѣ S. Если кривая CD плоская и притомъ сомкнутая, то она

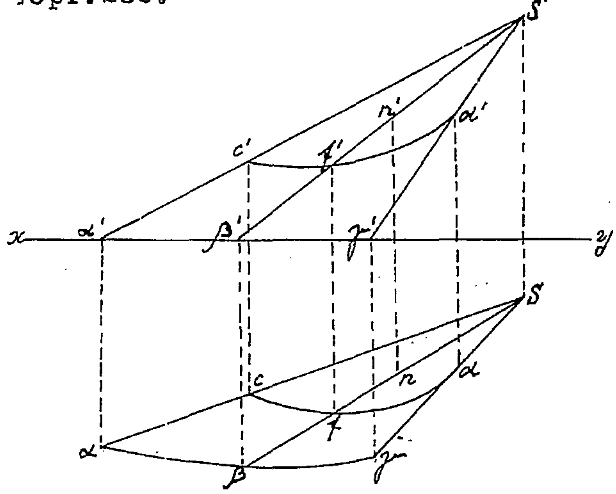
Черт.252.



назыв. **основаніемъ** конической поверхности.

Такъ какъ направляющая и вершина опредѣляютъ коническую поверхность, то въ проекціяхъ эта поверхность дается проекціями вершины и проекціями кривой направляющей.

Черт.253.



Пусть проекціи вершины - (S,S'), а направляющей - (cd, c'd'); построить проекціи конической поверхности, ея слѣды, очерки и точку на ея поверхности (чер.253).

Соединяя прямыми вершины (S,S') съ проекціями точекъ кривой направляющей, получимъ проекціи поверхности, а найдя слѣды построенныхъ образующихъ - найдемъ и слѣды поверхности. На нашей эпюрѣ построенъ горизонтальный слѣдъ $\alpha\beta\gamma$ данной поверхности.

Для построенія точки на поверхности поступаемъ такъ: проводимъ, напримѣръ, вертикальную проекцію $S'\beta'$ образующей и находимъ ея горизонтальную проекцію $S\beta$, для чего точку f' спроектируемъ въ точку f горизонтальной проекціи cd кривой направляющей; тогда Sf или $S\beta$ будетъ искомой проекціей, такъ что $(S'\beta', S\beta)$ будетъ образующей поверхности, а всякая ея точка (n,n') будетъ и точкой поверхности.

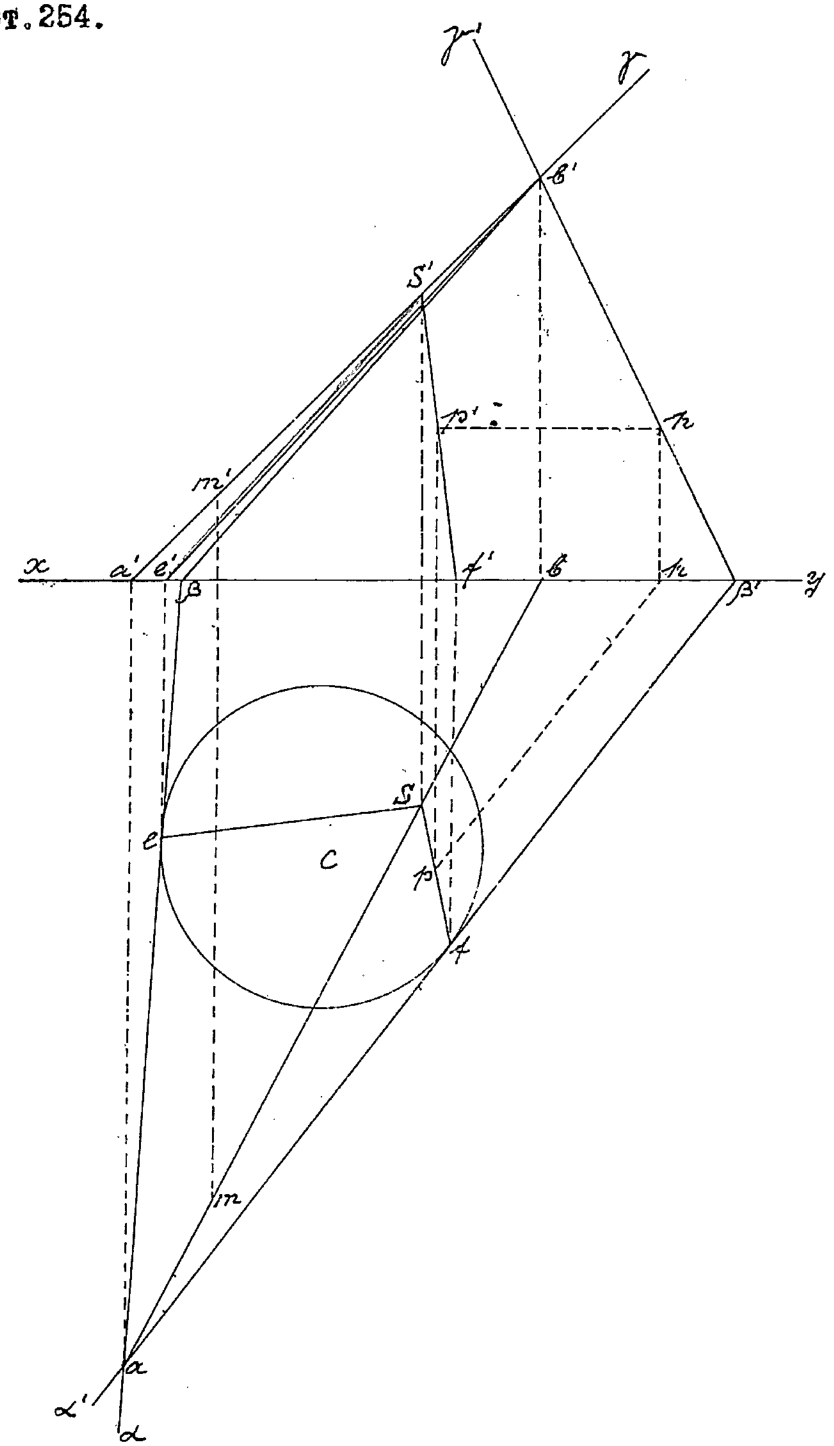
Обратно, если даны проекціи точки (n,n'), то, чтобы узнать, лежитъ ли она на данной поверхности, достаточно соединить ее съ вершиной (S,S') и, если прямая (S'n', Sn) пересѣкаетъ направляющую (cd, c'd'), то точка (n,n') лежитъ на поверхности, въ противномъ случаѣ - внѣ ея.

Такъ какъ между образующими (Sd, S'd') и (Sγ, S'γ') находятся остальныя образующія, то онѣ называ. **предѣльными образующими** или **очеркомъ** конической поверхности.

ЗАДАЧА. Черезъ данную точку (m,m') провести плоскость, касательную къ конической поверхности, данной вершиной (S,S') и направляющей (черт.254).

Положимъ, что направляющей конической поверхности служитъ окружность, лежащая въ горизонтальной плоскости проекцій. Въ этомъ случаѣ окружность C будетъ выражать и горизонтальный слѣдъ конической поверхности. Допустимъ, что касательная плоскость построена, тогда она коснется конической поверхности по образующей, а потому будетъ заключать вершину этой поверхности; вслѣдствіе этого, если данную точку (m,m') соединимъ съ вершиною (S,S'), то получимъ прямую (mS, m'S'), лежащую въ касательной плоскости, и горизонтальный слѣдъ ея, т.е. точка (a,a') будетъ принадлежать горизонтальному слѣду касательной плоскости; но горизонтальный слѣдъ касательной плоскости касается горизонтальнаго слѣда поверхности, а потому, если изъ a проведемъ касательную къ окружности C, то получимъ αβ - го-

Черт.254.



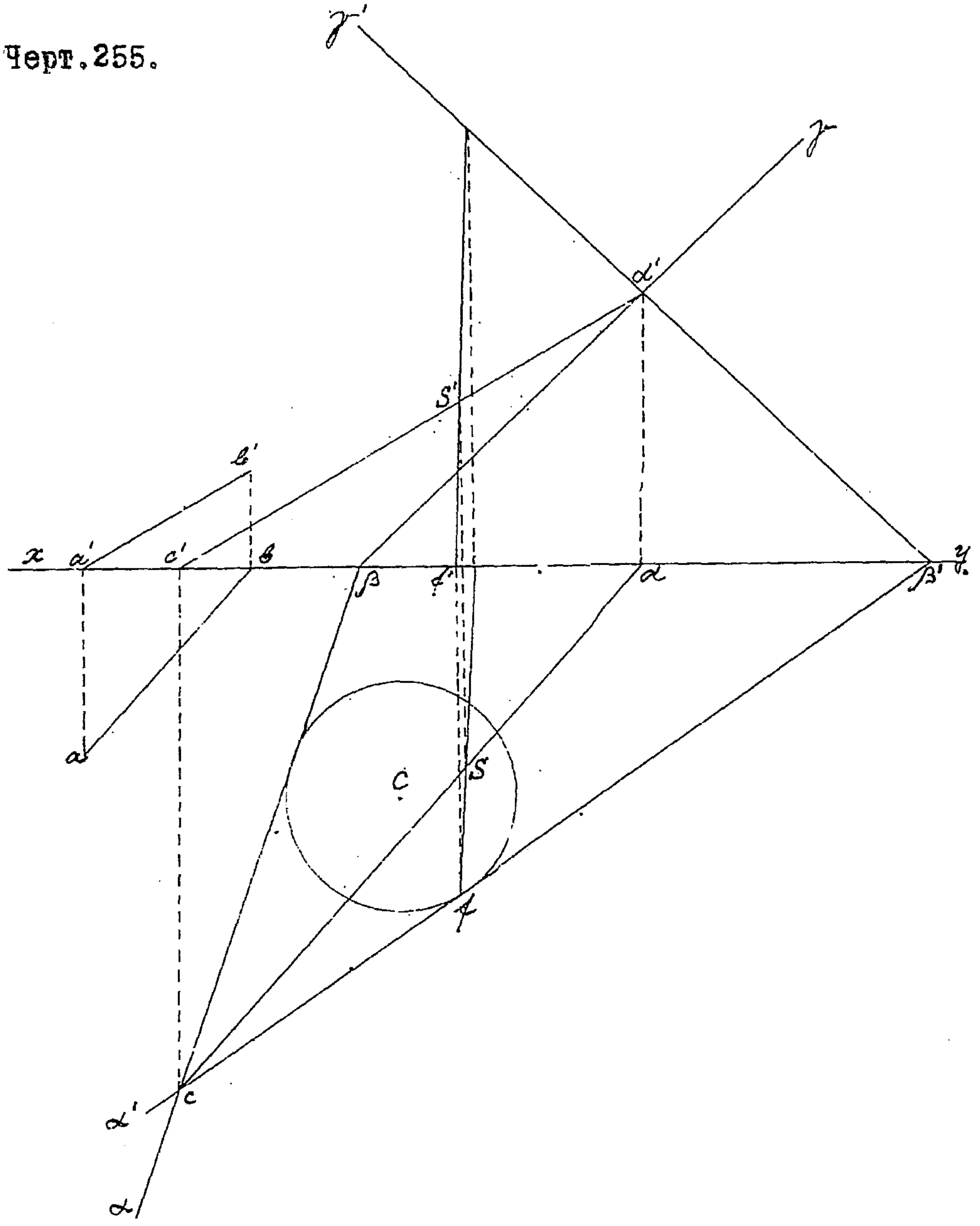
ризонтальный слѣдъ искомой плоскости. Соединяя β съ b', вертикальнымъ слѣдомъ прямой (Sm,S'm') найдемъ вертикальный слѣдъ касательной плоскости; такимъ образомъ αβγ будетъ искомой касательной плоскостью. Чтобы получить образующую касанія, замѣтимъ точку прикосновенія αβ къ окружности C, т.е. точку (e,e'): если эту точку соединимъ съ

(S,S'), то получимъ искомую образующую. Такъ какъ изъ точки a къ окружности C можно провести двѣ касательныя, то задача будетъ имѣть два рѣшенія; проведя касательную af, мы получимъ $\alpha'\beta'$ - горизонтальный слѣдъ второй касательной плоскости, удовлетворяющей нашему условію, вертикальный же слѣдъ ея получится, если найдемъ вертикальный слѣдъ прямой (mS, m'S') или образующей прикосновенія (fS, f'S') и соединимъ полученную точку съ точкой β', въ которой прямая af пересѣкаетъ ось xy. Если же точка β' или вертикальный слѣдъ образующей (fS, f'S') не находятся въ предѣлахъ чертежа, то нужно черезъ какую-нибудь точку (p, p') образующей (fS, f'S') провести прямую (ph, p'h'), параллельную af, и вертикальный слѣдъ ея h' соединить съ b' - вертикальнымъ слѣдомъ (mS, m'S'); b'h' и будетъ искомымъ вертикальнымъ слѣдомъ. Надо замѣтить, что задача эта не всегда возможна; это зависитъ отъ того, гдѣ находится данная точка (m, m'): на поверхности конуса, внутри его или внѣ этой поверхности. Нетрудно сказать, гдѣ находится данная точка; если горизонтальный слѣдъ прямой (mS, m'S') находится на окружности основанія C, то данная точка находится на поверхности конуса, а прямая (mS, m'S') будетъ служить образующей этой поверхности; въ такой точкѣ къ конической поверхности можно провести только одну касательную плоскость. Если же горизонтальный слѣдъ прямой (mS, m'S') находится внѣ окружности C, то данная точка лежитъ внѣ конической поверхности, что и соотвѣтствуетъ разсмотрѣнному выше случаю. Если бы горизонтальный слѣдъ прямой (mS, $m'S'$) находился внутри окружности C, то данная точка (m, m') лежала бы внутри конической поверхности и задача была бы невозможна.

ЗАДАЧА. Къ конической поверхности, данной вершиной (S, S') и направляющей, провести касательную плоскость параллельно данной прямой (ab, $a'b'$) (черт.255).

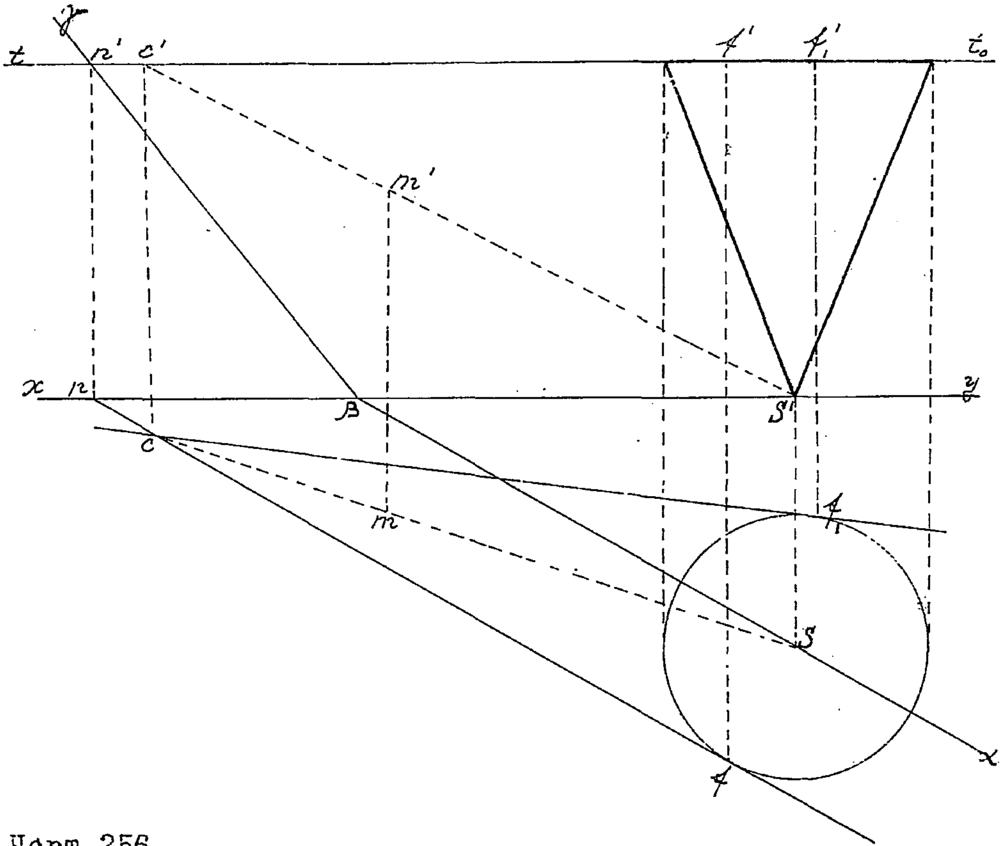
Положимъ, что направляющей конической поверхности служитъ окружность C, лежащая на горизонтальной плоскости; въ такомъ случаѣ она будетъ и горизонтальнымъ слѣдомъ поверхности. Допустимъ, что искомая плоскость построена; тогда она будетъ касаться конической поверхности по образующей и будетъ, слѣдовательно, заключать вершину (S, S'); но такъ какъ эта плоскость параллельна прямой (ab, $a'b'$), то черезъ каждую точку ея можно провести прямую, параллельную (ab, $a'b'$), и потому, если черезъ точку (S, S') проведемъ прямую (Sc, $S'c'$) параллельно (ab, $a'b'$), то найдемъ прямую, принадлежащую искомой плоскости, а горизонтальный слѣдъ ея c будетъ принадлежать горизонтальному слѣду этой плоскости; но горизонтальный слѣдъ искомой плоскости касается окружности C; поэтому, проведя изъ C касательную къ окружности, получимъ $\alpha\beta$ - горизонтальный слѣдъ искомой плоскости. Вертикальный слѣдъ найдемъ, если β соединимъ съ вертикальнымъ слѣдомъ прямой (Sc, $S'c'$). Проводя изъ C другую касательную къ горизонтальному слѣду конической поверхности, получимъ $\alpha'\beta'$ - горизонтальный слѣдъ

Черт.255.



другой касательной плоскости. Если бы $\alpha'\beta'$ въ предѣлахъ чертежа не пересѣкала ось проекцій xy, то вертикальный слѣдъ $\beta'\gamma'$ мы нашли бы такъ, какъ въ предыдущей задачѣ. Эта задача не всегда возможна: если точка (c,c') находится внѣ окружности C, то имѣемъ два рѣшенія; если на окружности, то – одно; если внутри окружности – рѣшеніе невозможно.

З А Д А Ч А. Построить касательную плоскость, проходящую черезъ данную точку (m,m') къ прямому конусу, вершина котораго лежитъ на горизонтальной плоскости проекцій, а основаніе параллельно этой плоскости (черт.256).



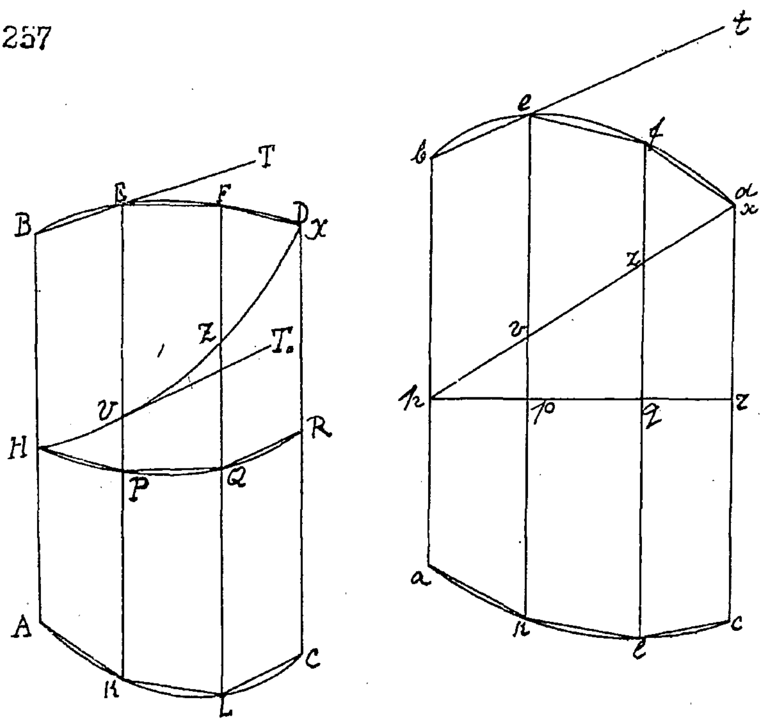
Черт.256.

Для этого черезъ вершину конуса (S,S') и точку(m,m') проводимъ прямую (Sm, S'm') и находимъ слѣдъ ея (c,c') на плоскости t_0t основанія конуса. Проведя изъ точки (c,c') касательную къ основанію конуса, получимъ прямую, принадлежащую искомой касательной плоскости; но такихъ касательныхъ можно провести двѣ: (cf, c'f') и (cf_1, $c'f_1'$), вертикальныя проекціи которыхъ сливаются съ tt_0, поэтому черезъ данную точку (m,m') можно провести къ данной поверхности двѣ касательныя плоскости, горизонтальные слѣды которыхъ, проходя черезъ S, будутъ соотвѣтственно параллельны cf и cf_1. Проводя эти параллели, мы найдемъ горизонтальные слѣды искомыхъ плоскостей. На чертежѣ 256 построены слѣды только одной плоскости $\alpha\beta\gamma$, при чемъ $\alpha\beta$ паралл. cf.

РАЗВЕРТЫВАНІЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ.

Мы знаемъ, что цилиндрическая поверхность относится къ поверхностямъ разгибающимся, т.е. такимъ, которыя могутъ быть развернуты въ плоскость безъ разрыва между частями. Положимъ, что надо развернуть въ плоскость часть цилиндрической поверхности, заключенную между образующими AB и CD и двумя кривыми AC и BD (черт.257). Всякую цилин-

Черт 257



дрическую поверхность можно разсматривать какъ предѣлъ поверхности призматической. Чтобы доказать это, въ кривую BD вписываемъ какую-нибудь ломаную линію, содержащую n сторонъ, и черезъ вершины ея E,F ..... проводимъ прямыя, параллельныя образующей AB, которыя пересѣкутъ кривую AC въ точкахъ K,L .....; соединивъ эти точки между собою, а также съ точками A и C, получимъ ломаную AKLC, вписанную въ кривую AC и содержащую n сторонъ. Если черезъ каждыя двѣ смежныя образующія проведемъ плоскость, то получимъ призматическую поверхность, вписанную въ цилиндрическую. Допустимъ, что число сторонъ n каждой изъ ломаныхъ линій увеличивается безпредѣльно, тогда ломаныя линіи будутъ приближаться къ соотвѣтствующимъ кривымъ, а призматическая поверхность будетъ приближаться къ цилиндрической и, т.к. предѣлъ ломаной линіи есть кривая BD, то предѣломъ призматической поверхности будетъ служить данная цилиндрическая поверхность. Такимъ образомъ всякую цилиндрическую поверхность можно разсматривать какъ предѣлъ призматической поверхности, а, слѣдовательно, развертку цилиндрической поверхности можно разсматривать какъ предѣлъ развертки призматической поверхности. Какъ строится развертка призматической поверхности, извѣстно. Чтобы получить развертку цилиндрической поверхности, впишемъ въ нее какую-нибудь призматическую поверхность и строимъ развертку ея; положимъ, что въ данномъ случаѣ разверткой ея будетъ служить befdckla (черт.257); если грани призматической поверхности будутъ достаточно малы, то эту поверхность можно разсматривать какъ цилиндрическую, а развертку ея - какъ развертку цилиндрической поверхности. Такимъ образомъ развернуть цилиндрическую поверхность можно только приближенно, и развертка будетъ тѣмъ точнѣе, чѣмъ меньше грани призмы. Изъ такого построенія развертки слѣдуетъ, что ломаная линія BEFD = = befd; это равенство будетъ справедливо при какомъ угодно числѣ сторонъ вписанной ломаной линіи, поэтому $\lim$ BEFD= = $\lim$ befd; въ предѣлахъ ломаныя линіи обратятся соотвѣтственно въ кривыя BD и bd, поэтому кривая BD = кривой bd, а это равенство показываетъ, что всякая кривая, взятая на цилиндрической поверхности, сохраняетъ свою длину на разверткѣ. Развертку призматической поверхности мы можемъ построить посредствомъ перпендикулярнаго сѣченія; если черезъ точку H проведемъ плоскость, перпендикулярную къ AB, то получимъ въ сѣченіи съ цилиндрической поверхностью кривую HR, а съ призматической - ломаную HPQB. Мы знаемъ, что периметръ перпендикулярнаго сѣченія призмы развертывается въ прямую, перпендикулярную къ боковымъ ребрамъ, поэтому и кривая перпендикулярнаго сѣченія цилиндра развертывается въ прямую, перпендикулярную къ образующимъ цилиндра, и если hr равна длинѣ кривой HPQR, то, проведя черезъ h и r перпендикуляры къ hr, получимъ на разверткѣ положеніе образующихъ AB и CD. Раздѣлимъ кривую HR и прямую hr на соотвѣтственное число частей и въ точкахъ p, q.... и т.д. возставимъ перпендикуляры къ hr, на которыхъ отложены длины hb = HB, pe = PE, qf = QF и т.д., и, соединивъ полученныя точки непрерывной чертой, получимъ развертку разсматриваемой части цилиндрической поверхности.

Степень точности построенія развертки цилиндра зависитъ отъ степени точности выпрямленія кривой перпендикулярнаго сѣченія.

Разсмотримъ нѣкоторыя свойства линій, лежащихъ на цилиндрической поверхности. Первое свойство, а именно: „всякая кривая, лежащая на цилиндрической поверхности, сохраняетъ свою длину на разверткѣ" - мы уже разсмотрѣли. Второе свойство: „уголъ, составленный касательной къ какой-нибудь кривой, лежащей на цилиндрической поверхности, съ образующей, проходящей черезъ точку касанія, сохраняетъ свою величину и на разверткѣ." Въ точкѣ E кривой BD проведемъ къ ней касательную EF и докажемъ, что уголъ FEK сохранитъ свою величину на разверткѣ. Изъ построенія развертки видно, что уголъ fek равенъ углу FEK; равенство этихъ угловъ справедливо при какомъ угодно числѣ сторонъ ломаной линіи BEFD, стало быть оно справедливо и въ предѣлѣ, а такъ какъ ef въ предѣлѣ обращается въ касательную къ кривой bd въ точкѣ e, а EF - въ касательную къ кривой BD въ точкѣ E, то, слѣдовательно, предыдущее равенство въ предѣлѣ будетъ: уголъ tek = = углу TEK, а это равенство есть требуемое. Линія bd относительно линіи BD называется ея преобразованіемъ; мы видѣли, что преобразованіемъ кривой перпендикулярнаго сѣченія служитъ прямая, но на поверхности цилиндра существуетъ мно-

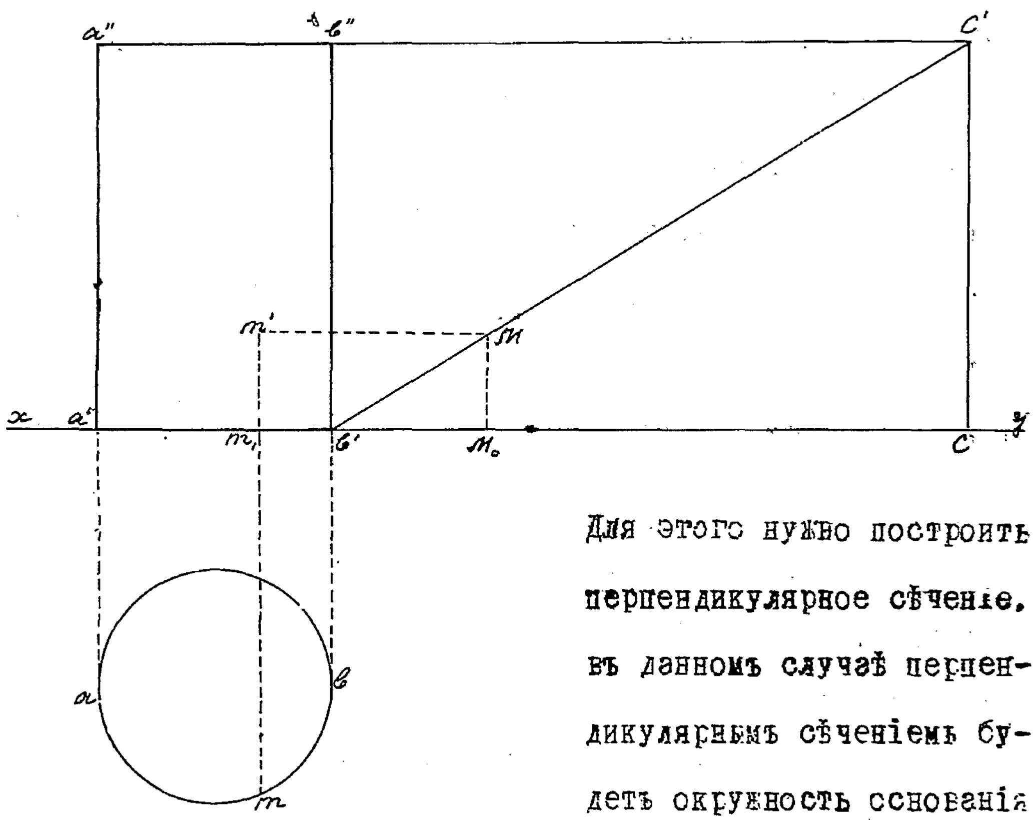
ТИПО-ЛИТ. Ю. ВЕНЕРЪ ПРЕЕМН. О. ФАЛЬКЪ.
ЛИСТЪ 19-й.

жество такихъ кривыхъ, преобразованіемъ которыхъ служатъ прямыя; для этого черезъ h (черт. 257) проведемъ прямую hx и замѣтимъ точки v и z...., въ которыхъ она пересѣкаетъ прямыя ke, lf...., а на поверхности цилиндра отмѣтимъ соответствующія имъ точки V, Z.... (qz = QZ, pv = PV) и соединимъ ихъ непрерывной чертой; тогда на поверхности цилиндра получимъ такую кривую HX, преобразованіемъ которой служитъ прямая hx. Такія кривыя, какъ HVZ...., называются винтовыми линіями. Эти линіи представляютъ кратчайшее разстояніе между двумя точками цилиндрической поверхности; дѣйствительно, разстояніе HX будетъ кратчайшимъ, потому что HX преобразовывается въ прямую и притомъ сохраняетъ свою длину на разверткѣ; такимъ образомъ HVZX равна hx, но hx есть прямая, слѣдовательно HX будетъ кратчайшимъ разстояніемъ между двумя точками цилиндрической поверхности.

Если въ какой-нибудь точкѣ винтовой линіи проведемъ прямолинейную касательную, то уголъ, составленный ею съ образующей, имѣетъ величину постоянную во всѣхъ точкахъ винтовой линіи. Проведемъ касательную къ винтовой линіи HX (черт. 257) въ точкѣ V и докажемъ, что уголъ T_oVK имѣетъ величину постоянную во всѣхъ точкахъ этой кривой; для этого обратимся къ разверткѣ; мы знаемъ, что уголъ, образуемый касательной къ какой-нибудь кривой, лежащей на цилиндрической поверхности съ образующей, проходящей черезъ точку касанія, сохраняетъ свою величину; но на разверткѣ этотъ уголъ $T_0VK = xvk$, потому что касательная T_0V при развертываніи совпала съ этой прямой; уголъ xvk = углу xzl = const., поэтому T_0VK имѣетъ постоянную величину.

Разсмотримъ развертываніе прямого цилиндра, даннаго ортогональными проекціями. Пусть даны проекціи прямого цилиндра, поставленнаго основаніемъ на горизонтальную плоскость проекцій; требуется найти его развертку (черт.258).

Черт.258.



Для этого нужно построить перпендикулярное сѣченіе, въ данномъ случаѣ перпендикулярнымъ сѣченіемъ будетъ окружность основанія цилиндра. Разрѣжемъ цилиндръ по образующей b'b" и примемъ ее за начало развертки; на оси xy отложимъ отрѣзокъ b'C = = окружности основанія, черезъ C проведемъ перпендикуляръ къ xy и на немъ отложимъ высоту цилиндра; точку C' соединимъ съ b" и получимъ прямоугольникъ b'b"C'C, выражающій развертку цилиндра. Если b' соединимъ съ C', то получимъ діагональ, на которую можно смотрѣть, какъ на преобразованіе винтовой линіи; по этому преобразованію построимъ винтовую линію на поверхности цилиндра, для чего возьмемъ точку М на прямой ъ'С', изъ которой опустимъ перпендикуляръ MM_o на ху; на цилиндрѣ отъ точки ъ по окружности его основанія откладываемъ дугу ъm = M_oъ'; строимъ образующую, выходящую изъ точки m, и на ней откладываемъ длину $m_1 m'$ = = $M_o M$; тогда получимъ точку (m, m'), которая будетъ принадлежать винтовой линіи.

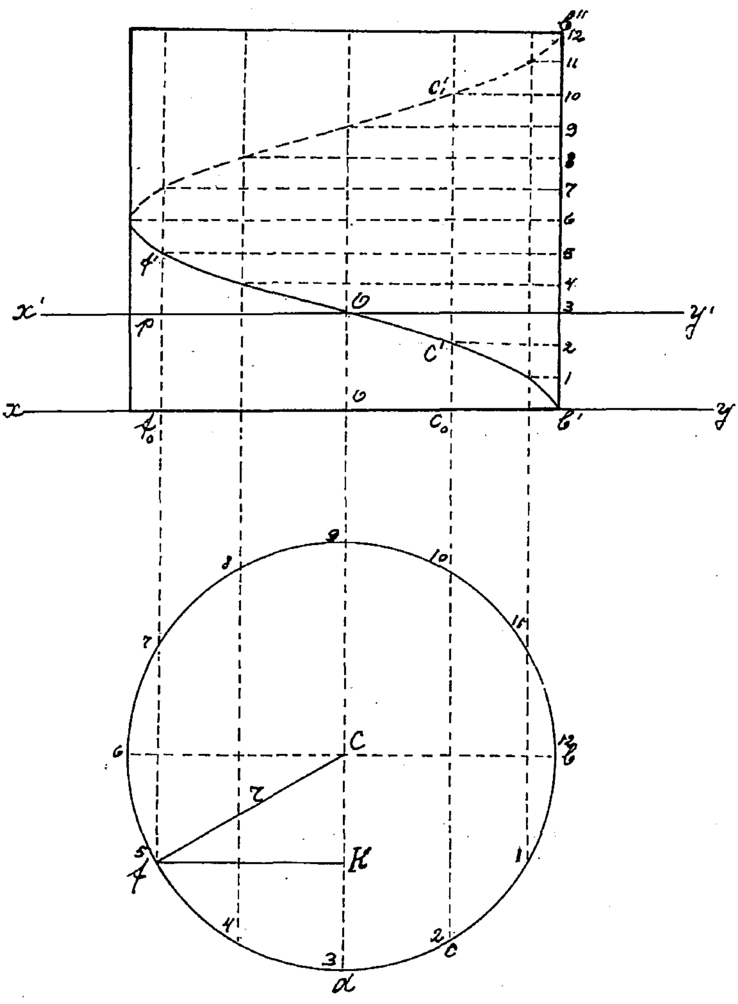
Такимъ образомъ мы можемъ найти на цилиндрѣ сколько угодно точекъ, совокупность которыхъ составитъ кривую, которая и будетъ винтовой линіей. Но винтовую линію на цилиндрѣ легче построить другимъ способомъ. Замѣтимъ, что горизонтально-проектирующая каждой точки винтовой линіи такъ относится къ высотѣ цилиндра, какъ длина дуги, заключенной между началомъ винтовой линіи и той образующей, на которой находится разсматриваемая точка, относится къ окружности основанія цилиндра, т.е. $\frac{m'm_1}{a'a''} = \frac{\smile ъm}{\text{окр.основ}}$

Чтобы доказать эту пропорцію, разсмотримъ треугольники ъ'MM_o и ъ'С'С; изъ ихъ подобія слѣдуетъ: $\frac{M\,M_o}{C'C} = \frac{ъ'M_o}{ъ'C}$;

но $MM_o = m'm_1$; ъ'M_o = $\smile$ ъm; С'С = a'a"; ъ'С = окружности основанія цилиндра, слѣдовательно $\frac{m'm_1}{a'a''} = \frac{\smile ъm}{\text{окр.основ.}}$;

на основаніи этого свойства винтовую линію на цилиндрѣ можно построить такимъ образомъ: раздѣлимъ окружность основанія и высоту цилиндра ъ'ъ" на одинаковое число равныхъ ча-

Черт. 259



стей, затѣмъ черезъ точки дѣленія образующей ъ'ъ" проведемъ прямыя, параллельныя оси xy, до встрѣчи съ соотвѣтственными образующими; полученныя точки соединимъ непрерывной чертой, которая и будетъ искомой. Замѣтимъ, что длина (черт. 259-ый) образующей цилиндра, заключенная между двумя ея точками ъ' и ъ", въ которыхъ она пересѣкается винтовою линіей, называется винтовымъ шагомъ, а отрѣзокъ винтовой линіи, ограниченной точками ея пересѣченія съ одной и той же образующей, называется ея оборотомъ. Докажемъ, что точки, построенныя такимъ образомъ, будутъ принадлежать винтовой линіи, т.е. будутъ удовлетворять пропорціи, характеризующей винтовую линію. Возьмемъ точку (C,C'), тогда по предыдущему должны имѣть: $\frac{C'C_0}{ъ'ъ''} = \frac{\smile ъc}{\text{окр.основ.}}$ Повѣримъ эту пропорцію, для чего положимъ, что $\frac{b'b''}{12} = z$; тогда $C'C_o = 2z$; $b'b'' = 12z$; положимъ также: $\frac{\text{окр.основ.}}{12} = v$; $\smile bc = 2v$; окруж.основ.цилиндр. $= 12v$; подставляя въ повѣряемую пропорцію, получимъ: $\frac{2z}{12z} = \frac{2v}{12v}$; пропорція удовлетворяется, а потому точка (C, C') обладаетъ свойствомъ точекъ винтовой линіи, т.е. принадлежитъ винтовой линіи. Надо замѣтить, что вертикальная проекція винтовой линіи есть синусоида; чтобы доказать это, составимъ уравненіе вертикальной проекціи винтовой линіи. Примемъ за начало координатъ точку O, въ которой вертикальная проекція кривой пересѣкаетъ вертикальную проекцію оси цилиндра, линію Ox' - за ось x-овъ, а прямую oO - за ось y-овъ; тогда для точки (f, f') $Op = x$, $f'p = y$; найдемъ зависимость между этими координатами; изъ чертежа 259 видно, что $Op = fK = x = r\,\mathrm{Sn}\, fCK$; но $\angle fCK = \frac{\smile fd}{r}$;

$$x = r\,\mathrm{Sn}\,\frac{\smile fd}{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Изъ пропорцій: $f'f_o : b'b'' = \smile bf : 2\pi r$ и $Oo : b'b'' = \smile bd : 2\pi r$ имѣемъ: $f'f_o : Oo = \smile bf : \smile bd$; составимъ производную пропорцію: $(f'f_o - Oo) : Oo = (\smile bf - \smile bd) : \smile bd$; $f'f_o - Oo = f'p = y$; $\smile bf - \smile bd = \smile df$; $y : Oo = \smile df : \smile bd$; или $y : \smile df = Oo : \smile bd = h : 2\pi r$; откуда: $\smile df = 2\pi r\frac{y}{h}$, гдѣ $h = b'b''$.

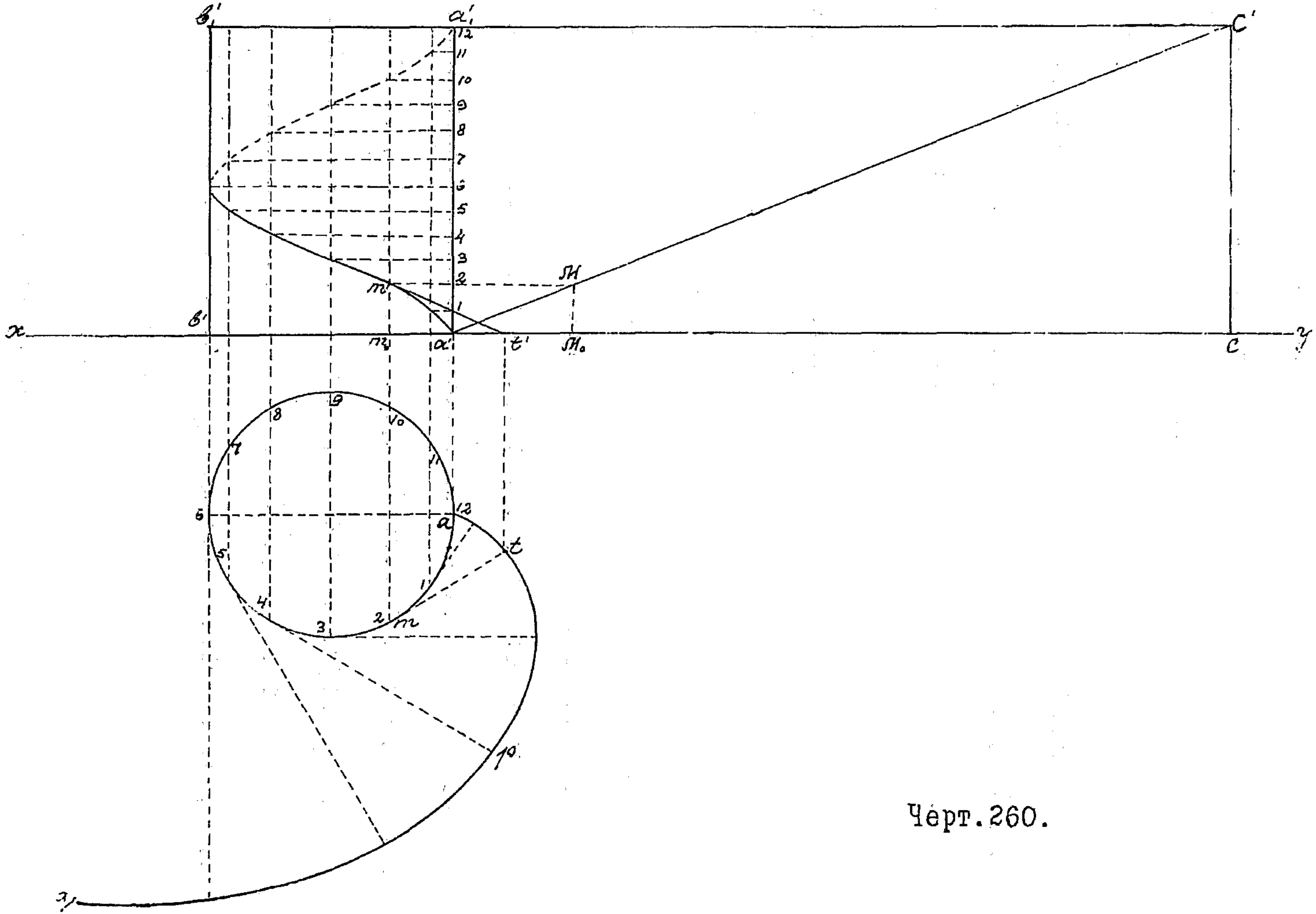
Замѣняя въ (1) уравненіи $\smile df$ равнымъ выраженіемъ, получимъ:

$$x = r\,\mathrm{Sin}\,2\pi\frac{y}{h}.$$

Это уравненіе показываетъ зависимость между координатами разсматриваемой точки кривой, слѣдовательно это есть уравненіе этой кривой, но кривая, выраженная такимъ уравненіемъ, называется синусоидой, только расположенной по оси y-овъ, а не по оси x-овъ, какъ мы видимъ въ кривой $y=\sin x$.

Разсмотрѣнное построеніе цилиндрической винтовой линіи приводитъ къ слѣдующему ея образованію: если уголъ (чертежъ 258) Cb'C' навернемъ на цилиндръ такъ, что его сторона b'C навернется на окружность основанія цилиндра, то другая сторона b'C' расположится по винтовой линіи.

Разсмотримъ теперь построеніе касательной къ цилиндрической винтовой линіи (черт.260). Построимъ касательную въ точкѣ (m,m'). Предположимъ, что касательная построена и она есть (mt, m't'), при чемъ горизонтальная ея проекція mt касается къ горизонтальной проекціи винтовой линіи, а вертикальная - вертикальной; тогда мы получимъ прямоугольный треугольникъ, гипотенузой котораго служитъ касательная (mt, m't'), однимъ катетомъ - отрѣзокъ (m, $m_o m'$) образующей, а другимъ - горизонтальная проекція mt. Если бы мы сумѣли построить этотъ треугольникъ, то у насъ получилась бы длина горизонтальной проекціи mt касательной, по которой можно построить и вертикальную. Разсмотримъ этотъ треугольникъ. По свойству винтовой линіи уголъ, составленный касательной съ соотвѣтствующей образующей цилиндра, сохраняетъ свою величину на разверткѣ; отсюда слѣдуетъ, что уголъ, составленный касательной (mt, m't') съ образующей (m, $m_o m'$),



Черт.260.

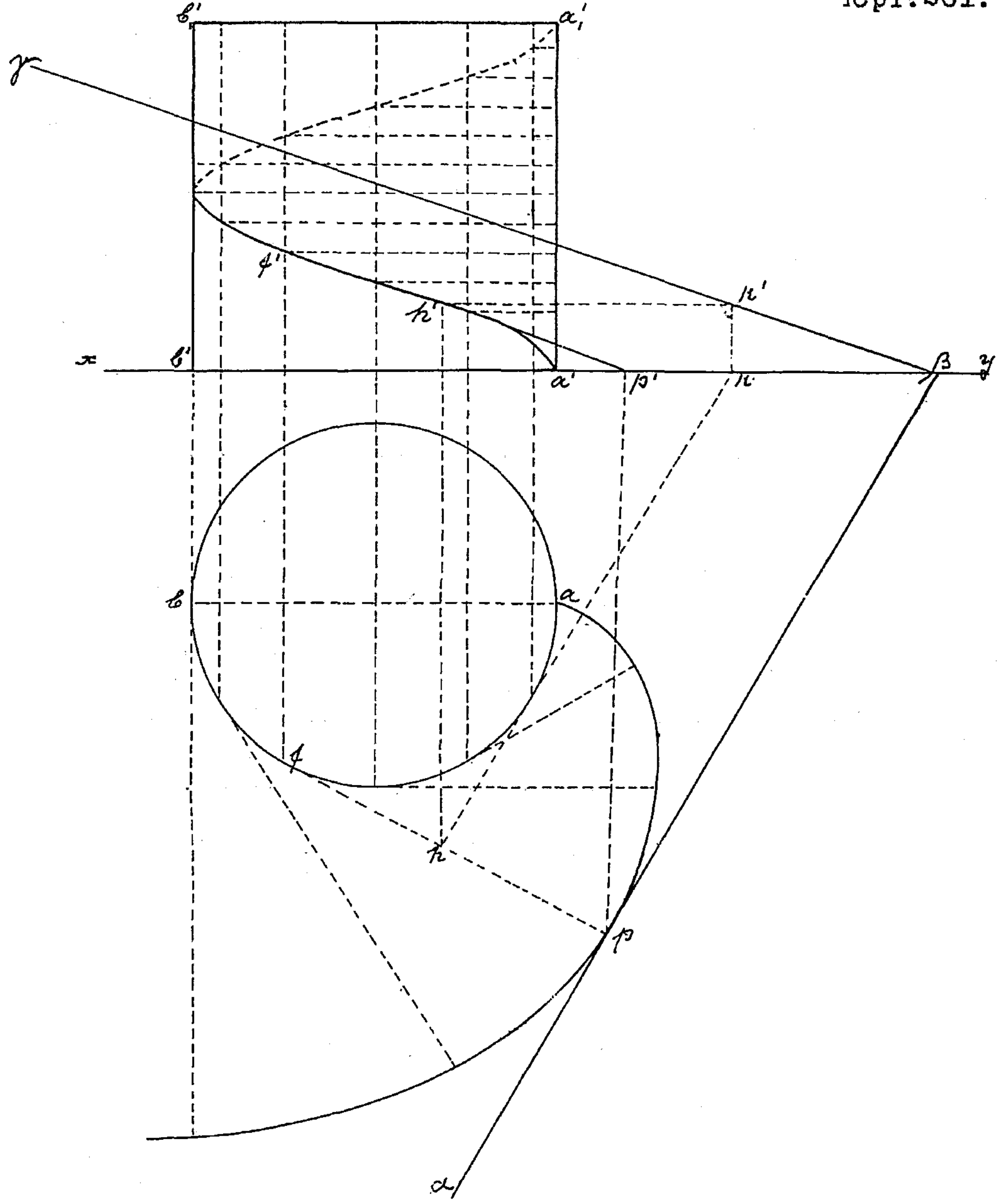
равенъ углу $a'MM_0$; въ то же время $m_0m' = MM_0$, слѣдовательно катетъ и прилежащій уголъ разсматриваемаго треугольника равны тѣмъ же частямъ треугольника $a'MM_0$, т.е. эти треугольники равны, а слѣдовательно и катетъ перваго mt = катету $a'M_0$ второго, а $a'M_0 = \smile am$; поэтому $mt = \smile am$. Итакъ, горизонтальная проекція касательной равна длинѣ дуги цилиндра между началомъ винтовой линіи и горизонтальной проекціей разсматриваемой точки. Поэтому, отложивъ на касательной mt длину дуги am, получимъ горизонтальную проекцію касательной къ винтовой линіи (m,m'). По горизонтальной проекціи строимъ вертикальную, т.е. проектируемъ горизонтальный слѣдъ t касательной на ось проекцій въ точку t', которую и соединяемъ съ m' Прямая $(mt, m't')$ будетъ искомой касательной.

Если касательная будетъ катиться по винтовой линіи, оставаясь къ ней касательной, то горизонтальный слѣдъ ея опишетъ кривую, которая называется развертывающей окружности. Это видно изъ того, что $mt = \smile am$. Касательную mt мы взяли произвольно, слѣдовательно подобныя равенства существуютъ для всѣхъ касательныхъ, представляющихъ собой горизонтальныя проекціи касательныхъ къ винтовой линіи, а отсюда видно, что полученная кривая atp.... - развертывающая окружности.

Поверхность, получающаяся отъ движенія касательной по винтовой линіи, называется разгибающимся г е л л и с о и д о м ъ. Эта поверхность - разгибающаяся, что видно изъ ея образованія, такъ какъ раньше было доказано, что отъ движенія касательной по кривой двойной кривизны получается разгибающаяся поверхность, винтовая же линія есть кривая двойной кривизны.

Разсмотримъ теперь построеніе касательной плоскости къ разгибающемуся геллисоиду въ данной точкѣ (черт.261). Пусть точка дана двумя проекціями (h,h'), но, если она да-

Черт.261.



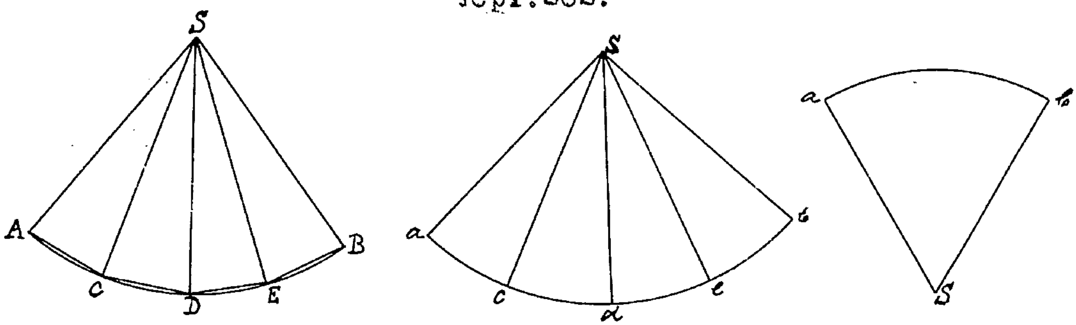
на одной горизонтальной, то вертикальную мы можемъ построить. Предположимъ, что дана одна горизонтальная проекція h; проводимъ черезъ нее горизонтальную проекцію соотвѣтствующей образующей fp и ея вертикальную проекцію f'p', на которую и спроектируемъ точку h въ h'.

Для того, чтобы провести черезъ точку (h,h') касательную плоскость, замѣтимъ, что, такъ какъ данная поверхность - разгибающаяся, то касательная плоскость касается поверхности по всей образующей, проходящей черезъ точку (h,h'); слѣдовательно и точка (p,p'), лежащая на образующей (fp, f'p'), принадлежитъ касательной плоскости. Отсюда видно, что, если мы проведемъ касательную въ точкѣ p къ горизонтальному слѣду данной поверхности, то получимъ - горизонтальный слѣдъ касательной плоскости. Чтобы найти вертикальный слѣдъ этой плоскости, найдемъ вертикальный слѣдъ образующей касанія и соединимъ его съ точкой β или же черезъ точку (h,h') проведемъ горизонталь (hk, h'k') искомой плоскости и, найдя ея вертикальный слѣдъ (k,k'), соединимъ его съ β; тогда плоскость $\alpha\beta\gamma$ будетъ искомою.

РАЗВЕРТЫВАНІЕ КОНИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ.

Положимъ, что надо развернуть часть конической поверхности, заключенной между образующими AS и BS и произвольной кривой AB (черт.262).

Черт.262.



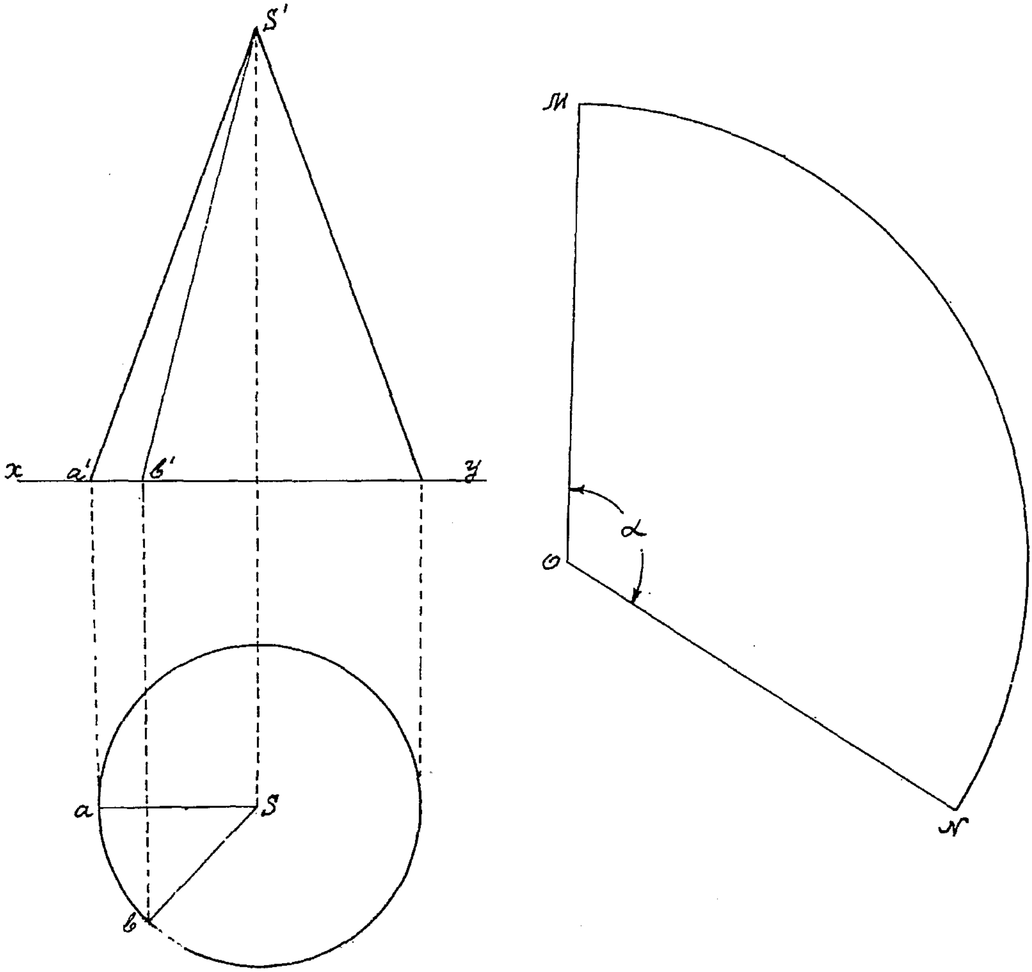
Предварительно докажемъ, что всякую коническую поверхность можно разсматривать, какъ предѣлъ поверхности пирамидальной; для этого впишемъ въ кривую AB ломаную ACDEB, содержащую n сторонъ: вершину S соединимъ съ точками C, D, E, и черезъ каждыя двѣ смежныя образующія проведемъ плоскость, вслѣдствіе чего получимъ пирамидальную поверхность, вписанную въ коническую. Затѣмъ положимъ, что число сторонъ ломаной ACDEB увеличивается неопредѣленно, тогда эта линія въ предѣлѣ обратится въ кривую AB, а пирамидальная поверхность - въ коническую. Для развертыванія конической поверхности замѣнимъ ее пирамидальной поверхностью съ достаточно малыми гранями; тогда, построивъ развертку Sacdeb этой послѣдней поверхности, получимъ приближенную развертку и конической поверхности; степень приближенія будетъ зависѣть отъ того, насколько ломаная линія, вписанная въ кривую AB, подходитъ къ этой кривой. Изъ построенія развертки пирамидальной поверхности SACDEB слѣдуетъ, что ломаная ACDEB = ломаной acdeb, а потому и кривая AB = кривой ab, т.е. произвольная кривая конической поверхности сохраняетъ свою длину на разверткѣ.

Если точки кривой АВ будутъ равноудалены отъ вершины S, то развертка разсматриваемой части конической поверхности выразится круговымъ секторомъ, котораго радіусъ равенъ образующей конуса. Дѣйствительно, точки a, c, d, e, b находятся отъ вершины S на такомъ же разстояніи, на какомъ находятся A, C, D, E, B отъ точки S; если точки кривой АВ равноудалены отъ S, то и точки кривой ab тоже будутъ равноудалены отъ S и, слѣдовательно, разверткой aSb конической поверхности будетъ круговой секторъ. Чтобы получить на поверхности конуса кривую, точки которой равноудалены отъ вершины, примемъ вершину конуса за центръ шара произвольнаго радіуса, тогда сѣченіе его съ конической поверхностью и дастъ кривую, обладающую сказаннымъ свойствомъ. Для построенія развертки такого конуса описываютъ изъ произвольной точки S радіусомъ Sa, равнымъ радіусу шара, окружность, и на ней отъ какой-нибудь точки a откладываютъ длину, равную длинѣ кривой сѣченія конуса съ шаромъ; тогда секторъ Sab и выразитъ развертку разсматриваемой части конической поверхности. Мы откладываемъ дугу ab, равную длинѣ кривой, лежащей на конической поверхности, потому, что всякая кривая, лежащая на конической поверхности, сохраняетъ свою длину на разверткѣ.

З А Д А Ч А. Развернуть поверхность прямого конуса (черт. 283).

Чтобы построить развертку конуса, надо, какъ извѣстно,

Черт.263.



на поверхности его назначить такую кривую, всѣ точки которой были бы равноудалены отъ вершины (черт.262).Такой кривой будетъ служить окружность основанія конуса.Поэтому для построенія развертки поступаемъ такъ: изъ какой-нибудь точки О, какъ изъ центра, радіусомъ, равнымъ длинѣ образующей s'a', описываютъ дугу, на которой откладываютъ дугу MN, равную длинѣ окружности основанія конуса, тогда секторъ ONM и выразитъ развертку конуса. Вмѣсто того, чтобы откладывать на дугѣ MN часть, равную окружности основанія конуса, мы можемъ вычислить число градусовъ угла MON и по ве-

личинѣ этого угла построить развертку конуса. Число градусовъ опредѣлится такъ: положимъ, что дуга MN содержитъ α°, тогда $\smile MN = 2\pi \frac{ON\alpha^\circ}{360} = 2\pi(as)$, такъ какъ дуга MN равна окружности основанія, а окружность основанія равна $2\pi(as)$. Отсюда находимъ: $\alpha^\circ = 360^\circ \frac{as}{ON} = 360^\circ \frac{as}{s'a'}$.
Такимъ образомъ число градусовъ угла при центрѣ развертки равно произведенію 360 на отношеніе горизонтальной проекціи образующей къ ея длинѣ. Такъ какъ as и a's' извѣстны, то число градусовъ угла MON легко можно опредѣлить.

Подобнымъ же образомъ находятъ развертку какой-ниб. части конической поверхности, напр., ограниченной образующими (as, a's'), (bs, b's') и дугой (ab, a'b').

О КОНИЧЕСКОЙ ВИНТОВОЙ ЛИНІИ.

Коническая винтовая линія происходитъ отъ движенія точки по поверхности конуса, такимъ образомъ, что угловыя пространства, проходимыя ею, пропорціональны разстоянію ея отъ вершины. Коническая винтовая линія получаетъ названіе отъ рода той конической поверхности, на которой она находится; если разсматриваемая поверхность есть конусъ вращенія, то винтовая линія, находящаяся на ней, называется к р у г о в о й. Положимъ, что намъ данъ конусъ вращенія (черт.264) и на немъ винтовая круговая линія SABCDEF, тогда мы должны имѣть слѣдующую пропорцію:

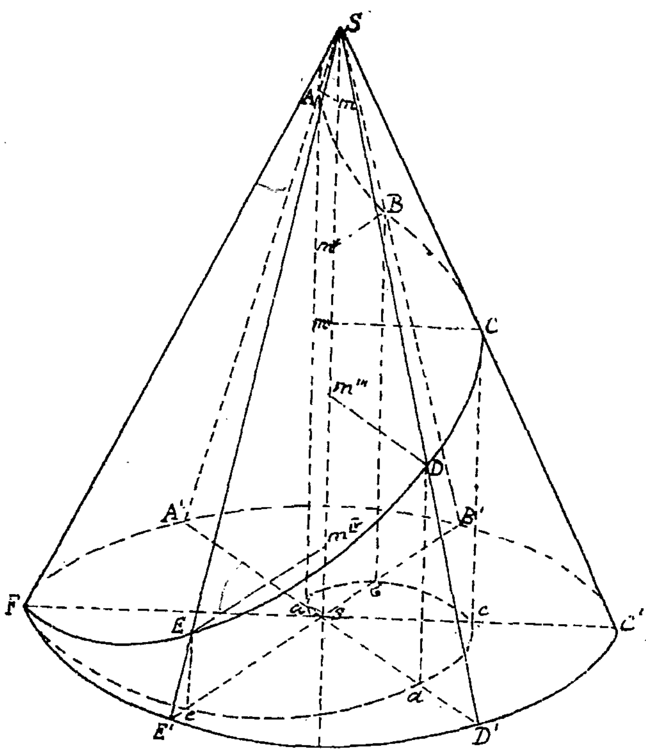
$$\frac{SA}{\angle FsA'} = \frac{SB}{\angle FsB'} = \frac{SC}{\angle FsC'} = \ldots = M \ldots (1);$$

для второго оборота будемъ имѣть:

$$\frac{SA_{\prime}}{360^\circ + \angle FsA'} = \frac{SB_{\prime}}{360^\circ + \angle FsB'} = \ldots\ldots = M;$$

для третьяго: $$\frac{SA_{\prime\prime}}{2.360^\circ + \angle FsA'} = \frac{SB_{\prime\prime}}{2.360^\circ + \angle FsB'} = \ldots = M \text{ и т.д.}$$

Черт.264.



Часть винтовой линіи SABCDEF, заключенная между точками одной образующей, назыв. винтовымъ оборотомъ, а длина образующей SF наз. шагомъ винтовой линіи.

Построимъ проекцію винтовой линіи на плоскости основанія конуса, для чего A, B, C, ... проектируемъ въ точки a, b, c.... на основаніе конуса и соединяемъ эти проекціи непрерывной чертой; получаемъ проекцію sabcdeF винтовой линіи, которая будетъ Архимедовой спиралью, т.е. такой кривой, въ которой радіусы-векторы прямо пропорціональны угламъ, которые они дѣлаютъ съ нѣкоторой постоянной прямой. Въ нашемъ случаѣ радіусами-векторами будутъ служить прямыя sa, sb, sc......; точка s будетъ полюсомъ, а линія FC' - полярной прямой, отъ которой отсчитываются углы. Чтобы обнаружить свойство этой кривой, мы изъ точки A проводимъ Am паралл. A's, изъ B - Bm' паралл. B's, изъ C - Cm" паралл. C's и т.д., черезъ что получаемъ рядъ подобныхъ треугольниковъ: ASm, BSm', CSm", изъ которыхъ слѣдуетъ:

$$AS : Am = BS : Bm' = CS : Cm'' \ldots\ldots (2),$$

но Am = as, Bm' = bs, Cm" = cs, какъ отрѣзки параллельныхъ между параллельными, а поэтому рядъ (2) приметъ видъ:

$$AS : as = BS : bs = CS : cs \ldots\ldots (3).$$

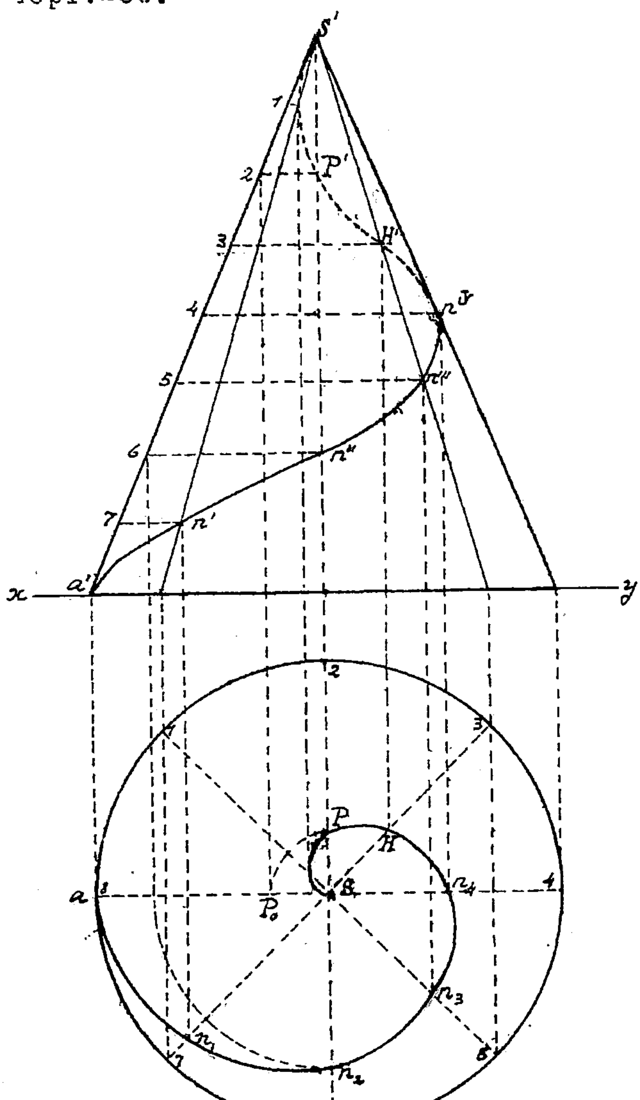
Дѣля (1) рядъ на (3), находимъ:

$$as : \angle FsA' = bs : \angle FsB' = cs : \angle FsC' = \ldots = N,$$

гдѣ N есть постоянная величина. Послѣдній рядъ показываетъ, что радіусы-векторы кривой sabcdef пропорціональны угламъ, которые они дѣлаютъ съ прямой FC', слѣдовательно проекція конической винтовой линіи на плоскость основанія конуса есть Архимедова спираль.

Разсмотримъ построеніе проекціи конической винтовой линіи на плоскостяхъ проекцій. Положимъ, что S'a' (чертежъ 265) выражаетъ шагъ винтовой линіи. Чтобы построить эту кривую, поступаемъ такъ: дѣлимъ окружность основанія и шагъ S'a' винтовой линіи на одинаковое число частей, положимъ на 8, и проводимъ черезъ точки дѣленія шага S'a' параллели оси проекцій до встрѣчи съ соотвѣтствующими образующими, проведенными изъ точекъ дѣленія окружности основанія; такимъ образомъ мы получимъ рядъ точекъ, соединивъ которыя, будемъ имѣть вертикальную проекцію a'n'n"...

Черт.265.



винтовой линіи. Горизонтальная проекція получится, если точки n', n'', n'''.... спроектируемъ на горизонтальныя проекціи соотвѣтствующихъ образующихъ въ точки n_1, n_2, n_3...., которыя соединимъ непрерывной чертой.

Такимъ образ. кривыя $an_1 n_2 n_3 HPS$ и a'n'n''n''' H'P'S' будутъ проекціями конической винтовой линіи. Докажемъ, что разстоянія точекъ этой линіи отъ вершины конуса пропорціональны соотвѣтствующимъ угламъ, т.е. что эта кривая есть коническая винтовая линія. Если какія-нибудь точки (P, P') и (H, H') принадлежатъ винтовой линіи, то должна существовать пропорція:

$$\frac{(SP,\ S'P')}{\angle\ aSP} = \frac{(SH,\ S'H')}{\angle\ aSH} \qquad ....(4)$$

Чтобы доказать справедливость этой пропорціи, замѣтимъ, что, если черезъ точки дѣленія S'a' мы вообразимъ плоскости, параллельныя горизонтальной, то онѣ раздѣлятъ всѣ образующія конуса на части, равныя дѣленіямъ a'S', такъ что, если $\frac{S'a'}{8} = x$, то разстояніе точки (P, P') отъ вершины (S, S') или длина (SP, S'P') будетъ состоять изъ двухъ равныхъ частей: (SP, S'P') = 2x; (SH, S'H') = 3x; $\angle$ aSP = 2aS.1; $\angle$ aSH = 3aS.1. Подставляя въ уравненіе (4) эти значенія, получимъ тождество: $\frac{2x}{2\angle aS.1} = \frac{3x}{3\angle aS.1}$, которое показываетъ, что точки построенной кривой обладаютъ тѣмъ свойствомъ, которое опредѣляетъ коническую винтовую линію, поэтому проекціи построенной кривой будутъ проекціями винтовой линіи на конусѣ. Изъ построенія горизонтальной проекціи конической винтовой линіи выходитъ способъ построенія Архимедовой спирали.

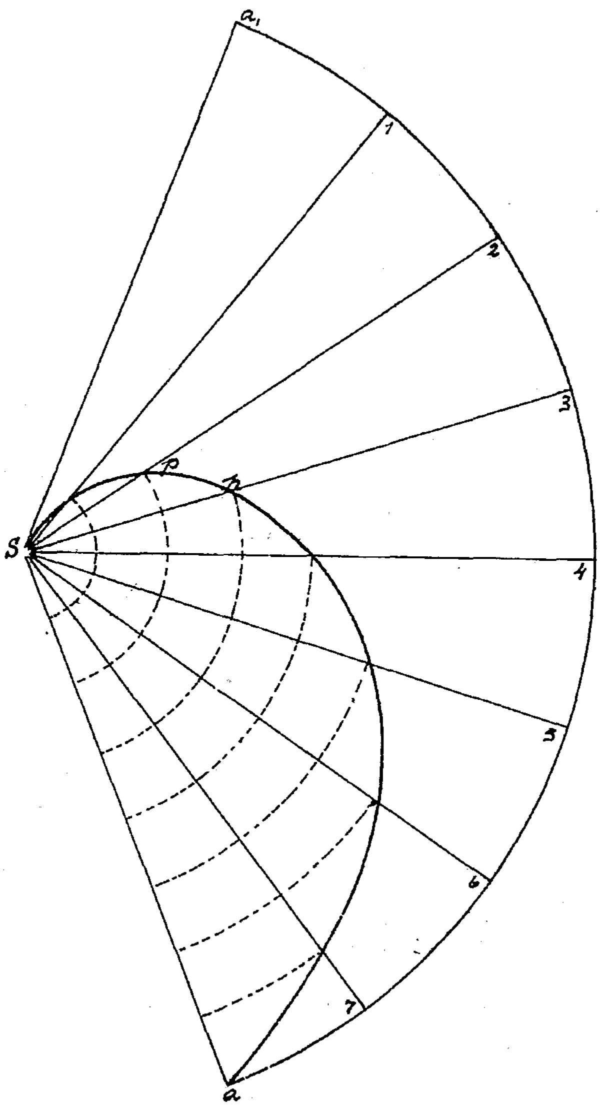
Дѣйствительно, если точки дѣленія линіи a'S' проектировать на горизонтальную плоскость, то радіусъ aS раздѣлится на 8 равныхъ частей. Вышесказанныя плоскости, проведенныя черезъ точки дѣленія образующей a'S', раздѣлятъ образующія конуса на равныя части, и т.к. всѣ образующія равно наклонены къ горизонтальной плоскости, то кругъ сѣченія конической поверхности плоскостью, проходящей черезъ седьмую точку, проектируется въ кругъ радіуса $^7/8$ aS. Такимъ образомъ точка n', лежащая въ этой плоскости, горизонтально-проектируется въ n_1, которая есть пересѣченіе окружности радіуса $^7/8$ aS съ радіусомъ S_7; точка n" горизонтально-проектируется въ n_2, которая есть пересѣченіе окружности радіуса $^3/8$ aS съ радіусомъ S6; точка n''' проектируется въ n_3 и т.д.

Итакъ, для построенія спирали Архимеда мы должны раздѣлить aS - радіусъ окружности, въ которой она находится, и самую окружность на одинаковое число равныхъ частей, точки дѣленія окружности соединить съ центромъ и изъ центра радіусами, равными разстоянію центра отъ дѣленій радіуса aS, описать окружности; тогда пересѣченіе первой окружности съ 1-мъ радіусомъ дастъ одну точку, 2-ой со 2-мъ - другую и т.д. Соединивъ эти точки, получимъ спираль Архимеда. Умѣя строить эту спираль, мы можемъ построить проекціи винтовой линіи другимъ способомъ; для этого допустимъ, что aS есть горизонтальная проекція шага винтовой линіи. Раздѣлимъ aS и окружность основанія на одинаковое число равныхъ частей, строимъ на горизонтальной плоскости проекцій спираль Архимеда, принимаемъ ее за горизонтальную проекцію искомой кривой и по горизонтальной проекціи строимъ вертикальную; такимъ образомъ получимъ проекціи конической винтовой линіи.

З А Д А Ч А. Развернуть прямой конусъ и построить преобразованіе конической винтовой линіи (черт.265 и 266).

Мы уже знаемъ, что развертку конуса представляетъ круговой секторъ, котораго радіусъ равенъ длинѣ образующей конуса. Для построенія преобразованія конической винтовой линіи дѣлимъ дугу a,a (черт 266) на столько же частей (8), на сколько было раздѣлено основаніе конуса; точ-

Черт. 266.

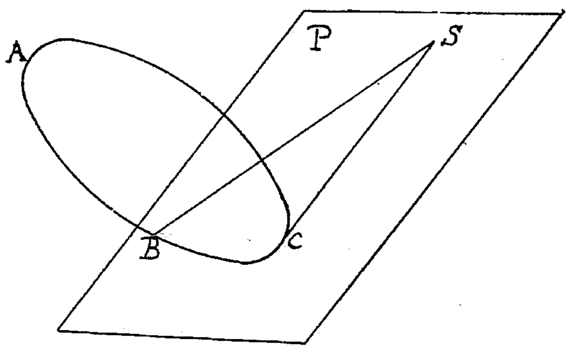


ки дѣленія соединяемъ съ центромъ S, полученные радіусы будутъ преобразованіями соотвѣтственныхъ образующихъ конуса; такъ, радіусъ S3 соотвѣтствуетъ образующей (SH, S'H') (черт. 265) и т. д. На соотвѣтственныхъ радіусахъ откладываемъ разстоянія точекъ винтовой линіи отъ вершины конуса, такъ что разстояніе Sp (чертежъ 266-ой), равное (SP, S'P') (черт. 265): Sh = (SH, S'H') и т.д. Полученныя точки принадлежатъ преобразованной линіи; соединивъ ихъ, получимъ искомое преобразованіе, которое, какъ видно изъ построенія, въ данномъ случаѣ будетъ тоже спиралью Архимеда. Такимъ же способомъ строятся преобразованія другихъ кривыхъ, лежащихъ на поверхности конуса.

ПЕРЕСѢЧЕНІЕ КОНИЧЕСКИХЪ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПЛОСКОСТЬЮ.

Коническая поверхность плоскостью пересѣкается, вообще говоря, по кривымъ, кромѣ случая, когда сѣкущая плоскость проходитъ черезъ вершину конической поверхности; въ послѣднемъ случаѣ въ сѣченіи получаются прямыя. Чтобы это доказать, положимъ, что ABC есть направляющая конической поверхности, а S - ея вершина (черт.267), и пусть плоскость

Черт.267.



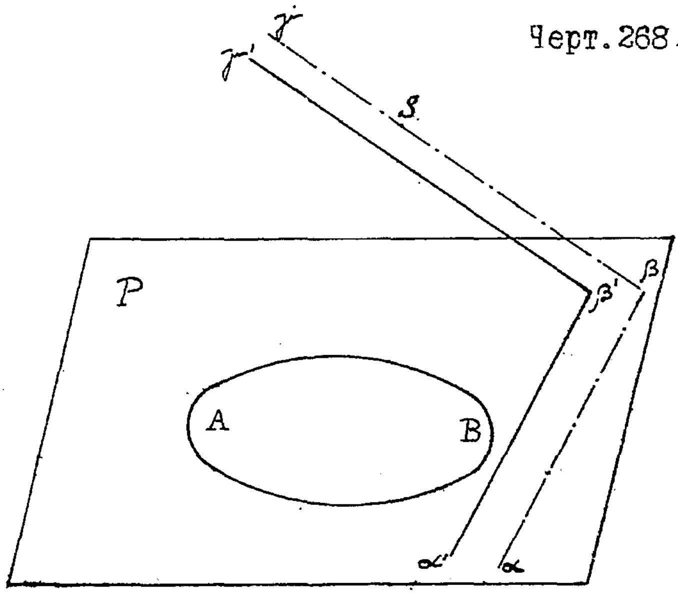
P, проведенная черезъ вершину, пересѣкаетъ направляющую ABC въ точкахъ B и C. Соединивъ S съ B и C, получимъ прямыя SB и SC, лежащія въ плоскости P; но эти же прямыя будутъ и образующими конуса, поэтому прямыя SB и SC суть линіи сѣченія конической поверхности данной плоскостью.

Чтобы построить линію сѣченія конуса плоскостью, нужно построить точки встрѣчи различныхъ образующихъ конуса съ сѣкущей плоскостью. Видъ кривой сѣченія конуса съ плоскостью зависитъ отъ вида направляющей конуса и отъ положенія сѣкущей плоскости. Если направляющая есть кривая второго порядка, то и въ сѣченіи получится кривая второго порядка. Если плоскость пересѣкаетъ всѣ образующія конуса, то въ сѣченіи получится эллипсъ; если сѣкущая плоскость параллельна одной изъ образующихъ конуса, то въ сѣченіи получится парабола; когда плоскость параллельна двумъ образующимъ, то она пересѣкаетъ обѣ полы конуса, и въ сѣченіи получится гипербола.

З А Д А Ч А. Построить проекціи сѣченія конуса плоскостью, предполагая, что въ сѣченіи будетъ эллипсъ.

ВЫБОРЪ СѢКУЩЕЙ ПЛОСКОСТИ. Пусть АВ (черт.268) - направляющая конической поверхности, лежащая въ плоскости Р, а S - ея вершина. Принимаемъ произвольную прямую $\alpha\beta$, не пересѣкающую кривой АБ, за слѣдъ вспомогательной плоскости и проводимъ плоскость черезъ $\alpha\beta$ и вершину конуса S. Тогда всякая плоскость $\alpha'\beta'\gamma'$, параллельная вспомогательной $\alpha\beta\gamma$, будетъ расположена требуемымъ

Черт.268.



образомъ. Дѣйствительно, плоскость $\alpha\beta\gamma$ содержитъ точку S, въ которой пересѣкаются всѣ образующія конуса, слѣдовательно плоскость $\alpha'\beta'\gamma'$, параллельная $\alpha\beta\gamma$, не можетъ быть параллельна ни одной изъ образующихъ конуса. Поэтому кривая сѣченія будетъ сомкнутая, и въ томъ случаѣ, когда кривая основанія - кругъ или эллипсъ, она будетъ эллипсомъ.

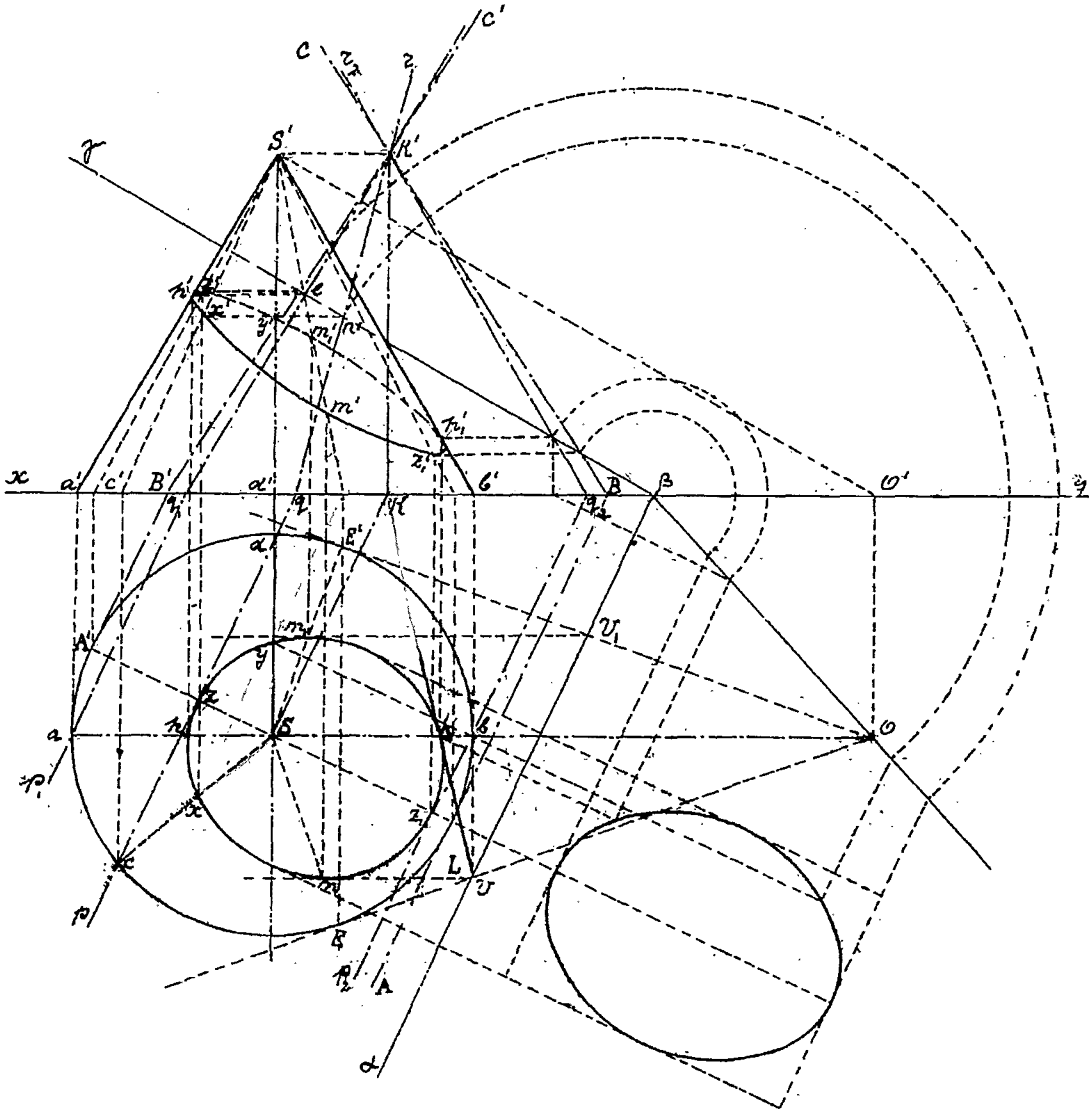
Для простоты возьмемъ прямой конусъ, поставленный на горизонтальную плоскость, и сѣкущую плоскость $\alpha\beta\gamma$, удовлетворяющую сказанному условію (черт. 269). Проекціи эллипса сѣченія будутъ тоже эллипсами. При построеніи этихъ проекцій употребимъ способъ, который можетъ быть примѣненъ и къ сѣченію конуса наклоннаго. Этотъ общій способъ состоитъ въ построеніи точекъ встрѣчи образующихъ поверхности съ данной плоскостью $\alpha\beta\gamma$.

Но построеніе будетъ проще, если мы черезъ вершину (S, S') конуса проведемъ линію (SK, S'K'), параллельную горизонтальному слѣду $\alpha\beta$ сѣкущей плоскости. Тогда всякая плоскость, проходящая черезъ эту прямую, будетъ пересѣкать конусъ по образующимъ, а плоскость $\alpha\beta\gamma$ - по горизонталямъ; точки встрѣчи построенныхъ прямыхъ, т.е. образующихъ съ горизонталями и будутъ точками искомой кривой.

Такимъ образомъ, построены точки (x, x') и (y, y') (чертежъ 269), для чего была проведена плоскость (pqK'). Ея вертикальный слѣдъ проходитъ черезъ K', указывая, что плоскость pqK' проходитъ черезъ прямую (SK, S'K'). Поступая подобнымъ образомъ, можно построить сколько угодно точекъ. Но обыкновенно строятъ точки кривой въ извѣстномъ порядкѣ, который состоитъ въ томъ, что строятъ прежде замѣчательныя точки, а затѣмъ уже промежуточныя.

Къ замѣчательнымъ точкамъ относятся: 1) лежащія на очеркахъ горизонтальной и вертикальной проекцій поверхно-

Черт.269.



сти; 2) высшая и низшая точки относительно горизонтальной плоскости проекцій и ближайшая и дальнѣйшая отъ вертикальной плоскости проекцій, и 3) точки, въ которыхъ касательныя линіи къ кривой сѣченія лежатъ въ профильныхъ плоскостяхъ.

ПОСТРОЕНІЕ ТОЧЕКЪ СѢЧЕНІЯ, ЛЕЖАЩИХЪ НА ОЧЕРКАХЪ ПОВЕРХНОСТИ. Въ нашемъ случаѣ придется построить точки только на вертикальномъ очеркѣ, т.е. на образующихъ (Sb, S'b') и (Sa, S'a'). Для этого черезъ горизонтальные слѣды ихъ, т.е. черезъ точки a и b проводимъ p_1q_1 и p_2q_2 параллельно $\alpha\beta$, и эти прямыя принимаемъ за горизонтальные слѣды плоскостей p_1q_1K' и q_2p_2K', которыя, проходя черезъ горизонталь (SK, S'K'), пересѣкаютъ поверхность по образующимъ (Sa, S'a') и (Sb, S'b'). Пересѣченіе этихъ послѣднихъ съ тѣми горизонталями, по которымъ плоскости p_1q_1K' и p_2q_2K' пересѣкаются съ плоскостью $\alpha\beta\gamma$, т.е. точки (h,h') и (h_1, h_1') и суть искомыя точки. Эти точки замѣчательны тѣмъ, что въ нихъ вертикальная проекція кривой касается очерковъ вертикальной проекціи поверхности и дѣлится ими на двѣ части - видимую и невидимую по отношенію къ вертикальной плоскости.

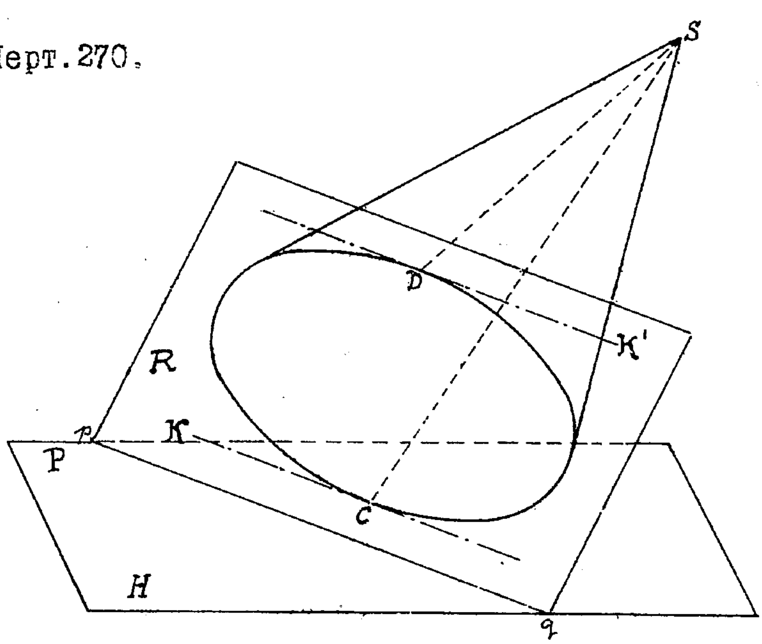
Для доказательства перваго свойства построимъ въ точкѣ (h_1, h_1') касательную къ кривой сѣченія. Эта касательная должна лежать въ плоскости кривой сѣченія, т.е. въ плоскости $\alpha\beta\gamma$ и въ касательной плоскости къ поверхности, проведенной въ точкѣ (h_1, h_1'), а потому касательная линія къ кривой сѣченія въ разсматриваемой точкѣ выразится пересѣченіемъ названныхъ плоскостей.

Касательная плоскость къ поверхности въ точкѣ (h_1,h_1') есть bb'S', а линія сѣченія ея съ $\alpha\beta\gamma$, или касательная къ кривой сѣченія есть (h_1L, $h_1'b'$); такъ какъ вертикальная проекцiя h'₍b' касательной совпадаетъ съ вертикальной проекцiей S'b', то первое свойство доказано. На основанiи этого свойства и заключаемъ, что вертикальная проекцiя кривой сѣченiя касается въ точкѣ $h'_{,}$ вертикальной проекцiи S'b'.

Образующими (Sa, S'a') и (Sb, S'b') коническая поверхность дѣлится на двѣ части - видимую на вертикальной плоскости и невидимую. Та часть поверхности, слѣдъ которой есть кривая acEb - видима, остальная - невидима. Отъ пересѣченiя плоскостью $\alpha\beta\gamma$ видимыхъ образующихъ получаются видимыя точки кривой сѣченiя на вертикальной плоскости, а точки, лежащiя на невидимыхъ образующихъ - невидимы. Видимая часть кривой на вертикальной плоскости отдѣляется отъ невидимой точками (h,h') и ($h_{,}$, $h'_{,}$).

Прежде чѣмъ перейти къ нахожденiю высшихъ и низшихъ точекъ, разсмотримъ, какъ строятся вообще эти точки относительно какой-нибудь плоскости H (черт.270).

Черт.270.



Пусть сѣченiе конической поверхности SCD плоскостью R есть кривая CD. Найдемъ линiю pq. сѣченiя плоскости R съ плоскостью H и къ кривой CD проведемъ касательныя CK и DK' параллельно pq. Тогда точки касанія и будутъ искомыми; точка C, какъ ближайшая къ линіи pq, будетъ низшей, а D - высшею относительно плоскости H. Касательныя линіи CK и DK' строятся какъ линіи сѣченія плоскости R касательными плоскостями, проведенными къ конической поверхности, параллельно линіи pq, а точки встрѣчи этихъ линій съ образующими SC и SD касанія и будутъ искомыми. Изъ этого видно, что искомыя точки могутъ быть построены независимо отъ вычерчиванія кривой.

Такъ какъ цилиндрическую поверхность можно разсматривать какъ коническую съ безконечно удаленною вершиною, то найденный способъ построенія высшей и низшей точекъ можетъ быть примѣненъ къ сѣченію цилиндра плоскостью.

На основаніи выведеннаго правила построимъ для нашего сѣченія (черт. 269) высшую и низшую точки относительно горизонтальной плоскости проекцій. Для этого проведемъ касательныя плоскости ABC и A'B'C' къ конической поверхности параллельно $\alpha\beta$, найдемъ линіи ихъ сѣченія съ $\alpha\beta\gamma$ и отмѣтимъ точки, въ которыхъ эти послѣднія пересѣкаются съ образующими прикосновенія касательныхъ плоскостей, т.е. точки (z, z') и $(z_{,}, z'_{,})$; тогда, согласно выведенному правилу, получимъ искомыя точки кривой сѣченія, при чемъ (z, z') будетъ низшей точкой, а $(z_{,}, z'_{,})$ - высшей.

При построеніи такихъ точекъ кривой сѣченія относительно вертикальной плоскости, нужно къ данному конусу провести касательныя плоскости параллельно $\beta\gamma$, найти линіи ихъ сѣченія съ $\alpha\beta\gamma$ и замѣтить точки встрѣчи этихъ послѣднихъ съ образующими касанія; найденныя такимъ образомъ точки и будутъ искомыми. Но, такъ какъ касательныя плоскости къ конусу, проведенныя параллельно $\beta\gamma$, пересѣкаются по линіи, параллельной $\beta\gamma$ и проходящей черезъ вершину (S,S') конуса, то, проведя черезъ точку (S,S') прямую(SO, S'O') параллельно $\beta\gamma$, мы и получимъ линію сѣченія касательныхъ плоскостей, а горизонтальный слѣдъ ея (O,O') будетъ точкой, принадлежащей горизонтальнымъ слѣдамъ этихъ плоскостей; но горизонтальные слѣды касательныхъ плоскостей касаются горизонтальнаго слѣда поверхности, поэтому, проведя изъ O касательныя линіи къ окружности основанія конуса, получимъ OE и OE' - горизонтальные слѣды касательныхъ плоскостей.

Такъ какъ построенныя касательныя плоскости проходятъ черезъ прямую (oS, o'S'), параллельную $\beta\gamma$, то онѣ пересѣкутъ $\alpha\beta\gamma$ по прямымъ, параллельнымъ $\beta\gamma$. Поэтому изъ точекъ пересѣченія V и $V_{,}$ слѣдовъ этихъ плоскостей съ $\alpha\beta$ проводимъ линіи Vm и $V_{,}m_{,}$, параллельныя xy до пересѣченія съ соотвѣтствующими образующими касанія. Точки (m,m') и ($m_{,}$,$m_{,}'$) будутъ искомыми.

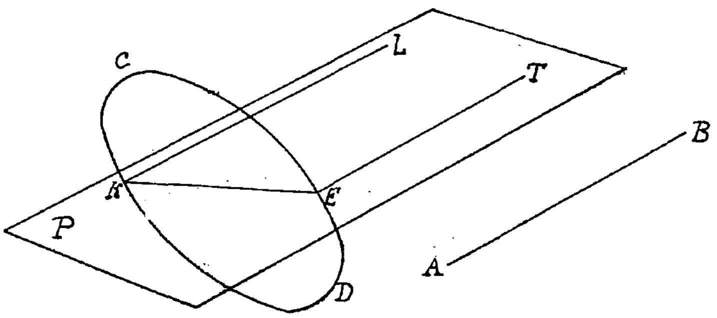
Построивши эти замѣчательныя точки, строятъ промежуточныя тѣмъ способомъ, какимъ построены точки (x,x')и(y,y'). Число промежуточныхъ точекъ зависитъ отъ степени кривизны линіи сѣченія: чѣмъ кривизна кривой больше, тѣмъ и точекъ на этомъ протяженіи строятъ больше. Построенныя точки соединяютъ по лекалу и получаютъ проекціи кривой сѣченія.

Для построенія натуральной величины кривой сѣченія, сѣкущую плоскость совмѣщаютъ съ одной изъ плоскостей проекцій и посредствомъ горизонталей (или фронталей) находятъ совмѣщенное положеніе различныхъ точекъ сѣченія, соединивши которыя найдемъ требуемую кривую.

ПЕРЕСѢЧЕНІЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПЛОСКОСТЬЮ.

Цилиндрическая поверхность пересѣкается вообще плоскостью по кривой, которая строится по точкамъ. Для полученія этихъ точекъ находятъ пересѣченіе различныхъ образующихъ цилиндрической поверхности съ данной плоскостью; построенныя точки соединяютъ и получаютъ кривую сѣченія. Но иногда поверхность цилиндра пересѣкается плоскостью и по прямымъ линіямъ :- по образующимъ.

Черт.271.



Чтобы доказать это, положимъ, что намъ дана цилиндрическая поверхность (черт.271) направляющей CD и направленіемъ образующей AB и что плоскость P паралл. AB. Пусть плоскость

P пересѣкаетъ направляющую CD въ точкѣ E; проведемъ черезъ E прямую ET паралл. AB, тогда ET будетъ служить образующей цилиндра и въ то же время будетъ лежать въ плоскости P. Слѣдовательно это будетъ линія сѣченія цилиндрической поверхности данною плоскостью. Если плоскость P пересѣкаетъ направляющую кривую въ двухъ точкахъ E и K, то въ сѣченіи съ поверхностью получатся двѣ прямыя ET и KL.

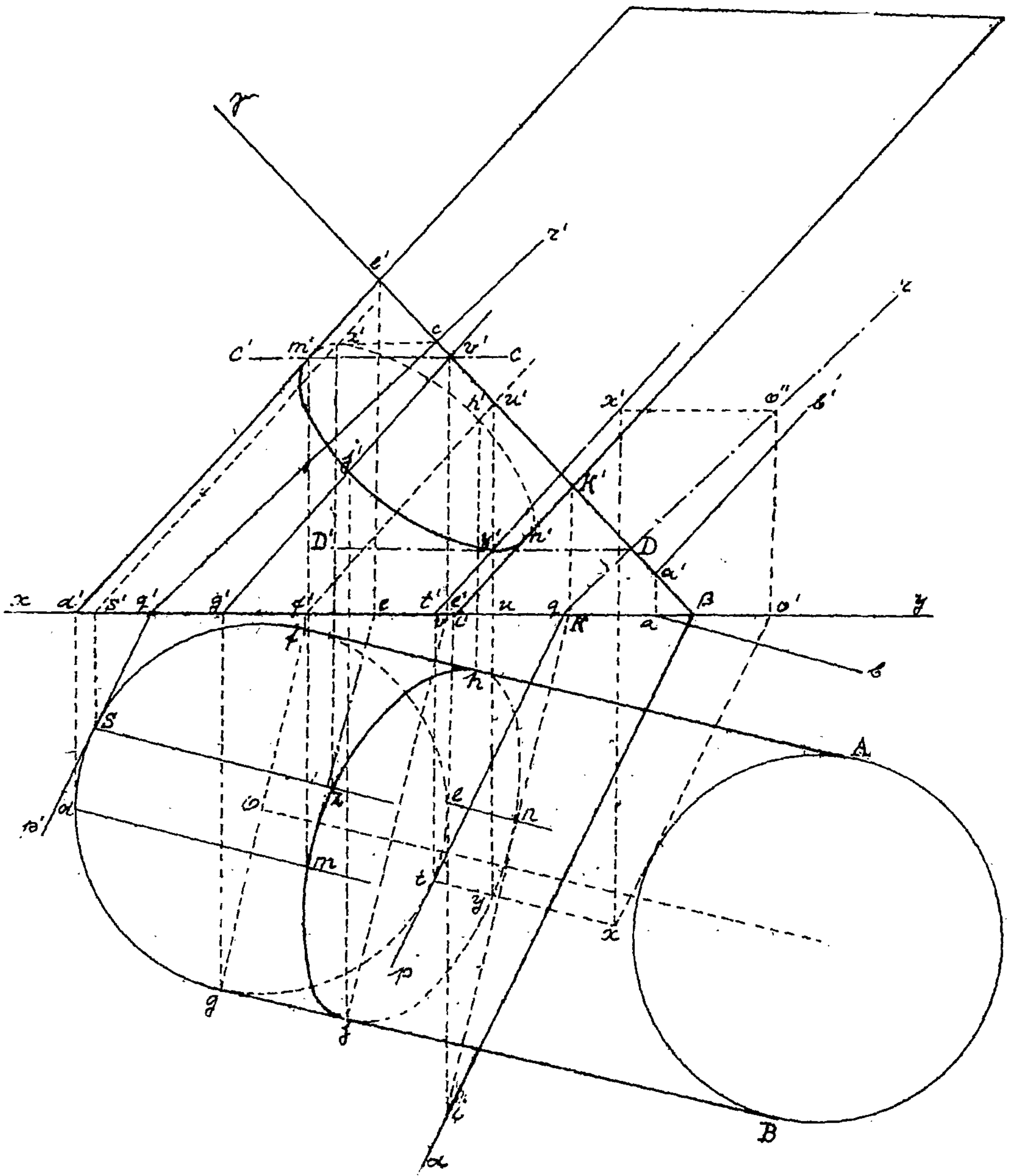
Разсмотримъ сѣченіе произвольнаго цилиндра плоскостью $\alpha\beta\gamma$.

Положимъ, что онъ данъ горизонтальнымъ слѣдомъ (черт. 272), который есть окружность O, и направленіемъ образующей (ab, a'b'). Построимъ прежде очеркъ цилиндрической поверхности, т.е. тѣ прямыя на горизонтальной и вертикальной плоскостяхъ, между которыми заключены проекціи всѣхъ остальныхъ образующихъ. Для этого проведемъ на горизонтальной плоскости прямыя Af и Bg, параллельныя ab и касательныя къ горизонтальному слѣду поверхности. Эти прямыя и будутъ служить очеркомъ горизонтальной проекціи цилиндра, потому что между ними заключаются всѣ остальныя образующія горизонтальной проекціи цилиндра.

Проведя прямыя dd' и ee' касательно къ основанію O цилиндра и перпендикулярно къ xy, а черезъ точки d' и e' - прямыя d'm' и e'K' параллельно a'b', получимъ очерки вертикальной проекціи.

Построивъ очеркъ цилиндра, легко сказать, какая часть его будетъ видима на плоскостяхъ проекцій. Дѣйствительно,

Черт.272.



горизонтальные слѣды касательныхъ плоскостей къ цилиндру, проведенныхъ перпендикулярно къ горизонтальной плоскости и параллельно направленію образующей, совпадутъ съ прямыми fA и gB, которыя будутъ горизонтальными проекціями образующихъ касанія; эти послѣднія раздѣлятъ цилиндръ на двѣ части: видимую на горизонтальной плоскости и невидимую. Изъ расположенія образующихъ поверхности слѣдуетъ, что видимая часть имѣетъ горизонтальнымъ слѣдомъ кривую fdg и невидимая - кривую feg. Точно также вертикальные слѣды касательныхъ плоскостей, проведенныхъ къ цилиндру перпендикулярно вертикальной плоскости, совпадутъ съ прямыми d'e'' и e'K', которыя будутъ вертикальными проекціями образующихъ касанія (dm, d'm') и (en, e'n'); эти послѣднія раздѣлятъ цилиндръ на части: видимую на вертикальной плоскости и невидимую. Видимая будетъ имѣть горизонтальнымъ слѣдомъ кривую dge, а невидимая - dfe.

Для построенія кривой сѣченія будемъ находить точки встрѣчи различныхъ образующихъ съ плоскостью $\alpha\beta\gamma$.

Точки кривой обыкновенно строятся въ такомъ порядкѣ: сперва строятъ точки на очеркахъ поверхности, затѣмъ - высшую и низшую точки относительно плоскостей проекцій и, наконецъ, промежуточныя.

Построимъ точки кривой сѣченія на вертикальномъ очеркѣ. Для этого построимъ точки встрѣчи образующихъ (dm, d'm') и (en, e'n') съ данной плоскостью $\alpha\beta\gamma$. При построеніи точки встрѣчи образующей (en, e'n') съ плоскостью $\alpha\beta\gamma$ поступаемъ по общему правилу, т.е. черезъ образующую проведемъ вертикально-проект. плоскость ii'K' и находимъ линію ея сѣченія (iK, i'K') съ $\alpha\beta\gamma$; пересѣченіе построенной линіи съ образующей (en, e'n') и опредѣлитъ искомую точку (n,n'). Построенная линія (iK, i'K') есть касательная линія съ кривой сѣченія въ точкѣ (n,n'), потому что она лежитъ какъ въ плоскости кривой линіи, такъ и въ касательной плоскости къ цилиндру, поэтому ея проекціи должны касаться проекцій кривой, т.е. iK касается въ точкѣ n горизонтальной проекціи, а i'K' въ точкѣ n' - вертикальной. Такимъ образомъ вертикальная проекція кривой сѣченія касается вертикальной проекціи образующей, служащей очеркомъ поверхности. Такъ какъ вертикально-проектирующія плоскости образующихъ цилиндра параллельны между собою, а параллельныя плоскости третьей - пересѣкаются по линіямъ параллельнымъ, то при построеніи точки встрѣчи образующей (dm, d'm') съ плоскостью $\alpha\beta\gamma$, достаточно изъ точки (e,e') пересѣченія $\beta\gamma$ съ d'm' провести линію (em, e'm') параллельно (iK, i'K'); тогда точка (m,m') встрѣчи образующей (dm, d'm') съ прямой (me, ~~d'm'~~ m'e') будетъ искомой, при чемъ ~~d'~~m'e' коснется вертикальной проекціи сѣченія въ точкѣ m', а em - горизонтальной въ точкѣ m.

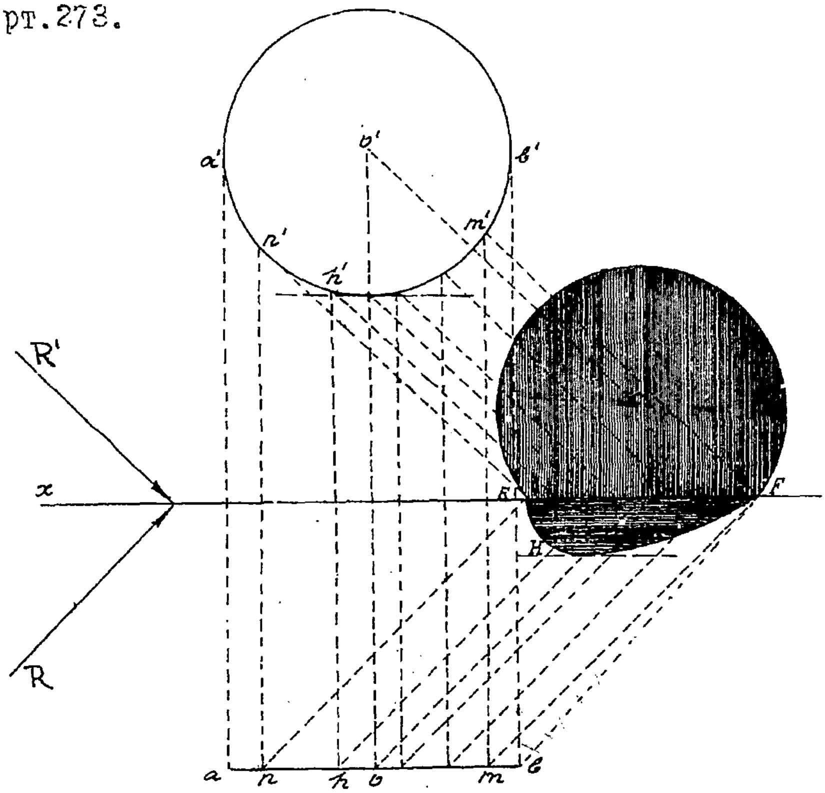
Построимъ высшую и низшую точки кривой сѣченія относительно горизонтальной плоскости. Для этого, какъ извѣстно, нужно провести касательныя плоскости къ цилиндру параллельно $\alpha\beta$. Такъ какъ слѣды касательныхъ плоскостей касаются слѣдовъ поверхности, то, проведя pq и p'q' касательно къ окружности O и параллельно $\alpha\beta$, получимъ горизонтальные слѣды касательныхъ плоскостей, параллельныхъ $\alpha\beta$. Для полученія вертикальнаго слѣда первой плоскости находимъ образующую касанія $(tx, t'x')$ и строимъ ея вертикальный слѣдъ, соединивши который съ q, найдемъ вертикальн. слѣдъ искомой плоскости. Въ нашемъ случаѣ вертикальный слѣдъ прямой $(tx, t'x')$ не помѣщается въ предѣлахъ чертежа, поэтому беремъ на этой линіи какую-нибудь точку (x, x') и проведемъ черезъ нее прямую $(o'x, o''x')$, параллельную pq; найдя вертик. слѣдъ o'' этой прямой и соединивъ его съ q, получимъ вертик. слѣдъ плоскости pqr. Проведя черезъ q — $q'r'$ параллел. qr, получимъ слѣдъ другой касательной плоскости $p'q'r'$. Строимъ сѣченіе этихъ плоскостей съ данной $\alpha\beta\gamma$, отъ чего получаемъ прямыя, параллельныя $\alpha\beta$; вертикальныя проекціи ихъ будутъ CC' и DD'. Найдя пересѣченіе этихъ линій съ вертикальными проекціями $z'S'$ и $t'x'$, образующихъ касанія $(Sz, S'z')$ и $(tx, t'x')$, мы получимъ двѣ точки кривой сѣченія: (z, z') - высшую относительно горизонтальной плоскости и (y, y') - низшую, такъ что вертикальная проекція кривой сѣченія будетъ заключена между прямыми DD' и CC' и очерками вертикальной проекціи цилиндра.

Построивъ эти точки кривой сѣченія, строимъ промежуточныя и, найдя такимъ образомъ достаточное число точекъ, соединяемъ ихъ и получаемъ проекціи эллипса сѣченія $(jmzhny$, $j'm'z'h'n'y')$, при чемъ части $n'z'h'n'$ - вертикальной и $hnyj$ - горизонтальной проекцій не будутъ видимы, потому что онѣ произошли отъ пересѣченія невидимыхъ образующихъ съ $\alpha\beta\gamma$.

ПОСТРОЕНІЕ ПАДАЮЩЕЙ ТѢНИ ОТЪ КРУГА, ПЛОСКОСТЬ КОТОРАГО ПАРАЛЛЕЛЬНА ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ.

Вообразимъ, что черезъ различныя точки окружности даннаго круга проходятъ лучи, параллельные данному направленію (черт.273) Эти лучи составятъ цилиндрическую поверхность, сѣченіе которой плоскостями проекціи опредѣлитъ на нихъ падающую тѣнь.

Черт.273.



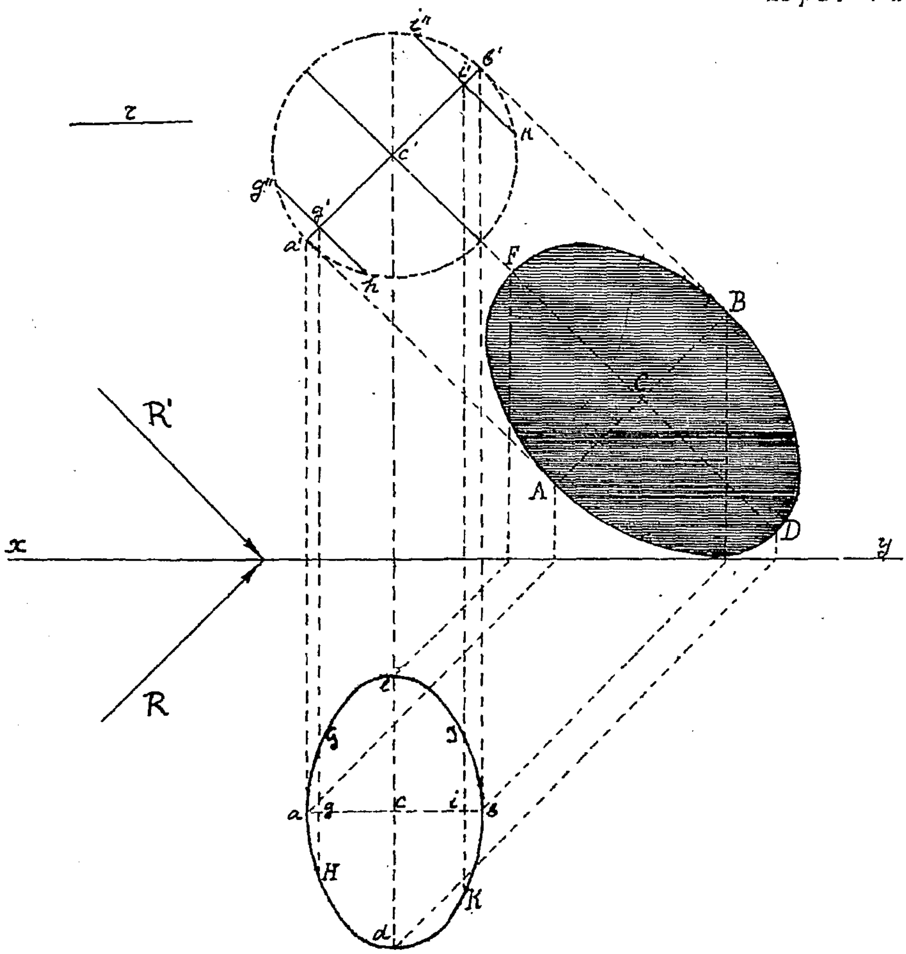
Такъ какъ направляющею этого цилиндра служитъ окружность, то сѣченіе его съ плоскостью, параллельной плоскости нашего круга, дастъ кругъ того же радіуса. На этомъ основаніи тѣнь на вертикальной плоскости будетъ ограничена окружностью, равною данной; центръ ея получится, когда построимъ тѣнь отъ точки (o, o'), т.е. точку c'. Если изъ точекъ E и F пересѣченія этой окружности съ осью проекцій проведемъ свѣтовые лучи до встрѣчи съ окружностью, то получимъ точки (n,n') и (m,m'), отъ которыхъ тѣнь будетъ E и F. Точками (n,n') и (m,m') окружность дѣлится на двѣ части: верхнюю и нижнюю: отъ первой тѣнь падаетъ на вертикальную плоскость, а отъ второй - на горизонтальную. Тѣнь отъ второй строится по точкамъ: такъ тѣнь отъ точки (h,h') есть H и т.д.

ПОСТРОЕНІЕ ПАДАЮЩЕЙ ТѢНИ ОТЪ КРУГА, ПЛОСКОСТЬ КОТОРАГО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНА КЪ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПРОЕКЦІИ ЛУЧА.

Для построенія проекцій круга вообразимъ діаметръ, перпендикулярный къ вертикальной плоскости; вертикальная проекція его выразится точкой c', а горизонтальная будетъ перпендикулярна къ оси. Такъ какъ діаметръ параллеленъ горизонтальной плоскости, то горизонтальная проекція его de (черт. 274) будетъ имѣть длину, равную истинной величинѣ діаметра. Діаметръ же, параллельный вертикальной плоскости, будетъ имѣть проекціями (ab, a'b'), при чемъ a'b' перпенд. R. Отрѣзки ab и de, полученные такимъ образомъ на горизонтальной плоскости, суть оси эллипса, выражающаго горизонтальную проекцію круга. По осямъ легко построить эллипсъ.

Горизонтальную проекцію круга можно построить еще

Черт.274.



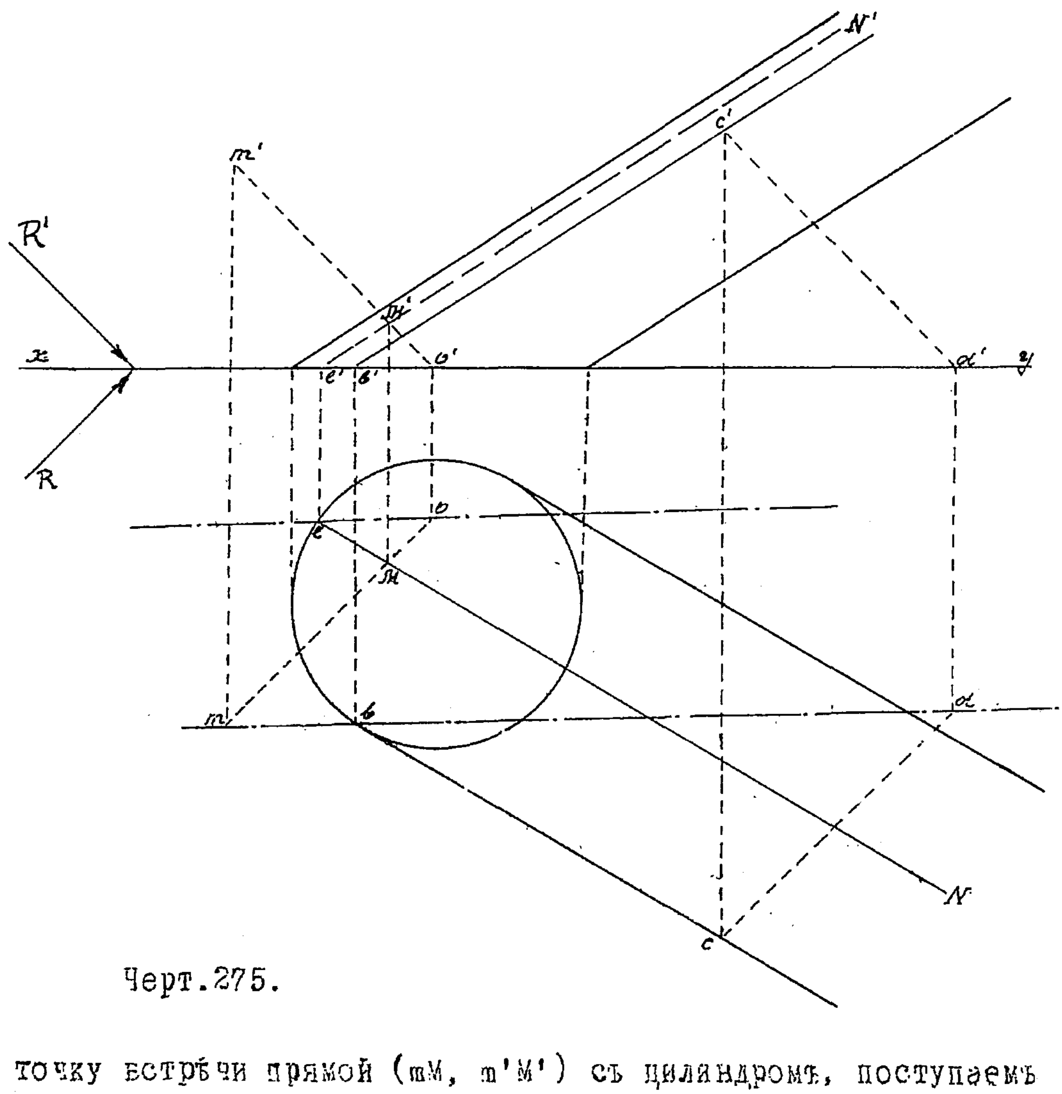
такъ: вообразимъ, что данный кругъ вращается около діаметра (ab, a'b'), параллельнаго вертикальной плоскости и приходитъ въ положеніе, параллельное этой плоскости. При такомъ расположеніи его относительно плоскостей проекцій онъ будетъ проектироваться на вертикальную плоскость въ натуральную величину. Приведемъ плоскости круга въ прежнее положеніе. При этомъ хорды g"h и i"k, перпендикулярныя къ діаметру a'b', спроектируются на горизонтальную плоскость въ натуральную величину и примутъ положенія, перпендикулярныя къ оси проекцій; вертикальными ихъ проекціями будутъ точки g' и i'. Поэтому, проведя черезъ g и i перпендикуляры къ оси и отложимъ на нихъ отрѣзки Gg, Hg, Ji и Ki, равные g'g", получимъ точки G, H, J и K, принадлежащія горизонтальной проекціи. Подобныхъ точекъ можно построить сколько угодно; соединивъ ихъ, получимъ горизонтальную проекцію.

Приступимъ къ построенію падающей тѣни. Для этого черезъ различныя точки окружности вообразимъ свѣтовые лучи, параллельные направленію (R, R'). Совокупность ихъ составитъ цилиндръ, а сѣченіе его плоскостями проекцій опредѣлитъ на нихъ падающую тѣнь, которая въ данномъ случаѣ будетъ ограничена на плоскостяхъ проекцій эллипсами. Для построенія этихъ эллипсовъ достаточно построить ихъ оси, для чего нужно построить тѣни: 1) отъ діаметра (ab, a'b'); его тѣнью будетъ линія AB, равная и параллельная a'b'; 2) отъ діаметра (de, c'); его тѣнью будетъ прямая FD. Точка C - пересѣченія AB и FD - будетъ точкой встрѣчи оси цилиндра, составленнаго изъ свѣтовыхъ лучей съ вертикальной плоскостью, поэтому точка C будетъ центромъ эллипса; линіи AB и FD будутъ его осями. По этимъ даннымъ мы можемъ построить эллипсъ, а, слѣдовательно, найти падающую тѣнь отъ даннаго круга на плоскостяхъ проекцій. Въ нашемъ случаѣ тѣнь помѣстилась на вертикальной плоскости, но она могла расположиться на обѣихъ плоскостяхъ проекцій.

ПОСТРОЕНІЯ ПАДАЮЩЕЙ ТѢНИ ОТЪ ТОЧКИ НА ПОВЕРХНОСТИ ЦИЛИНДРА.

I: Когда образующія цилиндра наклонены къ плоскостямъ проекцій.

Эта тѣнь получится, когда черезъ данную точку (m,m') (черт.275) проведемъ линію (mM, m'M'), параллельную направленію луча (R,R'), и найдемъ точку ея встрѣчи съ поверхностью цилиндра (ближайшую къ (m,m')). Чтобы опредѣлить



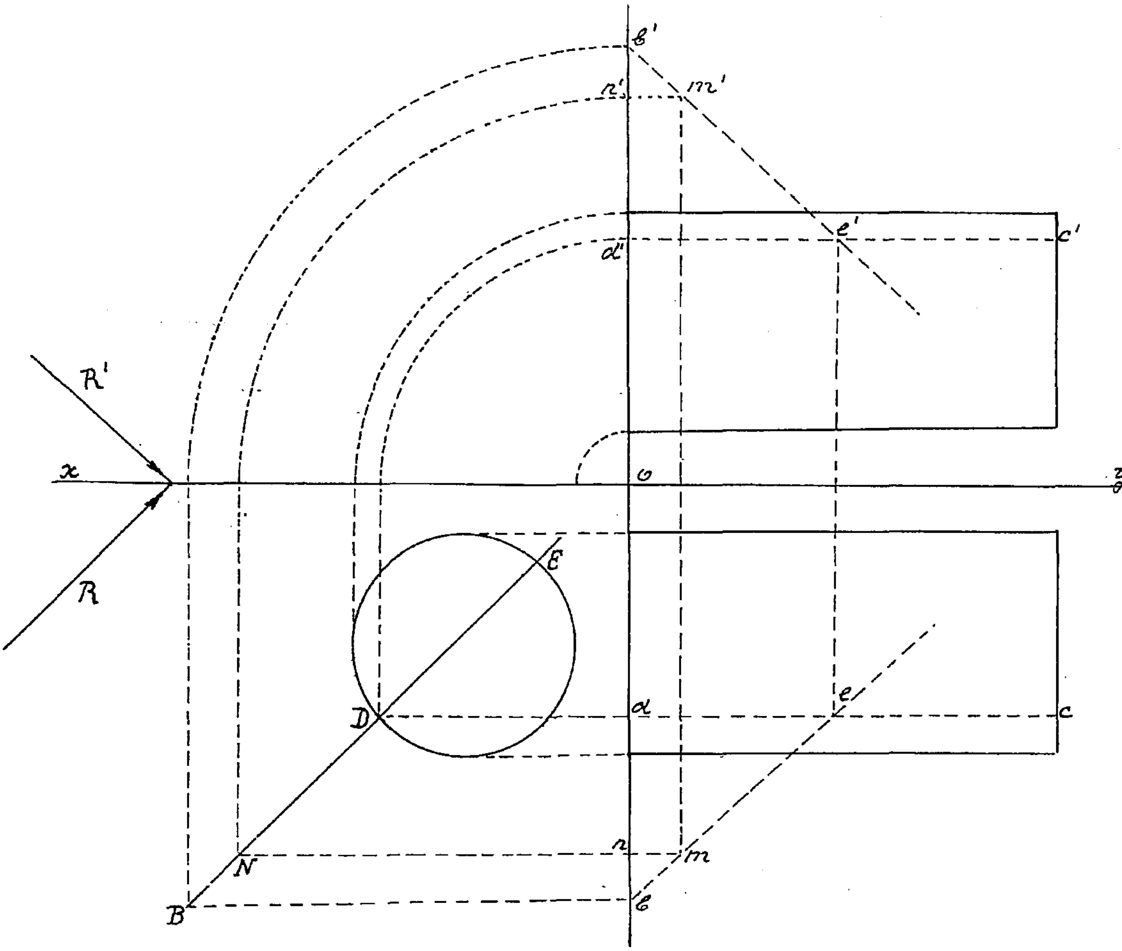
Черт.275.

точку встрѣчи прямой (mM, m'M') съ цилиндромъ, поступаемъ такъ: беремъ на какой-нибудь его образующей, напримѣръ на предѣльной (bc, b'c'), произвольную точку (c,c') и черезъ нее проводимъ прямую (cd, c'd'), параллельную направленію луча (R,R'). Черезъ линію (cd, c'd') и образующую (bc,b'c') проводимъ плоскость, горизонтальнымъ слѣдомъ которой будетъ прямая bd. Какъ эта плоскость, такъ и всякая другая, ей параллельная, будетъ заключать направленіе луча. Черезъ данную точку (m,m') проводимъ плоскость, параллельную построенной. Ея слѣдъ пройдетъ черезъ слѣдъ о луча (mo,m'o') и будетъ параллеленъ bd. Эта плоскость пересѣчетъ цилиндръ по образующей (eN, e'N'), проходящей черезъ точку (e,e'). Пересѣченіе этой образующей съ направленіемъ луча(mo,m'o') дасть точку (M,M') - искомую тѣнь отъ данной точки (m,m').

II. Когда его образующія параллельны оси проекцій.

Для построенія искомой тѣни (черт.276) проводимъ черезъ данную точку (m,m') прямую (me, m'e'), параллельную направленію луча (R,R') и ищемъ точку встрѣчи ея съ поверхностью цилиндра. Для этого продолжимъ лучъ (me,m'e') до пересѣченія съ плоскостью основанія цилиндра въ точкѣ (b,b'), затѣмъ проводимъ черезъ точку (m,m') линію, параллельную образующимъ цилиндра и находимъ точку (n,n')встрѣчи ея съ плоскостью основанія цилиндра; тогда (bn,b'n')будетъ слѣдомъ плоскости (bmn, b'm'n') на плоскости основанія цилиндра. Совмѣстивъ основаніе цилиндра вмѣстѣ съ точками (b,b') и (n,n') съ горизонтальной плоскостью, найдемъ совмѣщеніе лині (bn, b'n'), которое есть BN; продолживъ эту послѣднюю до пересѣченія съ совмѣщеніемъ основанія цилиндра, получимъ точки D и E, въ которыхъ плоскость

Черт. 276.

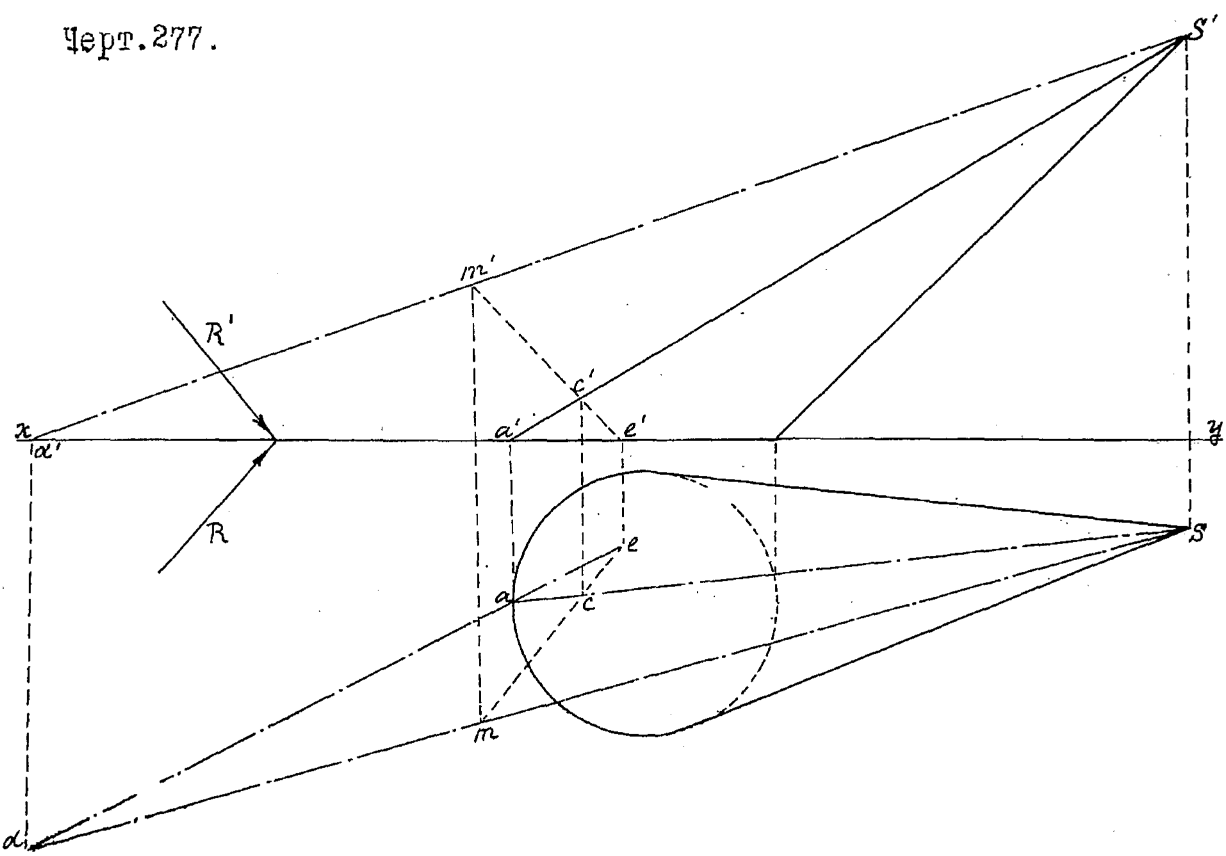


(bmn, b'm'n') пересѣкаетъ основаніе цилиндра. Возвративъ плоскость въ первоначальное положеніе, находимъ проекціи (d,d') - точки D, ближайшей изъ точекъ D и E къ N. Черезъ точку (d,d') проводимъ образующую (cd, c'd') цилиндра. Такъ какъ образующая эта и лучъ (me, m'e') находятся въ одной плоскости, то точка ихъ пересѣченія (e,e') выразитъ искомую тѣнь.

ПОСТРОЕНІЕ НА ПОВЕРХНОСТИ КОНУСА ПАДАЮЩЕЙ ТѢНИ ОТЪ ТОЧКИ.

Для построенія этой тѣни (черт.277) мы черезъ данную

Черт.277.

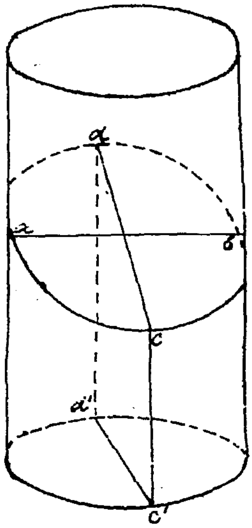


точку (m,m') проведемъ прямую (me, m'e'), параллельную направленію луча (R,R'), и найдемъ точку встрѣчи ея съ поверхностью конуса, для чего соединяемъ точку (m,m')съ вершиною конуса (S,S') и проводимъ черезъ прямыя (mS,m'S') и (me, m'e') плоскость, горизонтальнымъ слѣдомъ которой будетъ αe. Эта плоскость пересѣчетъ конусъ по двумъ образующимъ, ближайшая изъ которыхъ къ точкѣ (m,m') есть (aS,a'S'). Пересѣченіе этой образующей съ лучемъ (me, m'e'), т.е точка (c,c') есть искомая тѣнь.

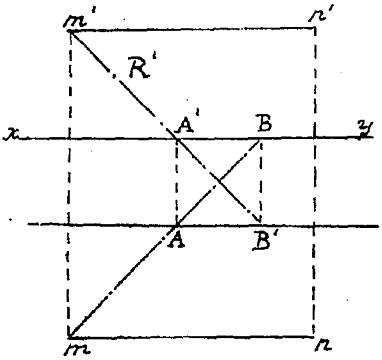
ПОСТРОЕНІЕ НА ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ ТѢНИ ОТЪ ОТРѢЗКА ПРЯМОЙ.

Построеніе такой тѣни производится по точкамъ, но если

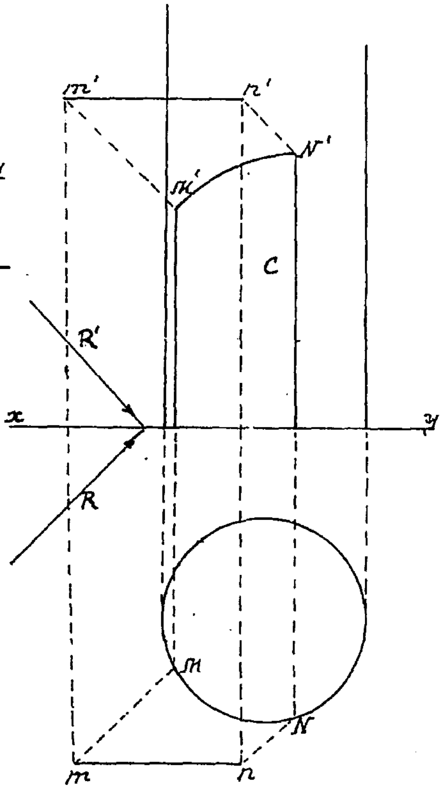
Черт.278.



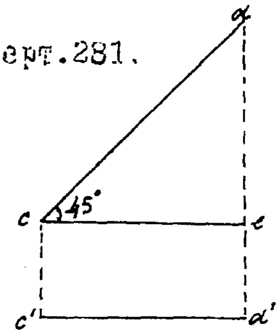
Черт.279.



Черт.280.



Черт.281.



отрѣзокъ параллеленъ оси проекцій, а образующія прямого цилиндра перпендикулярны къ горизонтальной плоскости проекцій, то вертикальная проекція падающей тѣни на этотъ цилиндръ отъ сказаннаго отрѣзка выразится дугою круга радіуса, равнаго основанію цилиндра. Для доказательства вообразимъ черезъ различныя точки отрѣзка линіи, параллельныя направленію луча. Эти прямыя опредѣлятъ плоскость, сѣченіе которой съ данной цилиндрической поверхностью есть эллипсъ abcd (черт.278). Эллипсъ этотъ ограничитъ на цилиндрѣ падающую тѣнь. Докажемъ, что проекція такого эллипса на вертикальную плоскость выразится кругомъ, равнымъ основанію цилиндра. Замѣтимъ, что плоскость, заключающая въ себѣ лучи, проходящіе черезъ различныя точки нашего отрѣзка, одинаково наклонены къ обѣимъ плоскостямъ проекцій. Дѣйствительно (черт.279), пусть (mn, m'n') - данный отрѣзокъ, параллельный оси, а прямая (mA, m'A') параллельна направленію луча. Построимъ слѣды плоскости, опредѣляемой этими прямыми; для этого находимъ слѣды (A, A') и (B, B') прямой (mA, m'A'). Такъ какъ проекція прямой (mA, m'A') наклонена къ оси подъ угломъ въ 45°, то треугольникъ AA'B' = треугольнику A'B'B, а потому AA' = BB'. Это показываетъ, что горизонтальный слѣдъ плоскости, опредѣляемой разсматриваемыми линіями, совпадаетъ съ вертикальнымъ; но если слѣды такой плоскости равно отстоятъ отъ оси проекцій, то она одинаково наклонена къ плоскостямъ проекцій.

Малой осью эллипса, получающагося черезъ пересѣченіе даннаго цилиндра плоскостью, параллельною направленію луча, служитъ діаметръ основанія цилиндра, а большой - линія cd (черт.278), перпендикулярная къ ab, т.е. линія, проходящая черезъ ось цилиндра и находящаяся въ профильной плоскости, такъ какъ образующія цилиндра перпендикулярны къ горизонтальной плоскости проекцій (черт.280).

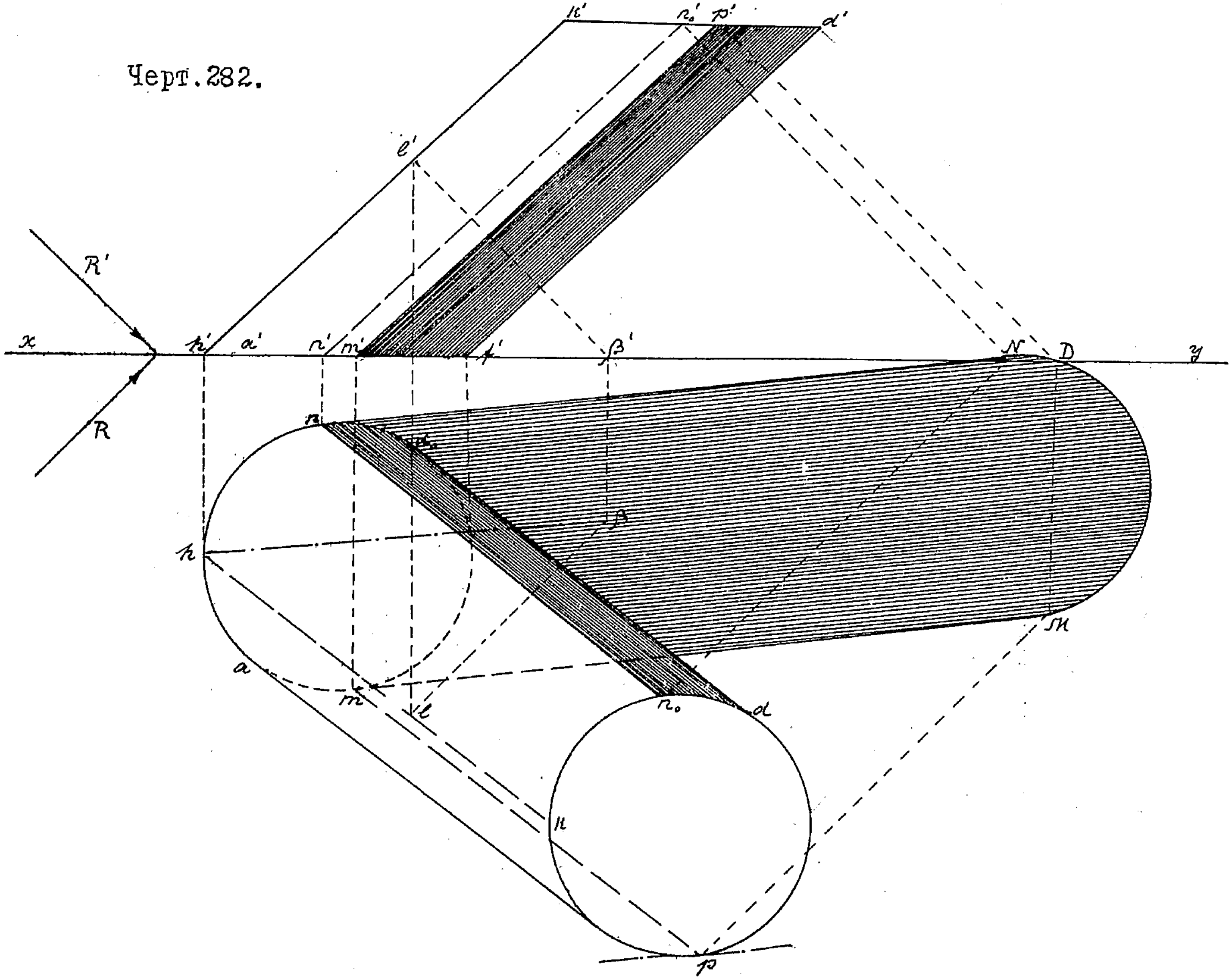
Докажемъ, что горизонтальная проекція cd равна ab. Для этого изъ точекъ c и d опустимъ на горизонтальную плоскость перпендикуляры (черт.281). Основанія ихъ c' и d' лежатъ на окружности основанія цилиндра, потому что c и d лежатъ на его поверхности. Но такъ какъ cd проходитъ черезъ ось цилиндра, то проекція c'd' пройдетъ черезъ центръ основанія и будетъ его діаметромъ; это показываетъ, что горизонтальная проекція cd равна малой оси ab. Вертикальная проекція cd есть de, равная ce и равная c'd', такъ какъ треугольникъ cde равнобедренный (уголъ ced = 90°; уголъ ecd = 45°). Вертикальная проекція прямой ab, какъ прямой, параллельной оси проекцій, равна ей самой.

Итакъ, проекціи осей эллипса ab и de на обѣ плоскости проекцій равны между собою и = діаметру основанія цилиндра. Слѣдовательно, эллипсъ на плоскостяхъ проекцій выразится кругомъ, и для построенія тѣни на вертикальномъ цилиндрѣ отъ прямой, параллельной оси, нужно построить на немъ тѣни двухъ крайнихъ точекъ отрѣзка. Построивши ихъ (на черт. 280 M' и N'), мы изъ этихъ точекъ радіусомъ, равнымъ радіусу основанія цилиндра, описываемъ дуги, которыя пересѣкутся въ точкѣ O, изъ которой тѣмъ же радіусомъ опишемъ другую дугу. Эта послѣдняя пройдетъ черезъ точки M' и N' и своимъ отрѣзкомъ M'N' выразитъ тѣнь даннаго отрѣзка на цилиндрѣ.

ПОСТРОЕНІЕ СОБСТВЕННОЙ И ПАДАЮЩЕЙ ТѢНИ НАКЛОННАГО ЦИЛИНДРА, СТОЯЩАГО НА ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ ПРОЕКЦІЙ.

Построимъ прежде линію отдѣла (черт. 282) освѣщенной части отъ неосвѣщенной на этомъ цилиндрѣ. Для этого проведемъ къ нему касательныя плоскости, параллельныя направленію падающаго луча, а чтобы это сдѣлать на образующей (hk,

Черт.282.



h'k'), беремъ точку (1,1') и проводимъ черезъ нее прямую (1β, 1'β') параллельно (R,R'); черезъ эту прямую и образующую (hk, h'k') проводимъ плоскость и находимъ ея горизонтальный слѣдъ hβ; тогда касательныя плоскости, проведенныя къ цилиндру параллельно построенной, образующими касанія раздѣлятъ цилиндръ на двѣ части: свѣтлую и темную. Горизонтальные слѣды этихъ плоскостей будутъ параллельны прямой hβ, поэтому, проведя касательныя nN и mM къ основанію цилиндра параллельно hβ, найдемъ горизонтальные слѣды касательныхъ плоскостей, а проведя изъ точекъ касанія (n,n') и (m,m') образующія (nn_o, $n'n_o'$) и (mp, m'p'), мы этими послѣдними раздѣлимъ поверхность цилиндра на освѣщенную часть, которою будетъ (nn_okpmhn, $n'n_o'$k'p'm'h'n'), и темную - остальную часть. Такъ какъ верхнее основаніе цилиндра освѣщено, то линія отдѣла будетъ: (nn_odpmhn, $n'n_o'$d'p'm'h'n').

Видимая неосвѣщенная часть цилиндра на горизонтальной плоскости будетъ (nn_od_od), а на вертикальной -(m'p'd'f').

Построивъ тѣнь отъ линіи отдѣла на плоскостяхъ проекцій, получимъ падающую тѣнь цилиндра. При этомъ замѣтимъ, что если тѣнь отъ дуги верхняго основанія будетъ на горизонтальной плоскости, то она ограничится дугою круга того же радіуса, какъ и верхнее основаніе цилиндра, такъ какъ послѣднее находится въ плоскости, параллельной горизонтальной плоскости проекцій; если же тѣнь упадетъ на вертикальную плоскость, то она ограничится дугою эллипса. Замѣтимъ также, что прямолинейныя части тѣней должны касаться криволинейныхъ.

Тѣнь отъ точки (p, p') должна находиться на слѣдѣ mM плоскости, касательной къ цилиндру по образующей (mp, m'p') и параллельной направленію луча. Тѣнь отъ точки n, должна, подобно этому, лежать на линіи nN.

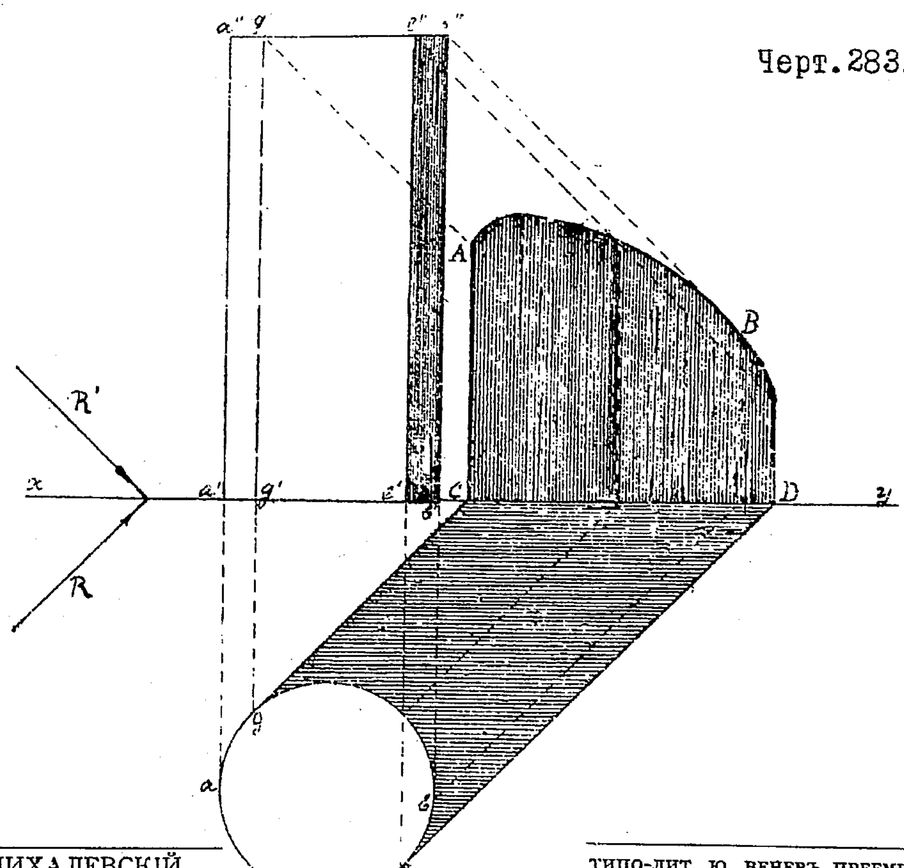
Эти замѣчанія полезны для точности чертежа.

ПОСТРОЕНІЕ СОБСТВЕННОЙ И ПАДАЮЩЕЙ ТѢНИ ОТЪ ПРЯМОГО ЦИЛИНДРА.

I. СТОЯЩАГО НА ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ ПРОЕКЦІЙ.

Въ этомъ случаѣ (черт.283) падающая тѣнь на горизонтальной плоскости выразится слѣдами gC и De плоскостей, касатель-

Черт.283.

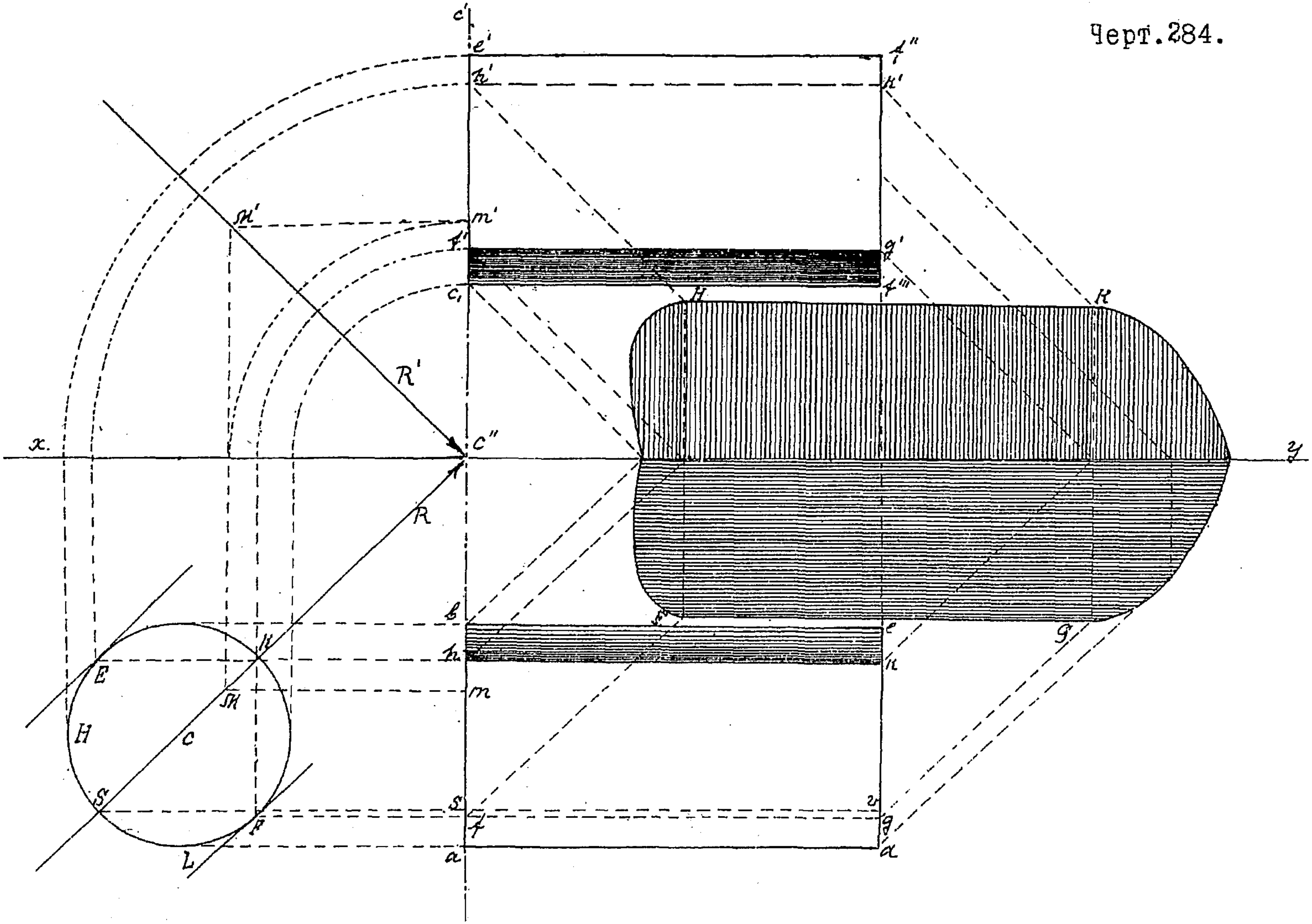


ныхъ къ поверхности цилиндра и параллельныхъ направленію луча (поэтому gC параллел. De параллел. R). Если тѣнь отъ верхняго основанія будетъ находиться на горизонтальной плоскости проекцій, то она будетъ ограничена дугою круга радіуса, равнаго радіусу основанія цилиндра. Если же тѣнь отъ основанія цилиндра будетъ падать на вертикальную плоскость, то она ограничится дугою эллипса. Построивъ линію раздѣла свѣта и тѣни, найдемъ, что освѣщенная часть будетъ: (eag, e'a'g', e"a"g") и верхнее основаніе. Остальная часть будетъ въ тѣни.

II. СТОЯЩАГО НА ПРОФИЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ.

Чтобы построить падающую тѣнь, опредѣлимъ собственную тѣнь цилиндра (черт.284). Для этого замѣтимъ, что плоскость, проведенная касательно къ этой поверхности и параллельно направленію луча (R,R'), будетъ перпендикулярна къ плоскости основанія цилиндра, и поэтому линія сѣченія ея съ плоскостью основанія (ac"c') будетъ параллельна проекціи луча на эту плоскость. Для полученія этой проекціи, на линіи (R,R') беремъ точку (M,M'), проектируя ее на плоскость ac"c', получимъ точку (m,m'), которую соединяемъ съ точкой c" - встрѣчи прямой (R,R') съ плоскостью ac"c'. Совмѣщаемъ плоскость ac"c' съ горизонтальной плоскостью и находимъ совмѣщенное положеніе луча на горизонтальной плоскости, которымъ будетъ служить прямая R, что очевидно. Слѣды плоскостей, касательныхъ къ поверхности цилиндра и

Черт.284.



проведенныхъ параллельно лучу (R,R'), будутъ выражаться, въ совмѣщенія съ горизонтальной плоскостью, прямыми, параллельными R. Поэтому совмѣщенное положеніе этихъ слѣдовъ получится, если къ окружности ELF проведемъ касательныя, параллельныя R. Пусть точки ихъ касанія E и F. Строимъ образующія (fg, f'g') и (hk, h'k'), по которымъ проведенныя плоскости касаются нашего цилиндра. Онѣ отдѣлятъ освѣщенную часть цилиндра отъ неосвѣщенной; часть, соотвѣтствующая дугѣ, совмѣщенное положеніе которой есть ELF, будетъ освѣщена, а противоположная ей будетъ въ тѣни. Основаніе (aъ, c, e') будетъ освѣщено, а противоположное (de, f‴f") - находиться въ тѣни, такъ что линія отдѣла будетъ итти: по дугѣ основанія hbf (совмѣщенное положеніе которой есть дуга EKF), по образующей fg, дугѣ второго основанія gdk (которая, будучи спроектирована на плоскость перваго основанія и совмѣщена съ горизонтальной плоскостью, выразится дугой FHE) и образующей hk.

Будемъ строить тѣнь отъ этой линіи отдѣла на плоскостяхъ проекцій. Тѣнь отъ точки (h,h') будетъ точка H; тѣнь отъ образующей (hk, h'k') будетъ прямая HK, равная и параллельная h'k'. Тѣнь отъ дуги перваго основанія hbf (совмѣщенное положеніе которой - EKF) будетъ ограничена дугами эллипсовъ, которые строятся по точкамъ. Тѣнь отъ точки (f,f') есть точка F, тѣнью отъ образующей (fg, f'g') будетъ прямая FG, равная и параллельная fg. Тѣнь отъ той части второго основанія, которая принадлежитъ линіи отдѣда, строится также по точкамъ, крайнія изъ которыхъ суть G и K.

Для опредѣленія наиболѣе освѣщенной части цилиндра проводимъ на совмѣщенномъ положеніи черезъ центръ C прямую CS, параллельную R, и строимъ образующую (Sv, S'v'), по которой касательная плоскость, прикасаясь къ цилиндру, образуетъ наибольшій уголъ съ падающимъ лучомъ.

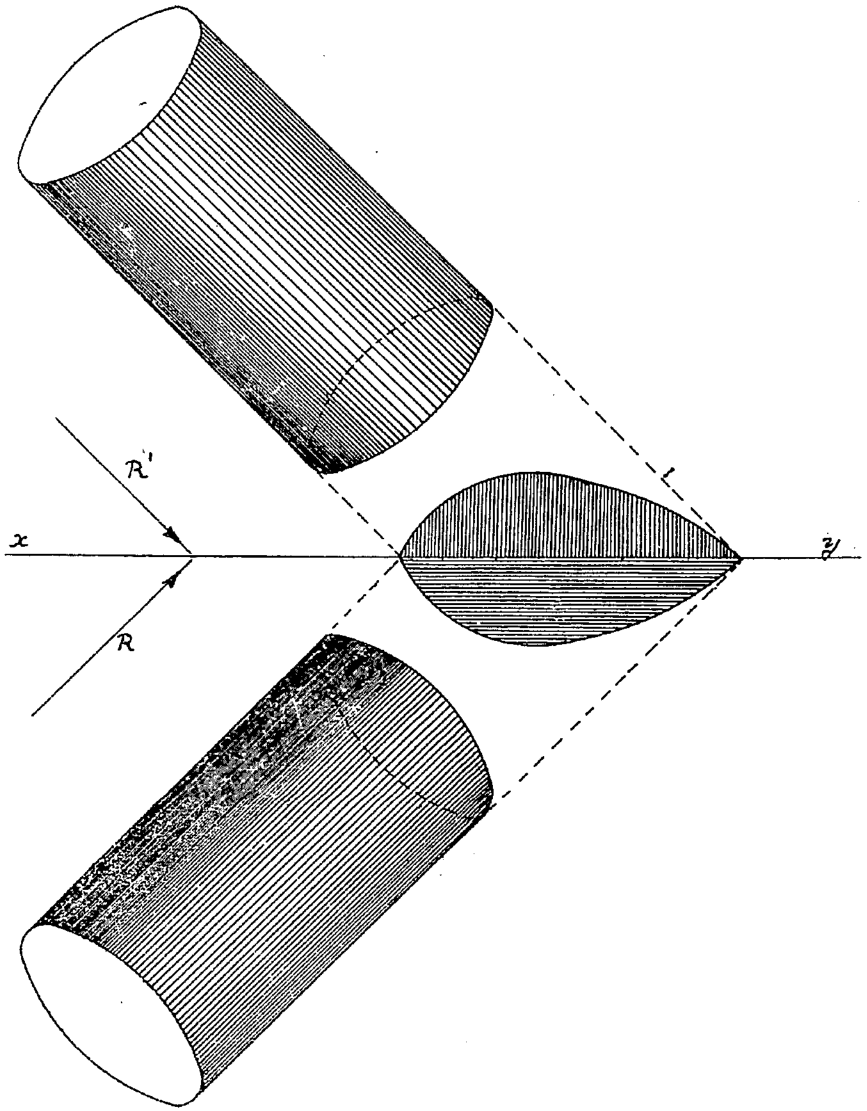
III. ОТЪ ЦИЛИНДРА, ОБРАЗУЮЩІЯ КОТОРАГО ПАРАЛЛЕЛЬНЫ НАПРАВЛЕНІЮ ЛУЧА (R,R').

Въ этомъ случаѣ (черт.285) вся поверхность представляетъ собою собственную тѣнь. Сѣченіе же цилиндра съ плоскостями проекцій выразитъ падающую тѣнь (потому что огибающій цилиндръ совпадетъ съ даннымъ). Поэтому эллипсы, ограничивающіе падающую тѣнь, строятся какъ слѣды даннаго цилиндра на плоскостяхъ проекцій.

П О С Т Р О Е Н І Е Т Ѣ Н И О Т Ъ П Р Я М О Г О К О Н У С А, С Т О Я Щ А Г О Н А Г О Р И З О Н Т А Л Ь Н О Й П Л О С К О С Т И.

Черезъ вершину (S,S') (черт.286) проводимъ линію (SA, S'A'), параллельную направленію луча (R,R'), и находимъ ея слѣды (A,A') и (B,B'). Точка B будетъ принадлежать горизонтальному слѣду каждой изъ плоскостей, касательныхъ къ конусу и параллельныхъ направленію луча, поэтому, проведя изъ B касательныя aB и bB къ основанію конуса, получимъ слѣды этихъ плоскостей. Замѣчаемъ образующія конуса (Sa, S'a') и

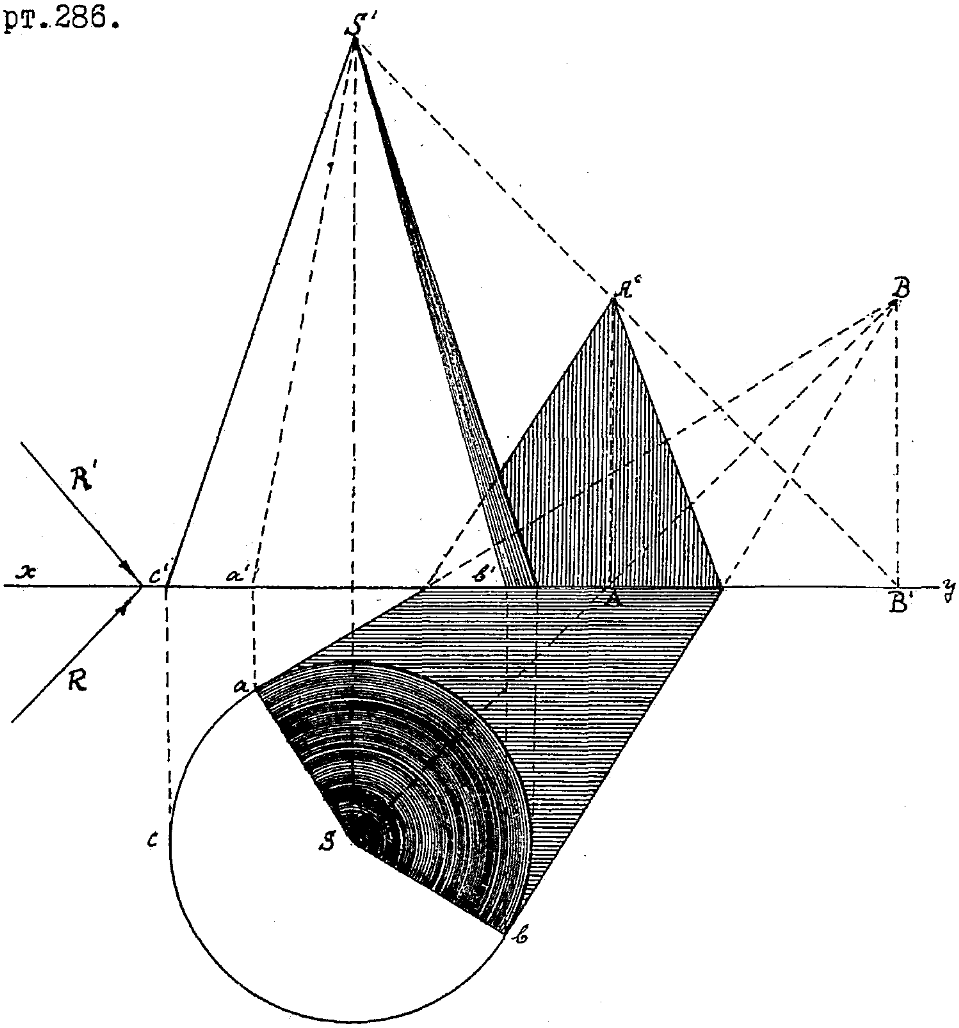
Черт.285.



(Sb, S'b'), по которымъ касательныя плоскости прикасаются къ этой поверхности и которыя раздѣлятъ конусъ на двѣ части: часть (Sacb, S'a'c'b') будетъ освѣщена, противоположная ей - будетъ собственной тѣнью конуса. Въ вертикальной плоскости собственная тѣнь будетъ видима между S'b' и крайней образующей.

Для построенія падающей тѣни замѣтимъ, что тѣнь отъ

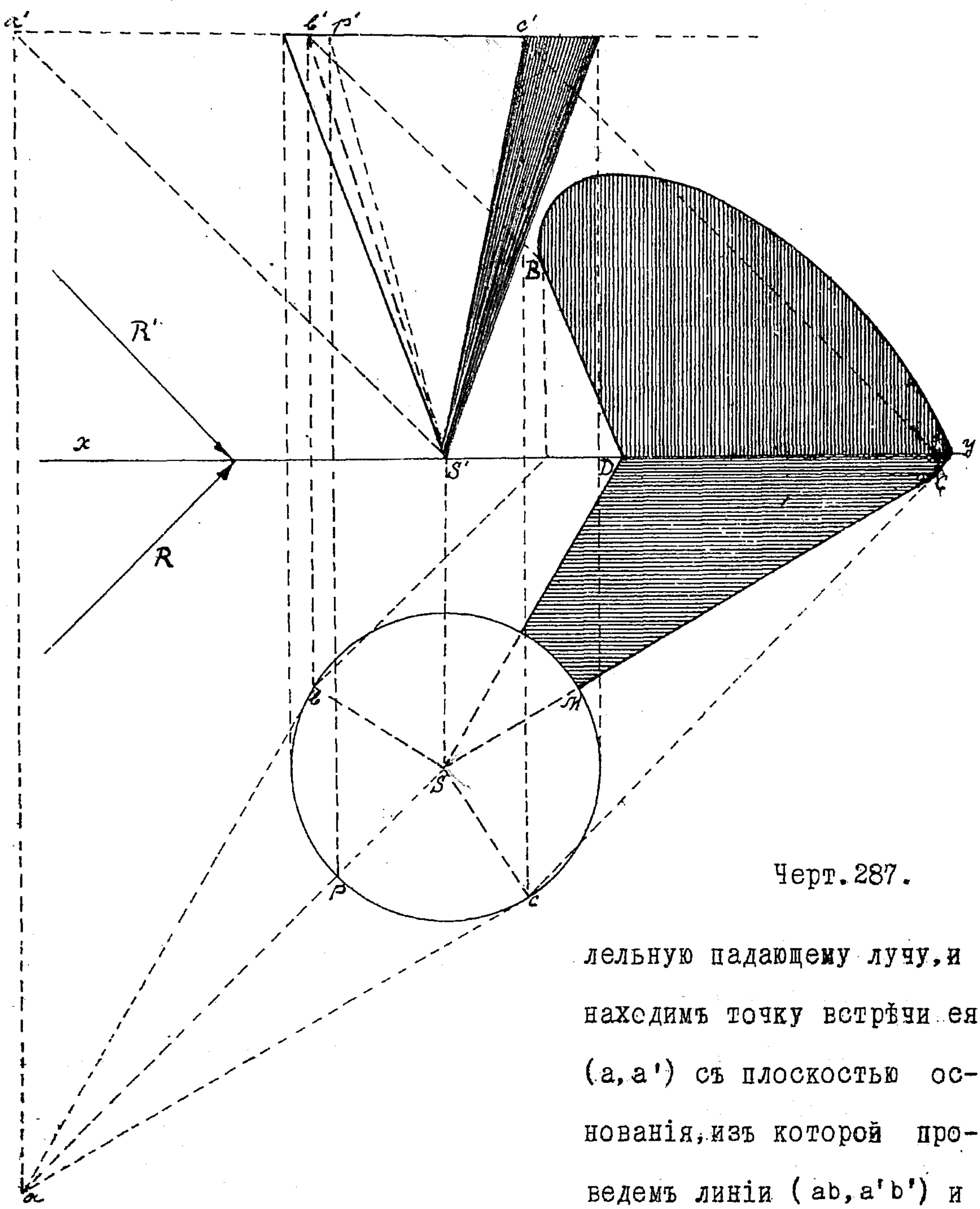
Черт. 286.



вершины (S, S') падаетъ на вертикальную плоскость и выражается точкой A'. Тѣнь отъ прямой (Sb, S'b') упадетъ на линію Bb, а отъ прямой (aS, a'S') - на линію aB. Соединивъ точку A' съ точками встрѣчи этихъ прямыхъ съ осью, получимъ контуръ, ограничивающій тѣнь, падающую отъ конуса на вертикальную и горизонтальную плоскости проекцій.

ПОСТРОЕНІЕ ТѢНИ ОТЪ ОПРОКИНУТАГО КОНУСА.

Для построенія линіи отдѣла на конусѣ (черт. 287) проведемъ черезъ его вершину (S, S') линію (Sa, S'a'), парал-



Черт. 287.

лельную падающему лучу, и находимъ точку встрѣчи ея (a, a') съ плоскостью основанія, изъ которой проведемъ линіи (ab, a'b') и (ac, a'c'), касательныя къ окружности основанія, и черезъ прямыя (aS, a'S') и (ab, a'b'), а также (aS, a'S') и (ac, a'c') проведемъ плоскости, которыя будутъ касаться даннаго конуса по образующимъ (bS, b'S') и (cS, c'S'), раздѣляющимъ поверхность его на двѣ части: темную и свѣтлую; поэтому образующія (bS, b'S') и (Sc, S'c') будутъ принадлежать линіи отдѣла свѣта отъ тѣни. Часть конуса (ъScp, ъ'S'c'p'), обращенная къ направленію падающаго свѣта, будетъ освѣщена, а остальная часть - въ тѣни, которая и будетъ собственною тѣнью. Строимъ падающую тѣнь отъ этихъ образующихъ и отъ дуги ъMc. Тѣни отъ точекъ (ъ,ъ') и (c,c') суть B и C. Падающая тѣнь отъ образующей (ъS, b'S') на горизонтальной плоскости расположится на горизонтальномъ слѣдѣ касательной плоскости, опредѣляемой прямыми (ъS,ъ'S') и (aъ,a'ъ'); горизонтальн. слѣдъ SD этой плоскости будетъ параллеленъ линіи aъ, потому что прямая (aъ,a'ъ') параллельна горизонтальной плоскости. На основаніи этого, проведя изъ S линію SD параллельно aъ, построимъ падающую тѣнь отъ образующей (ъS,ъ'S') на горизонтальной плоскости, а соединивши D съ B, получимъ тѣнь на вертикальной плоскости. Соединивши S съ C, получимъ падающую тѣнь отъ образующей (Sc,S'c') на горизонтальной плоскости. Прямая SC должна быть параллельна касательной ac. Тѣнь дуги ъMc строится по точкамъ; ея очертаніе на вертикальной плоскости есть эллипсъ, а на горизонтальной - выразится дугою круга радіуса, равнаго радіусу основанія конуса.

Чтобы построить самую свѣтлую часть конуса, нужно провести плоскость, параллельную направленію луча (R,R') и проходящую черезъ ось конуса. Тогда та изъ образующихъ освѣщенной части, по которой проведенная плоскость встрѣчаетъ конусъ, будетъ искомой. Этой образующей будетъ (Sp, S'p').

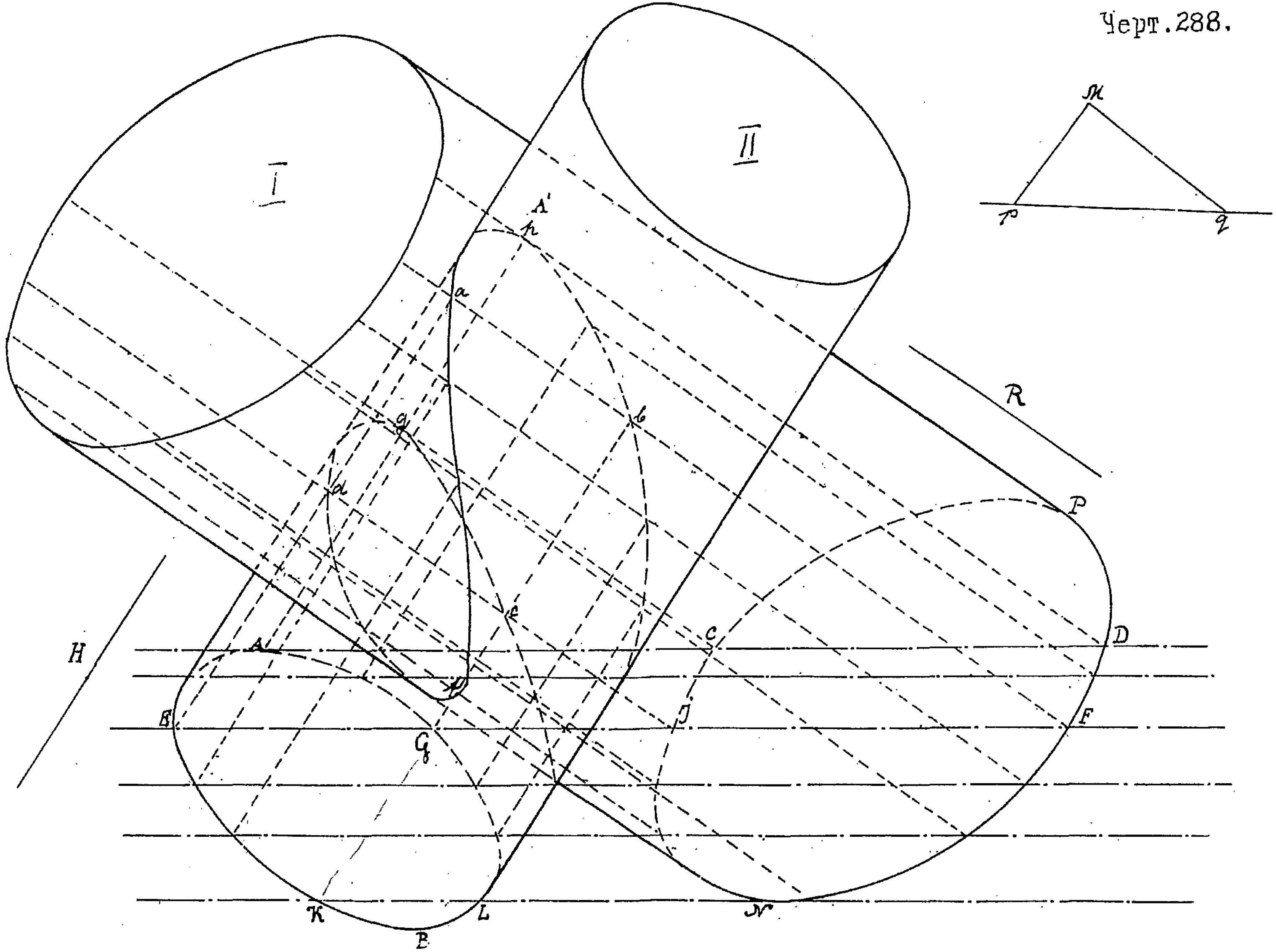
Густота собственной тѣни будетъ такова: по образующей c'S' будетъ самая темная полоса, отъ которой тѣнь будетъ постепенно ослабѣвать въ обѣ стороны. Другая темная образующая есть b'S': эта образующая невидима. Наиболѣе свѣтлая образующая на вертикальной проекціи есть p'S'. Собственная тѣнь на горизонтальной плоскости проекцій не будетъ видима, такъ какъ основаніе конуса закрываетъ ее.

ПЕРЕСѢЧЕНІЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХЪ И КОНИЧЕСКИХЪ ПОВЕРХНОСТЕЙ МЕЖДУ СОБОЮ.

Цилиндрическія поверхности пересѣкаются между собою по кривымъ двойной кривизны, которыя строятся по точкамъ. Чтобы получить точки, принадлежащія этой кривой, пересѣкаютъ данныя поверхности вспомогательными плоскостями, которымъ даютъ такое положеніе, чтобы въ сѣченіи получились простѣйшія линіи, т.е. прямыя. Поэтому, вспомогательныя плоскости проводятъ такъ, чтобы онѣ пересѣкали поверхности по образующимъ; такому условію, какъ нами доказано, удовлетворяютъ плоскости, параллельныя образующимъ поверхности.

Построимъ сѣченіе двухъ цилиндрическихъ поверхностей, данныхъ слѣдами на какой-нибудь плоскости проекцій и направленіемъ образующихъ. Пусть кривыя AB и CD (черт.288) -слѣды поверхности, а прямыя H и R - направленіе ихъ образующихъ. Вспомогательныя плоскости должны быть параллельны образующимъ обѣихъ поверхностей; поэтому, чтобы опредѣлить направленіе ихъ слѣдовъ, беремъ въ пространствѣ произвольную

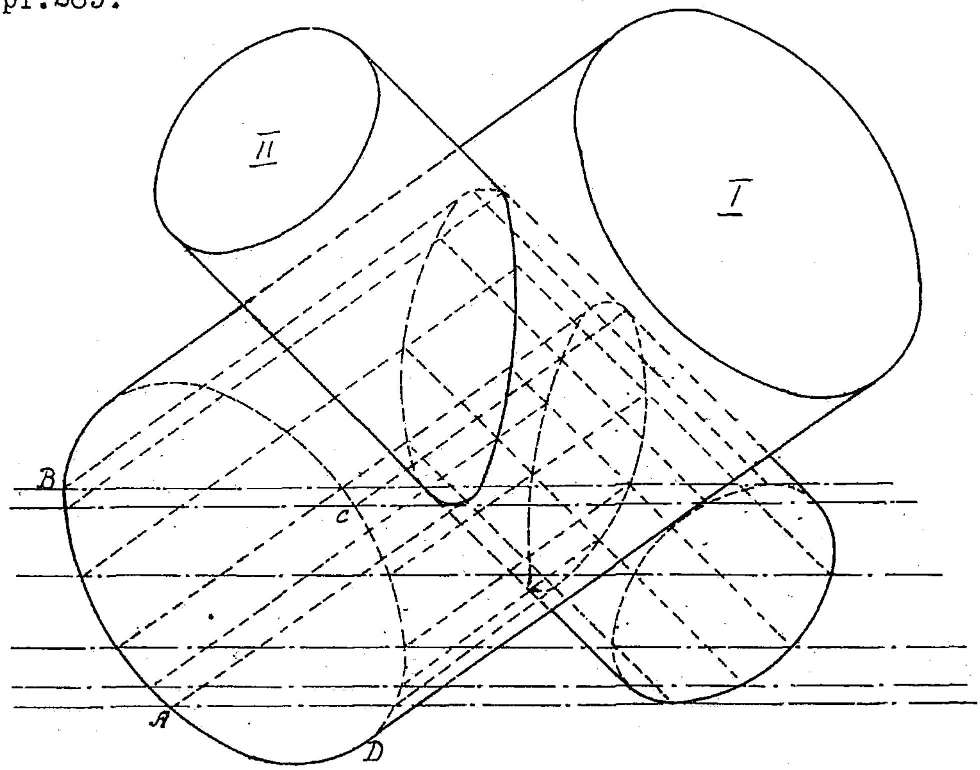
Черт.288.



точку M и черезъ нее проводимъ прямыя Mp и Mq, соотвѣтственно параллельныя образующимъ цилиндровъ; тогда плоскость pMq, опредѣляемая этими прямыми, и будетъ параллельна образующимъ данныхъ поверхностей. Построивъ слѣды p и q этихъ прямыхъ на той плоскости проекцій, на которой находятся направляющія цилиндровъ, найдемъ слѣды pq плоскости, параллельной образующимъ обѣихъ поверхностей. Всѣ вспомогательныя плоскости нужно проводить параллельно плоскости Mpq; поэтому слѣды ихъ будутъ параллельны pq, и всякую прямую EF, параллельную pq, можно разсматривать какъ слѣдъ вспомогательной плоскости. Чтобы получить образующія пересѣченія поверхностей плоскостью, слѣдъ которой - EF, мы изъ точекъ E,F,G,J проводимъ прямыя, параллельныя направленію образующихъ каждой поверхности. Эти образующія находятся въ одной плоскости и потому пересѣкаются, а точки ихъ встрѣчи будутъ точками искомой кривой. Такимъ образомъ, получаются точки a, b, c и d. Продолжая проводить вспомогательныя плоскости, мы дойдемъ до такой плоскости, которая, касаясь одной поверхности, пересѣкаетъ другую, какъ плоскость, слѣдъ которой KN; такая плоскость называется предѣльной; она показываетъ, что образующія второй поверхности, слѣды которыхъ лежатъ на дугѣ KBL, не пересѣкаются съ первой поверхностью. Проведя сѣкущія плоскости по другую сторону EF, мы дойдемъ до другой предѣльной плоскости AD.

Если предѣльныя плоскости расположены такъ, что одна изъ нихъ, касаясь первой поверхности, пересѣкаетъ вторую,

Черт.289.

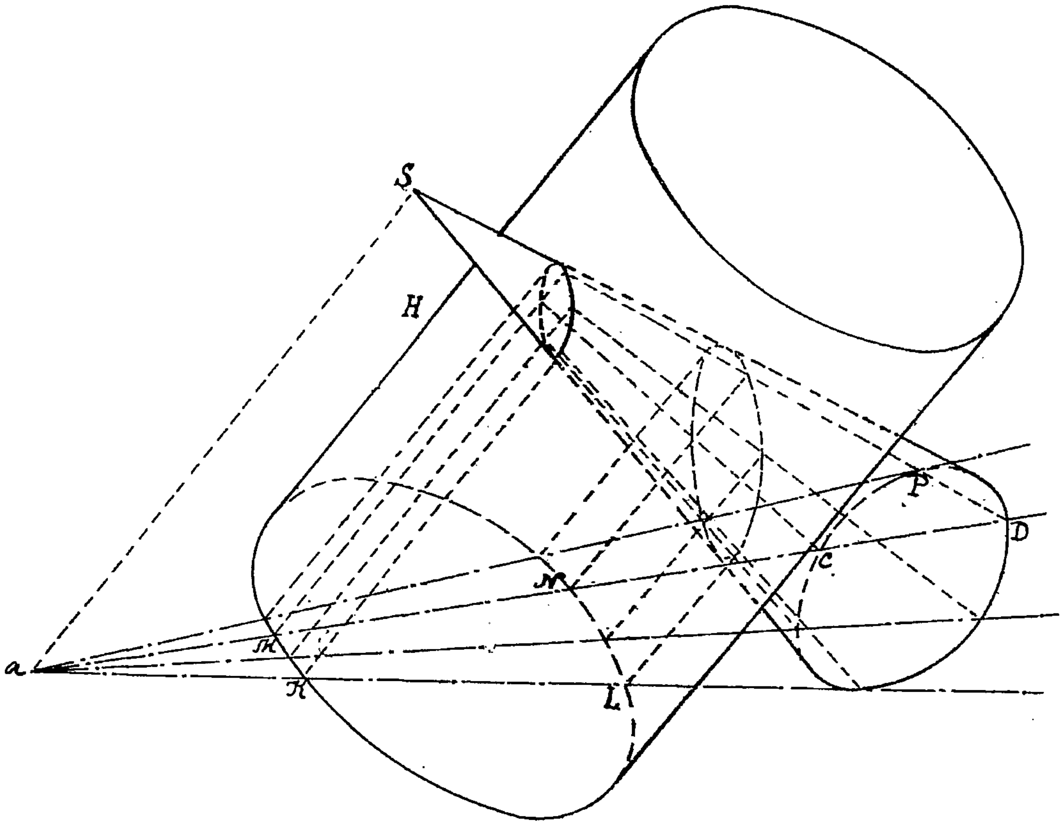


а другая, касаясь второй, пересѣкаетъ первую, то это покажетъ, что одна поверхность вдавлена въ другую и линія сѣченія состоитъ изъ одной вѣтви. Если же обѣ предѣльныя плоскости, касаясь одной поверхности, пересѣкаютъ другую, то въ сѣченіи получатся двѣ кривыя: входа и выхода. (Послѣдній случай представленъ на черт.289). Пересѣченіе всѣхъ образующихъ второй поверхности съ тѣми образующими первой, слѣды которыхъ лежатъ на кривой CD, дастъ кривую входа, а пересѣченіе образующихъ второй поверхности съ тѣми образующими первой, слѣды которыхъ лежатъ на кривой AB, дастъ кривую выхода.

Построивъ достаточное число точекъ, соединяемъ ихъ по лекалу. Чтобы не сбиться при соединеніи, поступаемъ слѣдующимъ образомъ: возьмемъ какую-нибудь образующую второй поверхности, напримѣръ АА' (черт.288), и на ней - точку g, принадлежащую кривой сѣченія, которую и примемъ за начало кривой; отъ точки g переходимъ къ смежной точкѣ кривой сѣченія,- для этого отъ точки А - слѣда разсматриваемой образующей второй поверхности - идемъ по направляющей къ точкамъ Е и К, а на первой поверхности идемъ по направляющей отъ С къ J и N и при этомъ соединяемъ точки, полученныя отъ пересѣченія образующихъ, лежащихъ въ одной плоскости. Отъ пересѣченія видимыхъ образующихъ получаются видимыя точки, а отъ пересѣченія невидимыхъ или видимой съ невидимой - невидимыя. Затѣмъ идемъ отъ Е къ К на второй поверхности и отъ J къ N на первой поверхности; получаемъ, рядъ точекъ до f и полученныя точки соединяемъ. Такъ какъ образующія второй поверхности, лежащія за точкой К (по направленію къ В), не пересѣкаются съ первой поверхностью, то кривая отъ f дѣлаетъ поворотъ. На второй поверхности идемъ отъ точки К къ Е и А, а отъ N къ F и D на первой и, замѣчая точки встрѣчи образующихъ, соединяемъ ихъ (f съ a, a съ h). Далѣе отъ А, второй поверхности, идемъ къ G и L, а отъ D, первой поверхности, къ F и N, соединяя непрерывною кривою точки, лежащія на пересѣченіяхъ образующихъ; наконецъ, отъ L второй поверхности идемъ къ G и А, а отъ N первой - къ J и С. Такимъ образомъ получится сомкнутая кривая сѣченія. При построеніи кривыхъ входа и выхода поступаютъ подобно предыдущему (черт.289).

Построить линію сѣченія цилиндрической и коничеcкой

Черт. 290.

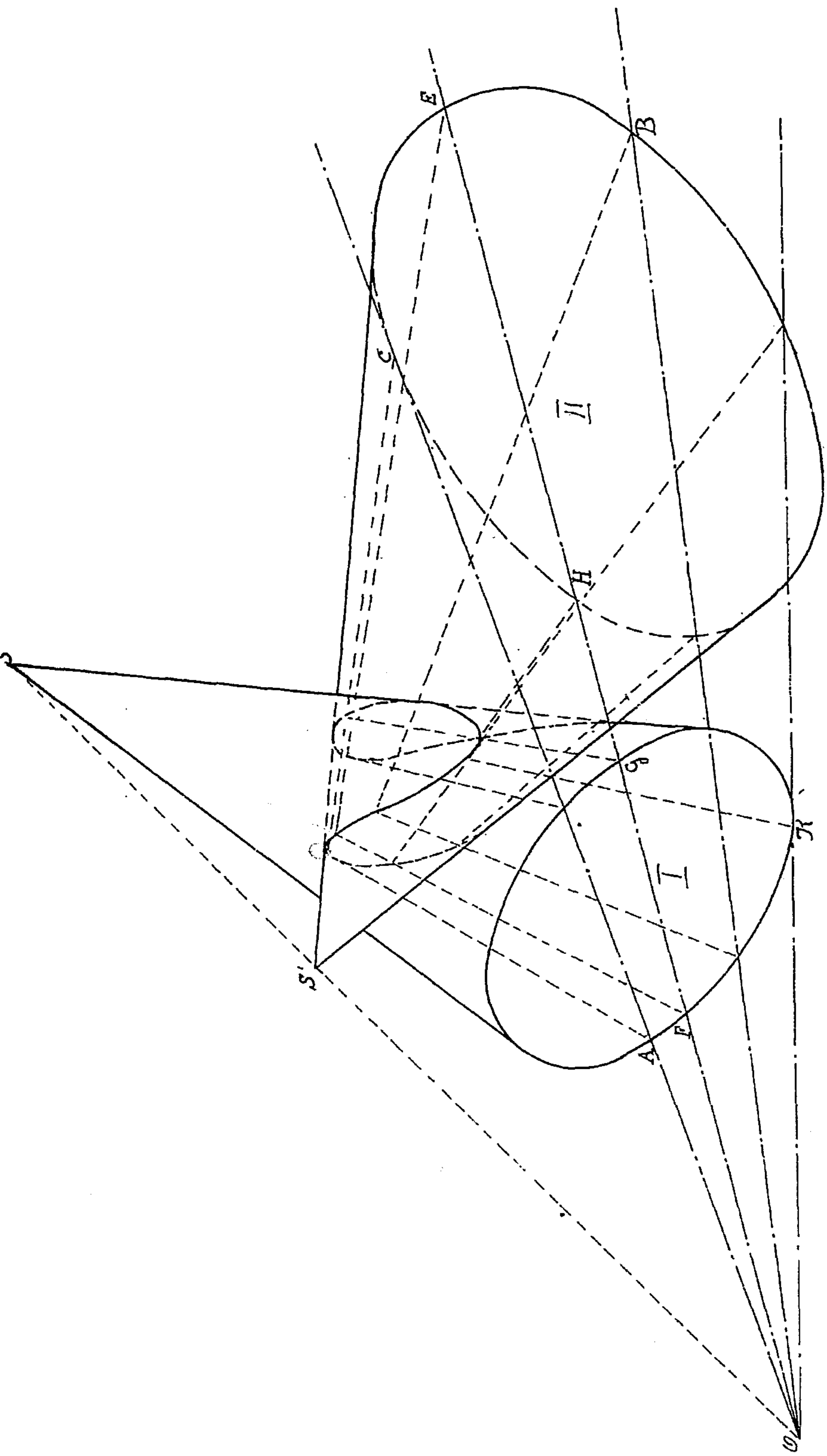


поверхностей, если цилиндрическая дана слѣдомъ и направленіемъ образующихъ, а коническая - слѣдомъ и вершиною S (черт. 290).

Пусть KL есть слѣдъ, а H - направленіе образующихъ цилиндра и CD - слѣдъ, а S - вершина конической поверхности. Вспомогательныя плоскости, пересѣкающія данныя поверхности по образующимъ, должны быть параллельны H и проходить черезъ вершину S конуса. Линія aS, проведенная черезъ вершину конуса, параллельно H, принадлежитъ каждой изъ вспомогательныхъ плоскостей, а ея слѣдъ a - слѣду каждой изъ этихъ плоскостей. Поэтому всякую прямую, напримѣръ aD, проведенную черезъ a и пересѣкающую слѣды поверхностей, можно разсматривать какъ слѣдъ вспомогательной плоскости. Соединивъ точки C и D съ S и проведя изъ M и N линіи, параллельныя H, получимъ образующія пересѣченія цилиндра и конуса вспомогательной плоскостью. Эти прямыя лежатъ поэтому въ одной плоскости и точки ихъ пересѣченія суть точки искомой кривой. По расположенію предѣльныхъ плоскостей aP и aL - видно, что въ данномъ случаѣ получаются кривыя входа и выхода.

Построить линію сѣченія двухъ коническихъ поверхностей, заданныхъ слѣдами и вершинами.

Пусть (черт.291) кривыя AG и BH - слѣды поверхностей, а S и S' - ихъ вершины. Для построенія кривой сѣченія обѣ поверхности пересѣкаются вспомогательными плоскостями, проходящими черезъ вершины обѣихъ поверхностей, чтобы въ сѣченіи получились образующія этихъ поверхностей. Линія SS', соединяющая вершины конусовъ, принадлежитъ каждой изъ вспомогательныхъ плоскостей, а точка O (ея слѣдъ) - слѣду каждой изъ плоскостей. Поэтому всякую прямую, напримѣръ OFE, проведенную черезъ O и пересѣкающую слѣды поверхностей въ точкахъ F, G, H и E, можно разсматривать какъ слѣдъ вспомогательной плоскости. Соединивъ точки F, G, H и E съ соотвѣтствующими вершинами, получимъ образующія пересѣченія. Точки встрѣчи этихъ прямыхъ суть точки искомой кривой. Для построенія предѣльныхъ плоскостей нужно изъ O провести касательныя OC и OK къ слѣдамъ поверхностей. По расположенію слѣдовъ предѣльныхъ плоскостей можно судить, получится ли въ сѣченіи кривая врѣзыванія (или вдавливанія) или кривая входа и выхода. На черт.291 получается кривая вдавливанія.

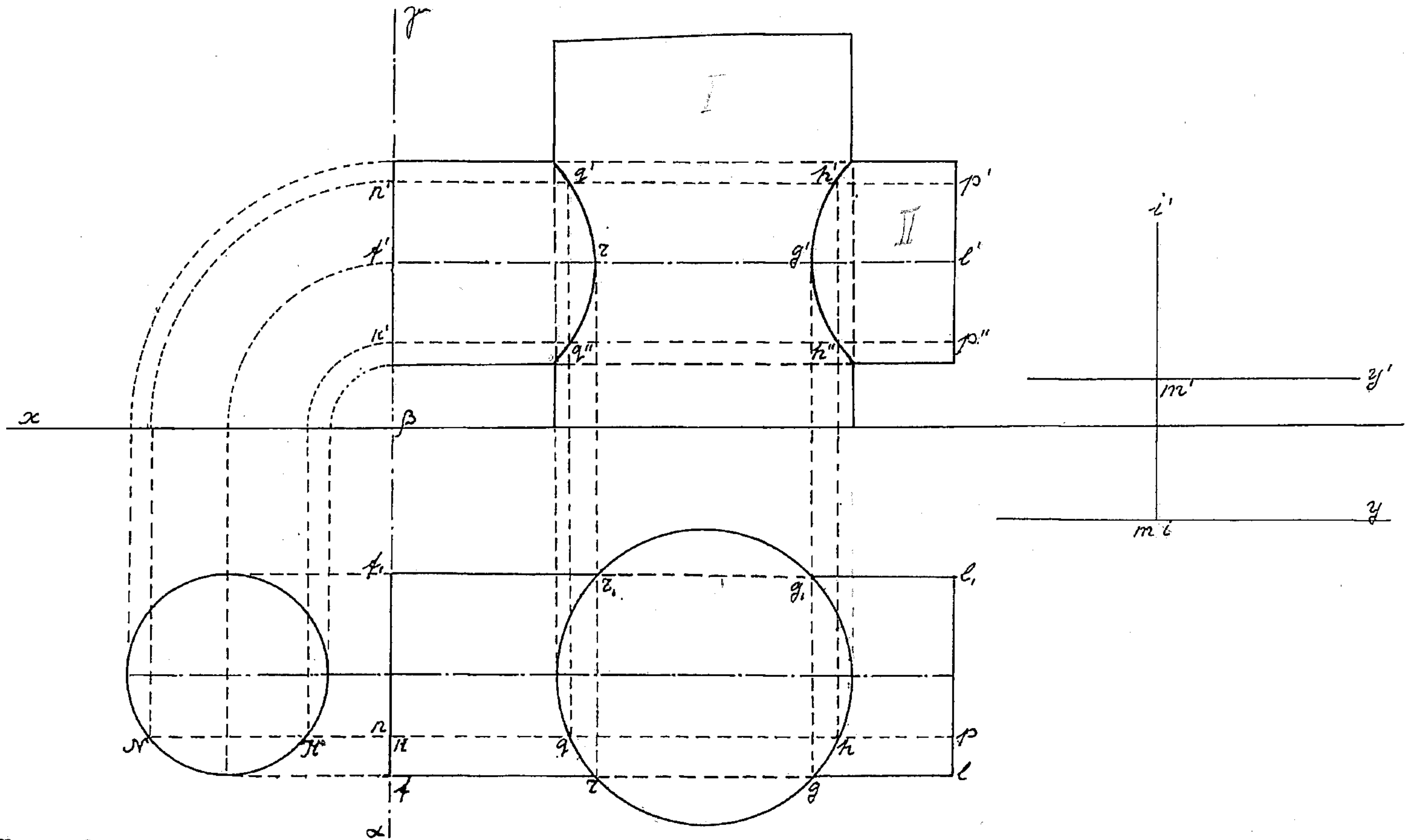


Черт. 291.

ПЕРЕСѢЧЕНІЕ ДВУХЪ ЦИЛИНДРОВЪ, ЗАДАННЫХЪ ПРОЕКЦІЯМИ.

Построимъ линію сѣченія двухъ прямыхъ цилиндровъ, изъ которыхъ одинъ поставленъ на горизонтальную плоскость, а другой - на профильную, при чемъ оси пересѣкаются (чертежъ 292-ой). Чтобы построить линію сѣченія, мы должны проводить вспомогательныя плоскости, пересѣкающія обѣ поверхности по образующимъ.

Для опредѣленія направленія такихъ плоскостей беремъ въ пространствѣ произвольную точку (m,m') и черезъ нее проводимъ прямыя, параллельныя образующимъ: такъ (mi, m'i') параллельно образующимъ первой поверхности, а (my, m'y') параллельно образующимъ второй поверхности. Плоскость, опредѣляемая этими прямыми, и будетъ параллельна вспомогательнымъ плоскостямъ; но эта плоскость параллельна и вертикальной плоскости проекцій, поэтому вспомогательныя плоскости надо проводить параллельно вертикальной плоскости проекцій и всякую прямую kp, параллельную оси xy можно разсматривать какъ слѣдъ вспомогательной плоскости. Строимъ образующія пересѣченія перваго цилиндра плоскостью kp; для этого изъ точекъ g и h опускаемъ перпендикуляры на оси xy и продолжаемъ ихъ. Чтобы получить образующія сѣченія второго цилиндра, мы замѣчаемъ, что плоскость kp пересѣкается съ $\alpha\beta\gamma$ по прямой, перпендикулярной къ горизонтальной плоскости, и эта прямая пересѣкаетъ основаніе второго цилиндра въ точкахъ, принадлежащихъ искомымъ образующимъ;



Черт.292.

чтобы получить эти точки, совмѣстимъ плоскость $\alpha\beta\gamma$ съ горизонтальной, тогда совмѣщеніемъ линій сѣченія будетъ прямая kN, а совмѣщеніемъ искомыхъ точекъ - точки N и K. По совмѣщенію точекъ N и K находимъ ихъ проекціи (n,n') и (k,k'), проведя изъ которыхъ образующія второго цилиндра, мы и получаемъ образующія (np, n'p') и (kp,k'p")сѣченія этого цилиндра плоскостью kp. Точки (q,q'),(q,q"), (h,h') и (h, h") встрѣчи построенныхъ образующихъ будутъ принадлежать искомой кривой. Подобно этому находимъ и другія точки кривой сѣченія. Чтобы узнать, первый ли цилиндръ входитъ во второй или обратно, проводимъ предѣльныя плоскости, т.е. плоскости, касательныя, напримѣръ, ко второй поверхности. Эти послѣднія прикоснутся второй поверхности по образующимъ (fl, f'l') и ($f_,l_,$, $f'_,l'_,$), а горизонтальные слѣды ихъ совпадутъ съ горизонтальными проекціями fl и $f_,l_,$ образующихъ. Изъ расположенія слѣдовъ этихъ плоскостей видно, что тотъ цилиндръ, образующія котораго параллельны оси xy, прорѣзываетъ первый, поэтому въ сѣченіи получатся кривыя входа и выхода. Точки кривой, лежащія въ предѣльныхъ плоскостяхъ, будутъ: (r,r'),($r_,$,$r'_,$), (g,g') и ($g_,$, $g'_,$).

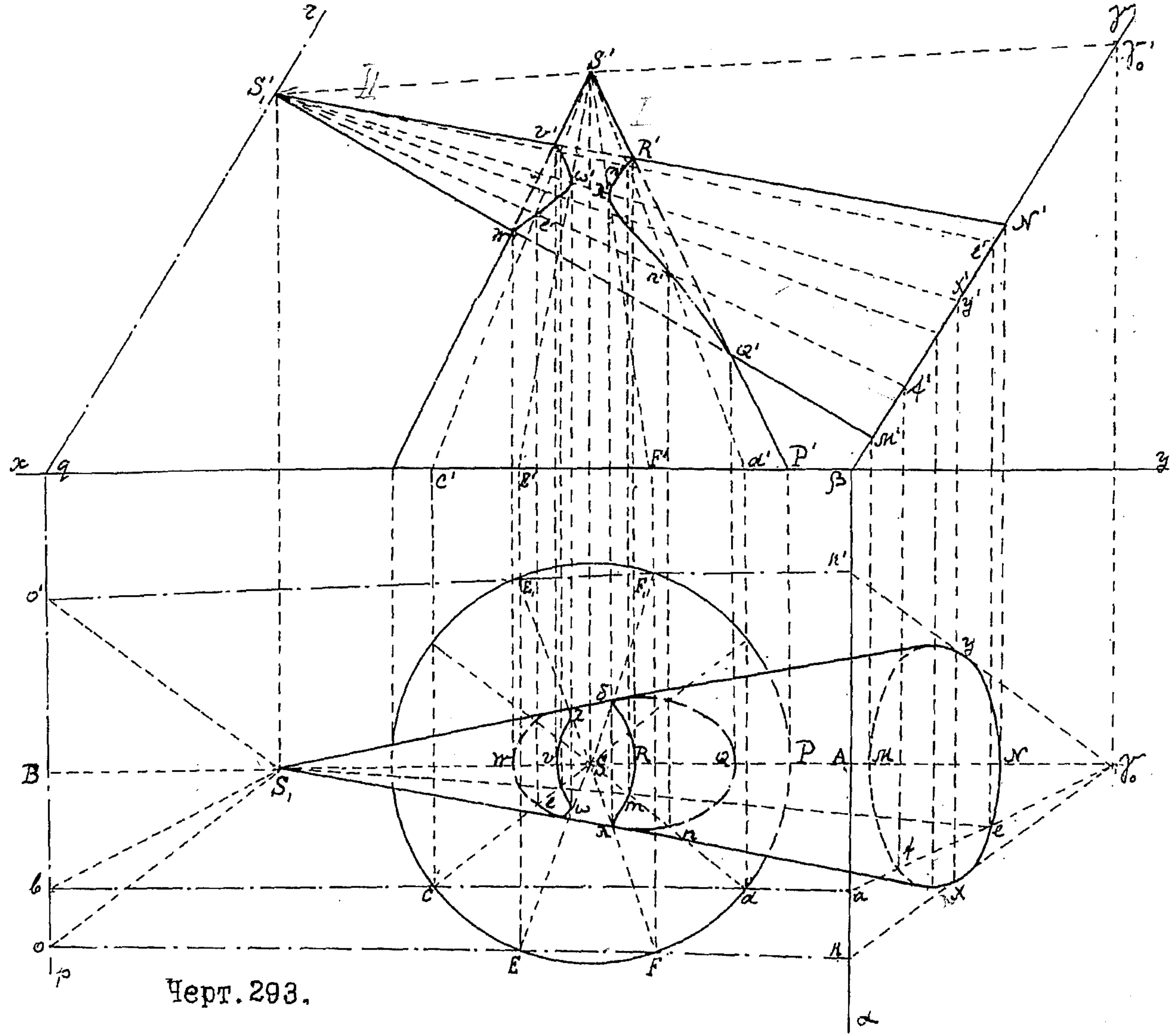
Данные цилиндры расположены такъ, что оси ихъ пересѣкаются подъ прямымъ угломъ, поэтому точки кривой должны быть расположены симметрично относительно плоскости, проходящей черезъ оси цилиндровъ, и вертикальныя проекціи кривой будутъ расположены симметрично относительно f'l'.

Построивъ достаточное число точекъ и соединивъ ихъ, получимъ кривую сѣченія. На вертикальной проекціи видимая часть кривой будетъ совпадать съ невидимой.

ПЕРЕСѢЧЕНІЕ КОНИЧЕСКИХЪ ПОВЕРХНОСТЕЙ, ЗАДАННЫХЪ ПРОЕКЦІЯМИ.

Положимъ, что требуется построить сѣченіе двухъ конусовъ (черт.293); вершина перваго - (S, S'), а второго - (S_1, S_1'); основаніемъ перваго конуса служитъ кругъ, лежащій на горизонтальной плоскости, а другого - кругъ, лежащій въ плоскости $\alpha\beta\gamma$. Проекція основанія второго конуса на горизонтальной плоскости выразится эллипсомъ, а на вертикальной - прямой $M'N'$. Пусть оси конусовъ пересѣкаются и плоскость, ими опредѣляемая, параллельна вертикальной плоскости.

Чтобы построить кривую сѣченія, мы должны провести рядъ вспомогательныхъ плоскостей черезъ прямую $(SS_1, S'S_1')$, проходящую черезъ вершины конусовъ. Эти плоскости пересѣкутъ поверхность по образующимъ, точки встрѣчи которыхъ будутъ точками искомой кривой. Для построенія плоскости, проходящей черезъ прямую $(S_1S, S_1'S')$, нужно отыскать горизонтальный слѣдъ ея; тогда черезъ эту точку пройдутъ горизонтальные слѣды всѣхъ вспомогательныхъ плоскостей. Но можетъ случиться (какъ на нашемъ чертежѣ), что горизонтальный слѣдъ прямой $(S_1S, S_1'S')$ не помѣстится въ предѣлахъ



Черт.293.

чертежа, тогда для построенія вспомогательныхъ плоскостей поступаемъ слѣдующимъ образомъ: черезъ вершину (S_1, S_1') второго конуса проводимъ плоскость pqr паралл $\alpha\beta\gamma$ и строимъ точки встрѣчи прямой (SS_1, $S'S_1'$) съ плоскостями $\alpha\beta\gamma$ и pqr. Эти точки будутъ: (γ_0, γ_0') и (S_1, S_1'). Вспомогательныя плоскости, проходящія черезъ (SS_1, $S'S_1'$), пересѣкаютъ плоскости $\alpha\beta\gamma$ и pqr по линіямъ параллельнымъ. Линіи сѣченія вспомогательныхъ плоскостей съ $\alpha\beta\gamma$ пройдутъ черезъ точку (γ_0, γ_0'), а съ плоскостью pqr - черезъ точку (S_1, S_1'). Поэтому, если черезъ точки (γ_0, γ_0') и (S_1, S_1') проведемъ прямыя, между собою параллельныя, то ихъ можно разсматривать какъ линіи сѣченія вспомогательныхъ плоскостей съ $\alpha\beta\gamma$ и pqr. Пусть γ_0a и параллельная ей S_1ъ будутъ горизонтальными проекціями этихъ прямыхъ. Точки a и ъ суть горизонтальные слѣды построенныхъ прямыхъ, поэтому, соединяя a и b, получимъ горизонтальный слѣдъ ab вспомогательной сѣкущей плоскости. Чтобы построить образующія, по которымъ эта вспомогательная плоскость пересѣкаетъ поверхности, соединяемъ c и d съ S, c' и d' съ S'; построенныя прямыя (cS, c'S') и (ds, d'S') суть образующія сѣченія первой поверхности. Соединяя e и f съ S_1, а e' и f' съ S_1', получимъ образующія сѣченія (eS_1, $e'S_1'$) и (fS_1, $f'S_1'$) второй поверхности. Точки встрѣчи (m,m'), (n,n') и (e,e') построенныхъ образующихъ принадлежатъ кривой сѣченія. Подобнымъ образомъ поступаютъ и для построенія остальныхъ точекъ.

Чтобы узнать, входитъ ли первый конусъ во второй или обратно, нужно провести предѣльныя плоскости. Построимъ предѣльную плоскость для поверхности, у которой вершина - (S_1, S_1'). Эта плоскость должна касаться второй поверхности, а линія сѣченія ея съ $\alpha\beta\gamma$ должна касаться основанія конуса, лежащаго въ плоскости $\alpha\beta\gamma$. Эта линія, очевидно, пройдетъ черезъ точку (γ_0, γ_0') и ея горизонтальная проекція коснется эллипса основанія второго конуса, т.е. эта прямая есть $\gamma_0 k$. Проведя прямую $S_1 o$ параллельно $\gamma_0 k$ и соединяя точки o и k, получимъ ok - горизонтальный слѣдъ искомой плоскости.

Такъ какъ поверхности расположены симметрично относительно плоскости, проходящей черезъ $(SS_1, S'S_1')$ и параллельной вертикальной плоскости, то и горизонтальные слѣды предѣльныхъ плоскостей будутъ расположены симметрично относительно линіи SS_1, а слѣдовательно, для построенія горизонтальнаго слѣда второй предѣльной плоскости, отъ точки A достаточно отложить $Ak' = Ak$, отъ точки B - $o'B = oB$ и точки o' и k' соединить. Изъ расположенія слѣдовъ предѣльныхъ плоскостей (включительно) видно, что всѣ образующія второй поверхности пересѣкаются только съ тѣми образующими первой, которыя соотвѣтствуютъ дугамъ EE_1 и FF_1. Отсюда заключаемъ, что конусъ съ вершиною (S_1, S_1') входитъ въ конусъ съ вершиною (S, S') и кривая сѣченія состоитъ изъ двухъ вѣтвей - входа и выхода. Соединяя S съ E, E_1, F и F_1, а также S' съ F' и F', получимъ образующія первой поверхности, лежащія въ предѣльныхъ плоскостяхъ: образующія второй поверхности будутъ имѣть вертикальными проекціями линію $S_1'y'$ (проекціи обѣихъ образующихъ совпадаютъ). Точки (λ, λ') и (ω, ω') встрѣчи построенныхъ образующихъ суть точки кривой. Горизонтальная проекція кривой въ точкахъ λ, δ, z и ω коснется прямыхъ SF, SF_1, SE_1, SE. Чтобы это доказать для точки (λ, λ'), вообразимъ, что въ точкѣ (λ, λ') проведена касательная линія къ кривой сѣченія. Эта касательная должна находиться въ касательной плоскости, проведенной къ первой поверхности по образующей (SF, S'F') и въ касательной плоскости, проведенной ко второй поверхности по образующей (S_1x, $S_1'x'$): слѣдовательно, касательная къ кривой въ точкѣ (λ, λ') выразится пересѣченіемъ названныхъ касательныхъ плоскостей и ея горизонтальная проекція пройдетъ черезъ точки (λ) и (F) и потому совпадетъ съ λF, которая и будетъ касаться горизонтальной проекціи кривой сѣченія въ точкѣ λ. Дѣйствительно, слѣдомъ первой касательной плоскости будетъ касательная линія, проведенная въ точкѣ F къ основанію конуса, слѣдъ второй касательной плоскости - прямая ok. Поэтому точка F встрѣчи горизонтальныхъ слѣдовъ будетъ горизонтальнымъ слѣдомъ касательной линіи; но касательная линія проходитъ черезъ точку λ, поэтому λF и выразитъ горизонтальную проекцію касательной къ кривой въ точкѣ (λ, λ'), а отсюда слѣдуетъ, что въ точкѣ λ проекція кривой должна касаться образующей SF. Такихъ точекъ, какъ λ, будетъ четыре на образующихъ SE, SE_1, SF и SF_1. Въ нихъ горизонтальная проекція кривой касается образующихъ, на которыхъ онѣ находятся. Въ точкѣ λ' вертикальная проекція кривой будетъ касаться S'F', такихъ точекъ на вертикальной проекціи будетъ двѣ: на S'F' и S'E'.

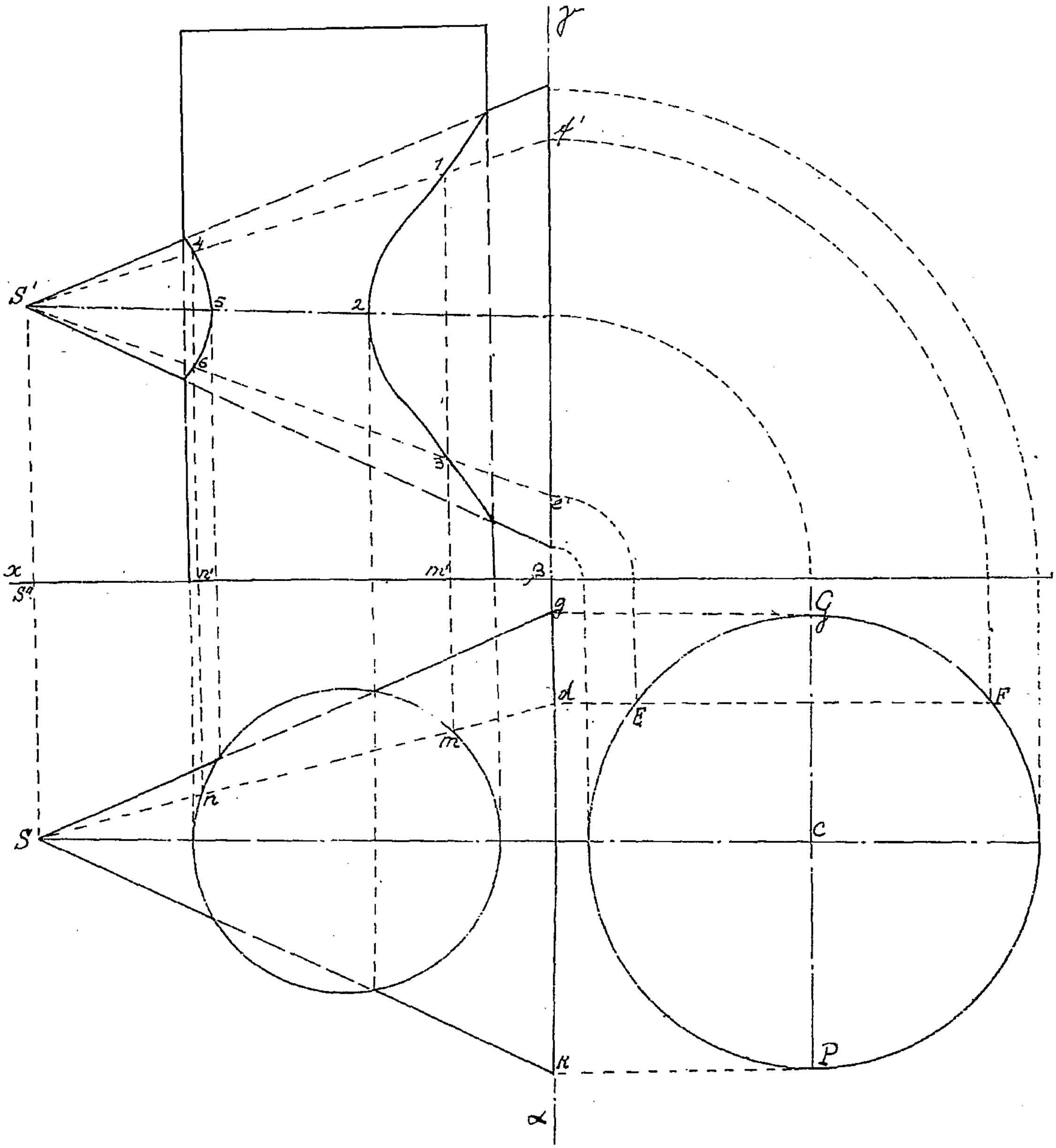
Точки встрѣчи предѣльныхъ образующихъ вертикальной проекціи, т.е. точки (Q,Q'), (R,R'), (V,V') и (N,N') принадлежатъ кривой сѣченія, такъ какъ прямыя (SP, S'P'), (S_1M, $S_1'M'$) и (S_1N, $S_1'N'$) (образующія, на которыхъ эти точки находятся) лежатъ въ одной плоскости.

ПЕРЕСѢЧЕНІЕ ЦИЛИНДРА СЪ КОНУСОМЪ.

Положимъ, что прямой цилиндръ поставленъ на горизонтальную плоскость, а конусъ - на профильную и оси ихъ пересѣкаются. Чтобы построить линію сѣченія, мы должны пересѣкать поверхности этихъ тѣлъ плоскостями по образующимъ. Такія плоскости должны проходить черезъ вершину конуса и быть параллельными образующимъ цилиндра, т.е. быть перпендикулярны къ горизонтальной плоскости.

Если черезъ вершину конуса проведемъ прямую, параллельную образующимъ цилиндра, то она будетъ лежать въ вспомогательныхъ плоскостяхъ, а потому и слѣдъ ея будетъ принадлежать слѣдамъ вспомогательныхъ плоскостей; очевидно, что горизонтальнымъ слѣдомъ ея будетъ точка S (черт. 294-ый). Поэтому въ этой точкѣ будутъ пересѣкаться гори-

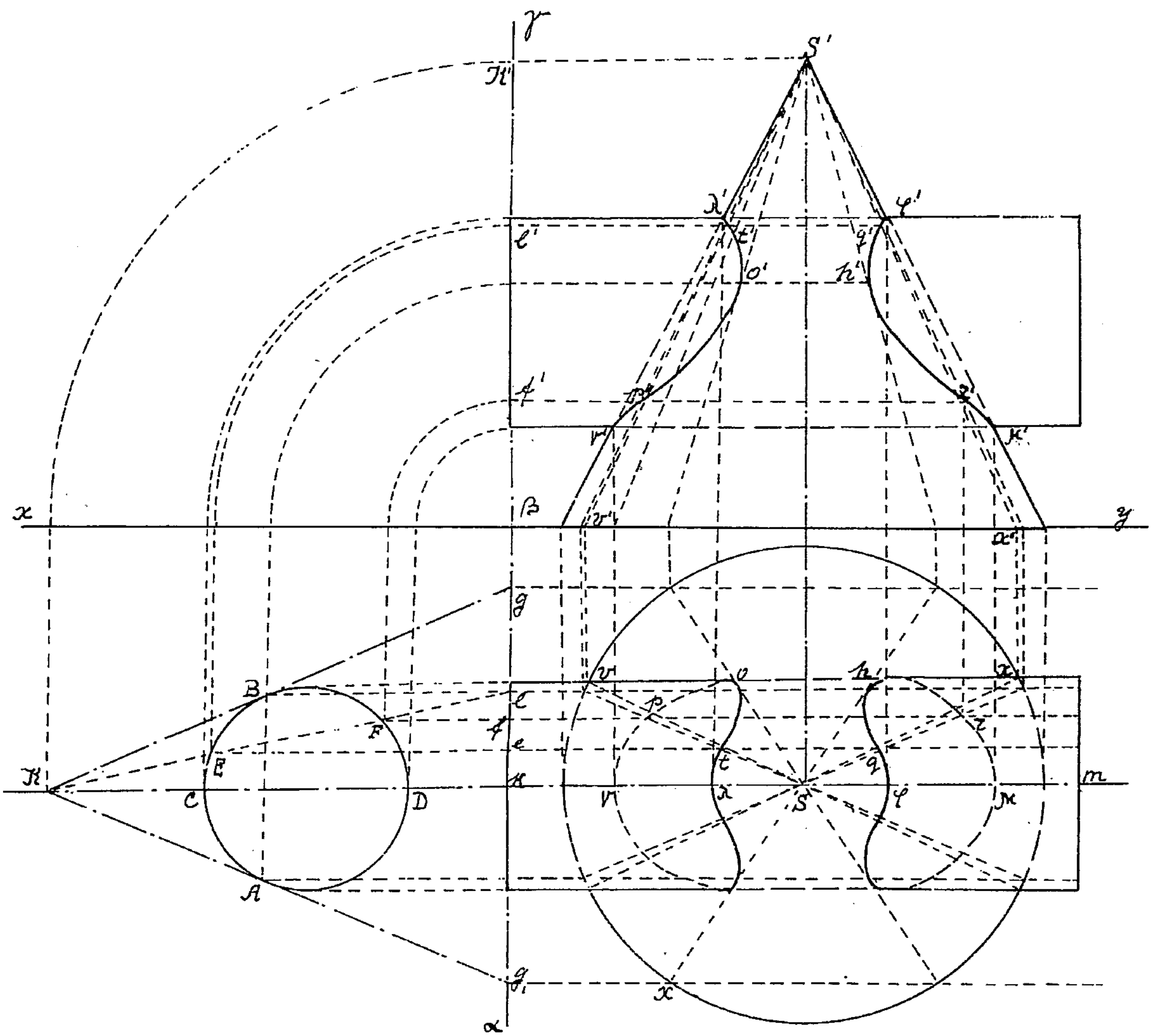
Черт.294.



зонтальные слѣды вспомогательныхъ плоскостей, и всякую прямую Sd, проведенную черезъ S и пересѣкающую слѣдъ цилиндра, можно разсматривать какъ слѣдъ вспомогательной плоскости; Плоскость эта перпендикулярна къ горизонтальной плоскости, поэтому линія сѣченія ея съ конической поверхностью горизонтально-проектируется по линіи Sd. Чтобы построить вертикальныя проекціи образующихъ пересѣченія, совмѣстимъ плоскость $\alpha\beta\gamma$ съ горизонтальною плоскостью; окружность C выразитъ совмѣщенное положеніе основанія конуса; проведя перпендик. $\alpha\beta$, получимъ совмѣщенное положеніе линіи сѣченія вспомогательной плоскости съ $\alpha\beta\gamma$; по совмѣщенному положенію точекъ E и F находимъ ихъ вертикальныя проекціи e' и f', соединяя которыя съ S', получимъ искомыя вертикальныя проекціи образующихъ сѣченія: точки встрѣчи построенныхъ образующихъ конуса съ образующими цилиндра, выходящими изъ точекъ (m,n') и (n,n'), и будутъ искомыми точками сѣченія. Чтобы узнать, входитъ ли конусъ въ цилиндръ или обратно, проводимъ предѣльныя плоскости. Проведемъ ихъ, напр., къ конической поверхности. Горизонтальный слѣдъ одной будетъ Sg, а другой - Sk; отсюда видно, что конусъ прорѣзываетъ цилиндръ и что получается кривая входа и выхода. (Если бы слѣды предѣльныхъ плоскостей къ конической поверхности не пересѣкали слѣда цилиндрической поверхности, то это указало бы на то, что цилиндръ прорѣзываетъ конусъ.) Построивъ точки кривой, лежащія на предѣльныхъ плоскостяхъ, слѣды которыхъ - Sg и -Sk, а также построивъ промежуточныя точки и соединивъ ихъ, получаемъ искомую кривую. Горизонтальная проекція этой кривой совпадаетъ съ основаніемъ цилиндра.

Теперь положимъ, что прямой конусъ поставленъ на горизонтальную плоскость, а основаніе прямого цилиндра находится въ профильной плоскости; оси конуса и цилиндра пересѣкаются. Требуется построить линію сѣченія цилиндра съ конусомъ (черт.295).

Черт.295.



Чтобы построить эту линію сѣченія, мы должны проводить вспомогательныя плоскости, пересѣкающія обѣ поверхности по образующимъ. Такія плоскости должны быть параллельны образующимъ цилиндра и, кромѣ того, проходить черезъ вершину конуса; поэтому, если черезъ вершину конуса (S,S') проведемъ линію (Sk, S'k') параллельно образующимъ цилиндра, или въ нашемъ случаѣ параллельно оси xy, то она будетъ лежать во всѣхъ вспомогательныхъ плоскостяхъ. Найдемъ точку встрѣчи прямой (Sk, S'k') съ плоскостью $\alpha\beta\gamma$ - основанія цилиндра Эта точка есть (k,k') Черезъ нее-то и будутъ проходить линіи сѣченія вспомогательныхъ плоскостей съ $\alpha\beta\gamma$. Построимъ проекцію этой точки на $\alpha\beta\gamma$, разсматривая послѣднюю какъ новую вертикальную; этимъ - построимъ точку K, а проекція основанія цилиндра на этой плоскости выразится кругомъ ACEBFD.

Горизонтальные слѣды вспомогательныхъ плоскостей будутъ параллельны оси xy. Слѣдовательно, всякую прямую, параллельную xy и пересѣкающую слѣдъ конуса, можно принять за горизонтальный слѣдъ вспомогательной плоскости. Тогда, соединивъ S съ точками пересѣченія этой линіи съ окружностью основанія конуса, получимъ образующія (vS, v'S') и (xS, x'S'), по которымъ вспомогательная плоскость пересѣкаетъ конусъ. Чтобы построить образующія сѣченія съ цилиндромъ, мы точку 1 соединяемъ съ K, тогда линія 1K выразитъ сѣченіе вспомогательной плоскости съ $\alpha\beta\gamma$, а проектируя точки E и F на горизонтальную и вертикальную плоскости и проведя черезъ полученныя точки (e,e') и(f,f')параллели xy, получимъ проекціи образующихъ сѣченія. Точки встрѣчи построенныхъ образующихъ, т.е. точки (p,p'),(q,q'), (r,r') и (t,t') будутъ точками искомой кривой. Такимъ образомъ строятся и другія точки кривой.

Чтобы узнать, входитъ ли цилиндръ въ конусъ или обратно, мы проводимъ предѣльныя плоскости, напримѣръ къ цилиндрической поверхности. Эта плоскость, касаясь поверхности цилиндра, пересѣкаетъ плоскость $\alpha\beta\gamma$ по касательной линіи къ основанію цилиндра, и потому, чтобы построить слѣдъ этой плоскости, нужно провести касательную линію къ кругу АВ изъ точки K Точка g этой касательной принадлежитъ горизонтальному слѣду этой касательной плоскости. Проведя изъ g параллель оси xy, мы построимъ горизонтальный слѣдъ предѣльной плоскости. Построивъ образующую прикосновенія съ цилиндромъ и образующія пересѣченія съ конусомъ, найдемъ точки кривой (o,o') и (h,h'), въ которыхъ проекціи кривой касаются проекцій образующихъ конуса. Такъ какъ оси поверхностей пересѣкаются, то предѣльныя плоскости къ цилиндрической поверхности будутъ расположены симметрично относительно плоскости, опредѣляемой осями, и потому для построенія другой предѣльной плоскости достаточно отъ точки k отложить $kg_1 = kg$ и изъ g_1 провести параллель оси xy. Изъ расположенія слѣдовъ предѣльныхъ плоскостей видно, что цилиндръ прорѣзываетъ конусъ и искомая кривая будетъ состоять изъ линій входа и выхода. Построивъ достаточное число точекъ и соединивъ ихъ, находимъ проекціи искомой кривой. Если бы случилось, что предѣльная плоскость, проведенная къ цилиндрической поверхности, не пересѣкаетъ конуса, то это показало бы, что конусъ прорѣзываетъ цилиндръ.

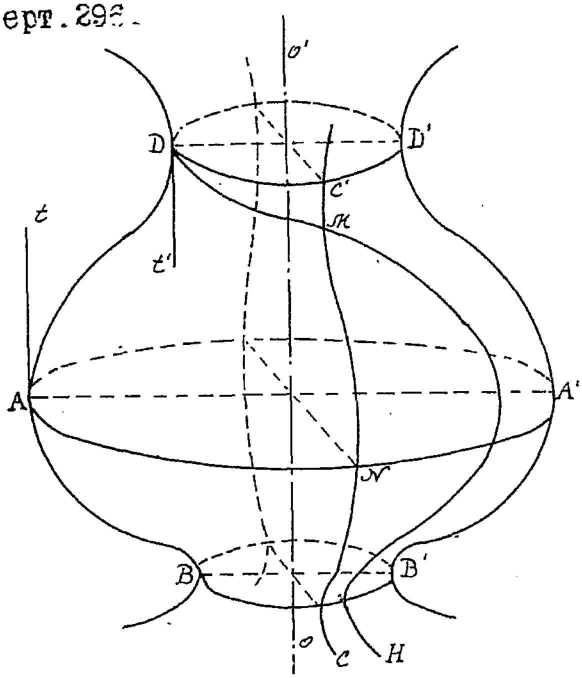
Точки (λ, λ'), (μ, μ'), (v, v') и (φ, φ') пересѣченія очерковъ вертикальныхъ проекцій принадлежатъ кривой сѣченія, такъ какъ онѣ лежатъ на образующихъ цилиндра и конуса, находящихся въ одной и той же плоскости km, параллельной вертикальной плоскости проекцій.

ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНІЯ.

Поверхности вращенія происходятъ отъ вращенія линіи около нѣкоторой постоянной прямой, называемой осью поверхности, такимъ образомъ, что всѣ точки движущейся линіи во все время движенія сохраняютъ свое разстояніе отъ оси.

Положимъ, что кривая АВ (черт.296) вращается около оси оо′ такимъ образомъ, что разстоянія различныхъ точекъ ея отъ оси сохраняютъ свою величину. Въ этомъ случаѣ кривая произведетъ поверхность вращенія. Изъ способа образованія этой поверхности слѣдуетъ, что сѣченіе ея плоскостями, перпендикулярными къ оси, суть круги различныхъ радіусовъ. Такія окружности называются параллелями поверхности. Движущаяся кривая называется образующей поверхности. Образующія кривыя могутъ быть какъ плоскими,

Черт.296.



такъ и кривыми двойной кривизны. Ясно, что всякую кривую DMH, начерченную на поверхности вращенія, можно разсматривать какъ образующую. Такимъ образомъ одна и та же поверхность вращенія можетъ быть произведена безчисленнымъ множествомъ кривыхъ различнаго вида. Если поверхность вращенія пересѣчемъ плоскостью, проходящею черезъ ось, то въ сѣченіи получимъ плоскую кривую, которая называется меридіаномъ поверхности (напр., кривая CC'). Очевидно, что всѣ меридіаны поверхности должны быть равны между собою. Если поверхность вращенія содержитъ такую параллель, которая меньше смежныхъ параллелей, то такая параллель называется шейкой или горломъ поверхности; параллель, бо́льшая смежныхъ съ нею, называется экваторомъ поверхности. На чертежѣ 296 шейками поверхности будутъ окружности DD' и BB', а экваторомъ - окружность AA'. Касательныя At и Dt', проведенныя къ меридіональному сѣченію въ точкахъ пересѣченія меридіональной кривой съ шейкой и экваторомъ, должны быть параллельны оси вращенія oo'.

Образованіе поверхности вращенія можно разсматривать иначе, а именно: можно сказать, что эта поверхность происходитъ отъ движенія окружности перемѣннаго радіуса, при чемъ плоскость ея перпендикулярна къ оси oo', центръ перемѣщается по оси, а какая-нибудь точка окружности находится постоянно на направляющей кривой АБ. Такой способъ образованія поверхности вращенія имѣетъ приложеніе

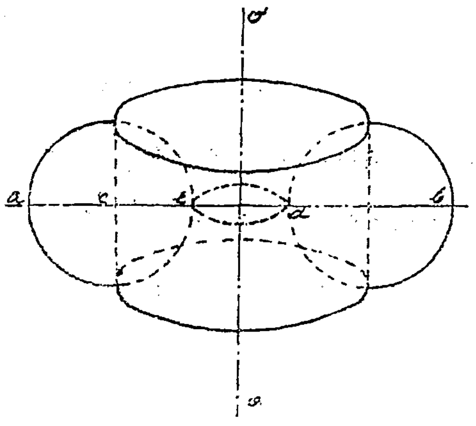
ТИПО-ЛИТ. Ю. ВЕНЕРЪ ПРЕЕМН. О. ФАЛЬКЪ.
ЛИСТЪ 24-Й.

при составленіи уравненія поверхности.

Хотя одна и та же поверхность можетъ быть произведена различными кривыми, но обыкновенно за образующую принимаютъ простѣйшую кривую - кривую меридіональнаго сѣченія, отъ вида которой иногда поверхность и получаетъ названіе.

Если образующею служитъ окружность, а осью - одинъ изъ ея діаметровъ, то поверхностью вращенія будетъ служить поверхность ш а р а. Если образующею служитъ окружность, а осью - прямая, не пересѣкающая круга, то поверхность называется кольцевою или поверхностью т о р а.

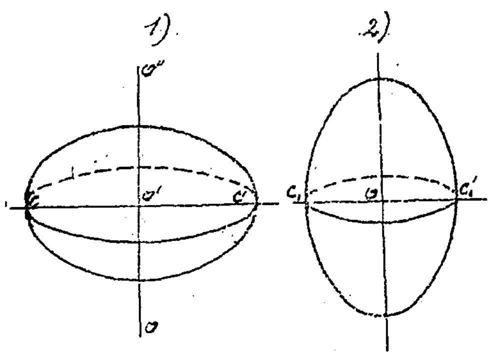
Черт.297.



Пусть кругъ c (черт.297-ой) вращается около oo', тогда онъ произведетъ кольцевую поверхность. Параллель съ діаметромъ ab будетъ экваторомъ, а параллель, діаметръ которой - de, будетъ горломъ поверхности.

Если образующею служитъ эллипсъ, а осью вращенія - одна изъ его осей, то поверхность называется эллипсоидомъ вращенія; если ось вращенія есть бо́льшая ось эллипса, то эллипсоидъ называется растянутымъ, а если меньшая - то

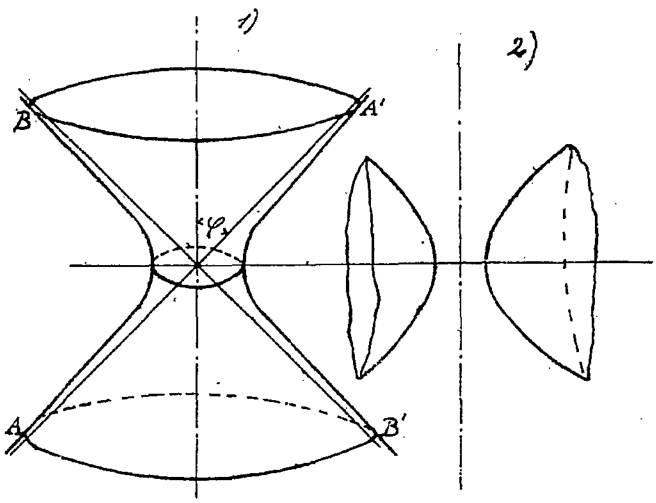
Черт.298.



сжатымъ (черт.298, 1 и 2). Параллели cc'....(1) и c_1c_1'...(2)- экваторы поверхностей.

Отъ вращенія гиперболы около мнимой оси происходитъ поверхность однополаго гиперболоида (черт.299, 1); въ этомъ случаѣ параллель, описанная вершиною, есть горло поверхности. При вращеніи гиперболы около ея

Черт.299.



дѣйствительной оси получается поверхность двуполаго гиперболоида (черт.299, 2).

Если мы построимъ ассимптоты гиперболы, то онѣ (чертежъ 299, AA' и BB') при вращеніи произведутъ такъ называемый ассимптотическій конусъ, ибо каждая ассимптота пересѣкаетъ ось и сохраняетъ во все время вращенія величину угла φ.

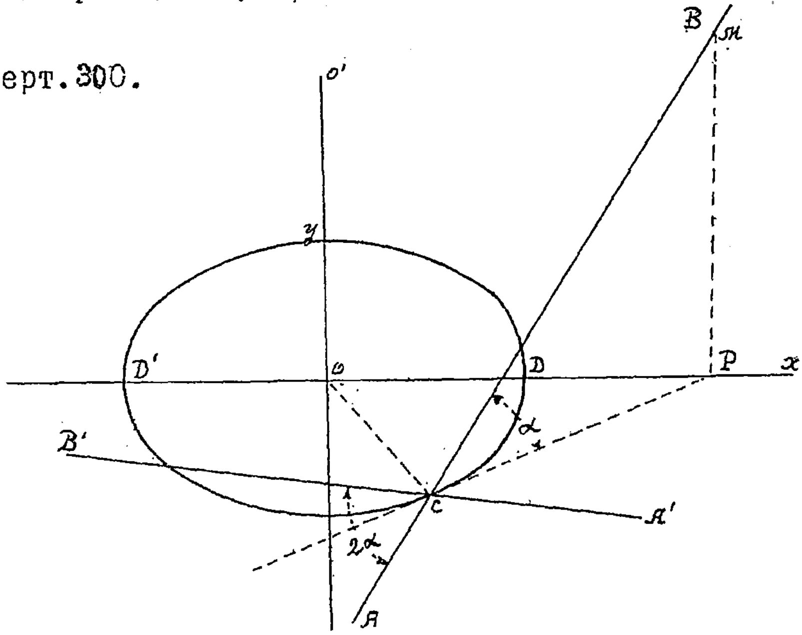
Если образующей служитъ прямая, то при вращеніи ея могутъ получиться поверхности: 1) цилиндрическая, если прямая параллельна оси вращенія, 2) коническая, если прямая (образующая) пересѣкаетъ ось вращенія и 3) поверхность однополаго гиперболоида, если образующая и ось не лежатъ въ одной плоскости.

Поверхности вращенія задаются обыкновенно въ проекціяхъ осью и проекціями образующей линіи; при этомъ плоскости проекцій выбираются такъ, чтобы параллели поверхности выражались простѣйшими линіями - прямыми и окружностями. Если ось перпендикулярна къ горизонтальной плоскости проекцій, то проекціи параллелей на эту плоскость выразятся кругами, а на вертикальную - прямыми, параллельными оси проекцій. За образующую поверхности принимаютъ обыкновенно главное меридіональное сѣченіе, т.е. сѣченіе, параллельное вертикальной плоскости проекцій. Это сѣченіе представляетъ то удобство, что оно проектируется на вертикальную плоскость въ истинную величину и даетъ поэтому ясное понятіе о видѣ поверхности.

Докажемъ, что отъ вращенія прямой, которая не пересѣкается съ осью и непараллельна ей, происходитъ поверхность однополаго гиперболоида.

Пусть прямая AB (черт.300) вращается около постоянной прямой oo', при чемъ AB и ось oo' не лежатъ въ одной плоскости. Между этими прямыми AB и oo' существуетъ, какъ доказано раньше,

Черт.300.



кратчайшее разстояніе oc, перпендикулярное къ обѣимъ прямымъ. При вращеніи AB около oo', точка c опишетъ наименьшую параллель, которая будетъ горловымъ кругомъ DD'. Плоскость этой параллели примемъ за горизонтальную плоскость проекцій и докажемъ, что всякое сѣченіе произведенной поверхности меридіональною плоскостью, т.е. плоскостью, проходящею черезъ ось вращенія, есть гипербола.

Для этого черезъ ось oo' проведемъ какую-нибудь плоскость; пусть слѣдъ ея на плоскости горлового круга есть DD'. Эта плоскость пересѣчетъ образующую AB въ точкѣ M, а въ сѣченіи съ поверхностью дастъ нѣкоторую кривую, которой будетъ принадлежать и точка M. Составимъ уравненіе этой кривой; за ось x-овъ возьмемъ линію oD, а за ось y-овъ - линію oo'. Построивъ координаты $oP = x$ и $MP = y$ точки M, мы можемъ написать:

$$1) \quad y = cP \operatorname{tg}\alpha,$$

гдѣ $\alpha = \angle McP$. Но cP перпендикул. oc, какъ проекція наклонной Mc, перпендикулярной къ oc; поэтому линія cP - касательная къ горловому кругу, и изъ прямоугольнаго Δ ocP можемъ написать:

$$cP = \sqrt{x^2 - r^2},$$

гдѣ $r = oc$ есть кратчайшее разстояніе между AB и oo'. Подставляя величину cP въ равенство (1), получаемъ уравненіе кривой сѣченія:

$$y = \operatorname{tg}\alpha \sqrt{x^2 - r^2}.$$

$\operatorname{tg}\alpha$ есть величина постоянная, т.к. уголъ McP сохраняетъ свою величину при вращеніи прямой AB. Уравненіе кривой сѣченія принимаетъ видъ:

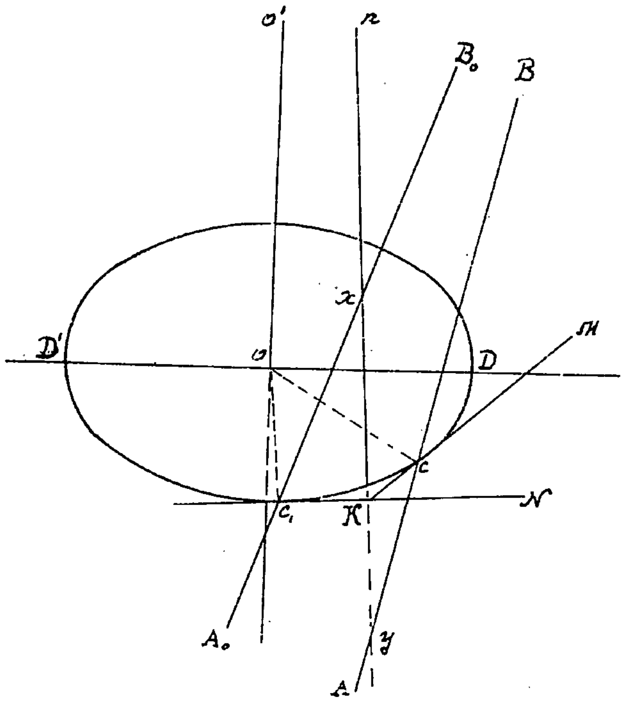
$$\frac{y}{\operatorname{tg}\alpha}=\sqrt{x^2-r^2};\quad \frac{y^2}{\operatorname{tg}^2\alpha}=\sqrt{x^2-r^2};\quad \frac{y^2}{(r\operatorname{tg}\alpha)^2}=\frac{x^2}{r^2}-1;\quad \frac{x^2}{r^2}-\frac{y^2}{(r\operatorname{tg}\alpha)^2}=1.$$

Очевидно, что это уравненіе представляетъ гиперболу, дѣйствительная ось которой есть ось x-овъ, а мнимая - ось y-овъ.

Такъ какъ проведенная плоскость есть плоскость произвольная, то всякая плоскость, проведенная черезъ ось, пересѣкаетъ поверхность по гиперболѣ, равной той, уравненія которой мы составили. Если въ уравненіи кривой α замѣнимъ черезъ $180^\circ-\alpha$, то уравненіе не измѣнится, т. к. $\operatorname{tg}(180-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$: а $(-\operatorname{tg}\alpha)^2=\operatorname{tg}^2\alpha$. Это показываетъ, что та же поверхность можетъ быть произведена другой прямой A'B', находящейся съ прямой AB въ одной проектирующей плоскости, но наклоненной подъ угломъ α въ противоположную сторону; AB называется образующей первой системы, а A'B' - второй. Такъ какъ AB и A'B' лежатъ на поверхности гиперболоида, то онѣ пересѣкаютъ цѣлый рядъ прямолинейныхъ образующихъ; слѣдовательно, черезъ каждую точку поверхности однополаго гиперболоида можно провести двѣ прямолинейныя образующія первой и второй системы.

Нужно замѣтить, что образующія различныхъ системъ могутъ пересѣкаться, а образующія одной системы не пересѣкаются и не лежатъ въ одной плоскости. Пусть DcD' есть плоскость горлового круга (черт.301) и AB - образующая какой-нибудь системы; пусть она перешла въ положеніе A_1B_1.

Черт.301.

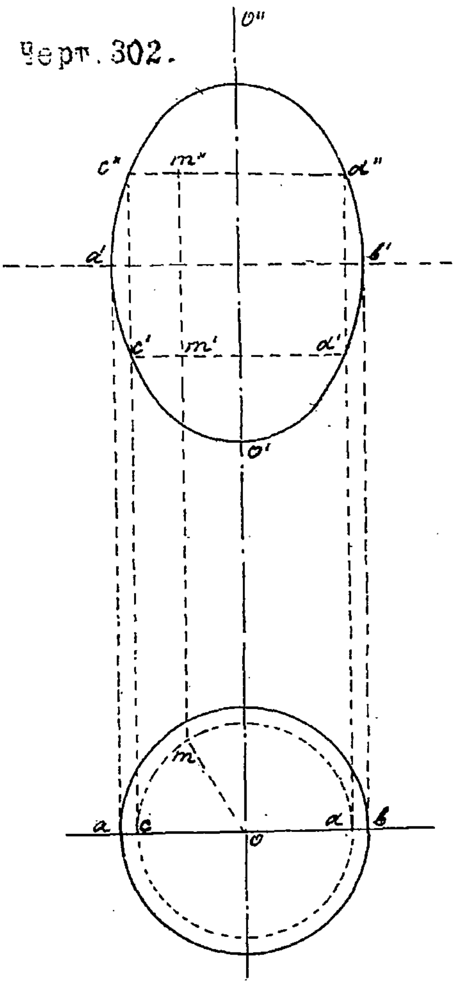


Проведя через AB проектирующую плоскость McB, а через A_oB_o -плоскость B_oc_1N, получимъ плоскости, слѣды которыхъ cM и c_1N - касательны къ горловому кругу, а линія сѣченія ихъ Kn перпендикулярна къ плоскости горлового круга (черт.301). Если бы прямыя AB и A_oB_o пересѣкались, то точка пересѣченія ихъ лежала бы на линіи Kn; но прямая AB пересѣкаетъ Kn въ точкѣ y, лежащей ниже плоскости горлового круга, а A_oB_o - въ точкѣ x, лежащей выше горлового круга. Слѣдовательно, AB и A_oB_o не пересѣкаются При движеніи линіи AB проекція ея на плоскость горлового круга будетъ касаться горлового круга. Этимъ свойствомъ образующей AB можно пользоваться при построеніи проекціи гиперболоида. Изъ того, что смежныя положенія образующихъ AB и A_oB_o не пересѣкаются, заключаемъ, что поверхность однополаго гиперболоида есть поверхность неразгибающаяся.

ПОСТРОЕНІЕ ПРОЕКЦІЙ ЭЛЛИПСОИДА.

Для построенія проекцій эллипсоида должны быть даны: положеніе оси вращенія (o, o'o") (черт.302) и главное меридіональное сѣченіе. Это сѣченіе, будучи эллипсомъ, проектируется на вертикальную плоскость въ истинную величину; для построенія его должны быть даны оси. Горизонтальный слѣдъ плоскости главнаго меридіональнаго сѣченія параллеленъ оси xy а проекція экватора на горизонтальную плоскость есть кругъ, радіусъ котораго равенъ малой полуоси (если данъ эллипсоидъ растянутый). Кривыя главнаго меридіональнаго сѣченія и экватора служатъ очерками поверхности. Когда перечисленныя выше величины даны, то можно построить на поверхности эллипсоида произвольную точку и рѣшать различные вопросы, относящіеся къ эллипсоиду; напримѣръ, можно пересѣчь его плоскостью и построить кривую сѣченія.

Черт. 302.



З А Д А Ч А. По данной проекціи точки на поверхности эллипсоида построить ея другую проекцію (по горизонтальной - вертикальную); поверхность дана осью и главнымъ меридіональнымъ сѣченіемъ (черт.302).

Строимъ прежде ту параллель, на которой находится искомая точка; если m соединить съ o, то разстояніе om дастъ радіусъ параллели; окружность, описанная этимъ радіусомъ изъ o, будетъ горизонтальной проекціей этой параллели. Зная горизонтальную проекцію параллели, можно построить вертикальную; для этого замѣтимъ точки (d,d') и (d,d") встрѣчи окружности параллели съ главнымъ меридіональнымъ сѣченіемъ; черезъ вертикальныя проекціи этихъ точекъ должны проходить вертикальныя проекціи параллелей. Онѣ суть прямыя c'd' и c"d", параллельныя оси xy.

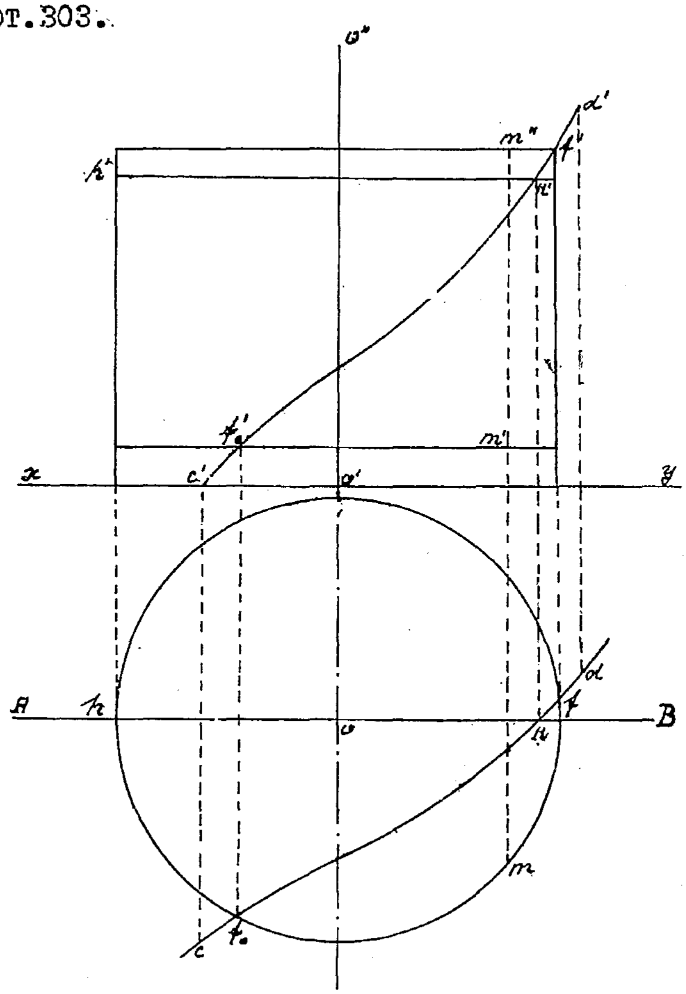
Изъ точки m опускаемъ на ось перпендикуляръ и получаемъ точки m' и m", которыя суть вертикальныя проекціи точекъ, лежащихъ на эллипсоидѣ и имѣющихъ m горизонтальной проекціей.

На горизонтальной проекціи эллипсоида видимы точки, лежащія выше плоскости экватора, а на вертикальной - находящіяся впереди плоскости главнаго меридіана.

Разсужденія, которыя мы примѣняли для построенія точки на эллипсоидѣ, справедливы и для всякой другой поверхности вращенія.

Поверхность вращенія можетъ быть дана проекціями оси вращенія и кривой направляющей. Въ этомъ случаѣ плоскости проекцій располагаются такъ, чтобы одна изъ нихъ была перпендикулярна къ оси вращенія. Пусть кривая (cd,

Черт.303.

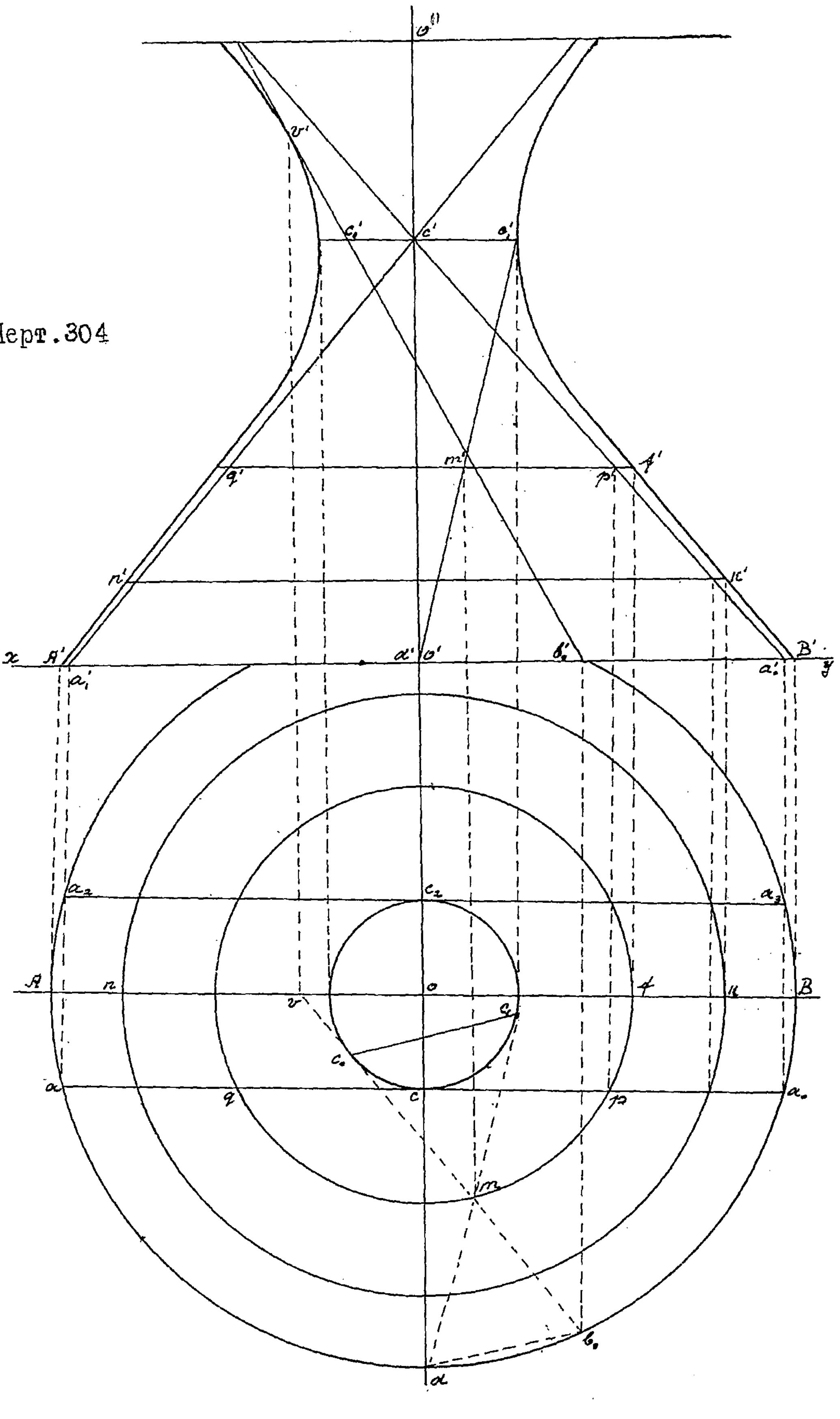


c'd') есть направляющая, а ось -(o, o'o") перпендикулярна къ горизонтальной плоскости (черт. 303-ій). Построимъ по этимъ даннымъ проекціи точки, лежащей на данной поверхности; для этого горизонтальную проекцію m возьмемъ произвольно и построимъ соотвѣтствующую ей вертикальную проекцію m' или m", построивши ту параллель, на которой она находится. Для построенія параллели изъ o радіусомъ om описываемъ окружность и точки ея пересѣченія f и f_0 съ cd проектируемъ на вертикальную проекцію c'd' направляющей въ точки f' и f_0' и черезъ нихъ проводимъ параллели оси проекцій; эти послѣднія будутъ служить вертикальными проекціями той горизонтали, на которой можетъ лежать точка, данная горизонтальной проекціей m; по горизонтальной проекціи m строимъ вертикальныя m' и m". Такимъ образомъ точки (m,m') и (m,m") будутъ лежать на данной поверхности. Если черезъ ось (о, о'о") поверхности проведемъ плоскость АВ параллельно вертикальной плоскости и найдемъ точки встрѣчи ея съ различными параллелями поверхности, то построимъ точки, принадлежащія главному меридіональному сѣченію (одна изъ такихъ точекъ есть точка (h,h')); соединивъ ихъ непрерывной чертой, получимъ кривую главнаго меридіональнаго сѣченія.

Построить проекціи однополаго гиперболоида, даннаго осью и прямолинейной образующей (черт.304).

Пусть проекціи оси поверхности - (о, о'о"); за начальное положеніе образующей возьмемъ прямую ($a_o c$, $a_o' c'$), параллельную вертикальной плоскости. Мы доказали, что если прямая вращается около другой, не лежащей съ нею въ одной плоскости, то она описываетъ поверхность однополаго гиперболоида, поэтому прямая ($a_o c$, $a_o' c'$) опишетъ однополый гиперболоидъ, а точка (с,с'), какъ ближайшая къ оси вращенія, опишетъ наименьшую параллель, которая будетъ горломъ поверхности; горизонтальный слѣдъ образующей, т. е. (a_o, a_o') опишетъ параллель, по которой поверхность пересѣчетъ горизонтальную плоскость, или горизонтальный слѣдъ поверхности. Если черезъ точку (с,с') горлового круга проведемъ прямую (ас, а'с'), наклоненную къ горизонтальной плоскости подъ угломъ, равнымъ углу наклоненія прямой($c a_o$, $c' a_o'$), то она опишетъ ту же поверхность и будетъ образующей второй системы, а прямая ($c a_o$, $c' a_o'$) - первой. Не только черезъ точку горлового круга можно провести двѣ прямо-

Черт.304



o''
v'
c_1'
c'
e_1'
m'
q'
p'
f'
n'
k'
x
A'
a_1'
d'
o'
b_1'
a_0'
B'
y
a_2
e_2
a_3
A
n
v
o
f
k
B
e_0
c_0
a
q
c
p
a_0
m
b_0
d

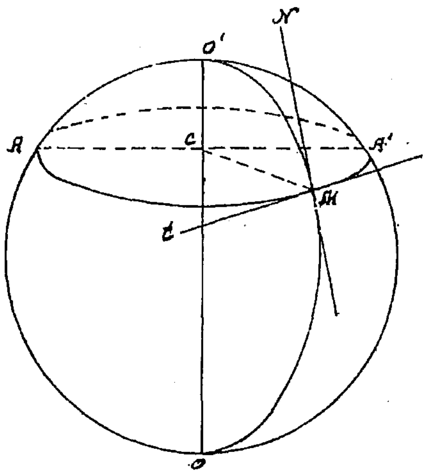
линейныя образующія, принадлежащія разнымъ системамъ, но и черезъ произвольную точку (m,m') поверхности можно провести двѣ прямолинейныя образующія. Дѣйствительно, если точка (p,p') начальнаго положенія образующей придетъ въ точку (m,m'), то образующая $(ca_o, c'a'_o)$ приметъ положеніе прямой $(b_o c_o, b'_o c'_o)$, при чемъ $b_o c_o$ будетъ касаться горизонтальной проекціи горлового круга въ точкѣ c_o. Если же точка (q,q') образующей второй системы совпадетъ съ (m,m'), то прямая (ac, a'_1c') совпадетъ съ $(dc_1, d'c'_1)$ и черезъ точку (m,m') будутъ проведены двѣ прямолинейныя образующія. Такъ какъ касательная плоскость опредѣляется двумя прямолинейными образующими, проходящими черезъ точку поверхности, то плоскость, опредѣляемая двумя образующими, проходящими черезъ точку (m,m'), будетъ касательною; ея горизонтальный слѣдъ есть прямая db_o, а слѣдъ на плоскости горлового круга - прямая $c_o c_1$. Когда c совпадетъ съ c_2, то горизонтальная проекція ca_o начальнаго положенія образующей займетъ положеніе $a_2 c_2$, а вертикальная - a'_1c'; прямая $(a_2 c_2, a'_1c')$ будетъ параллельна прямой (ac, a'_1c'), т.е. образующія разныхъ системъ въ діаметрально-противоположныхъ точкахъ горлового круга параллельны между собою. Это свойство образующихъ справедливо при всякомъ ихъ положеніи.

Если черезъ ось $(o, o'o'')$ проведемъ плоскость AB (горизонтальный слѣдъ) параллельно вертикальной плоскости, то получимъ плоскость главнаго меридіональнаго сѣченія, а построивъ точки встрѣчи образующихъ поверхности съ этой плоскостью, найдемъ кривую главнаго меридіональнаго сѣченія; такъ, образующая ($b_o c_o$, $b'_o c'_o$) пересѣкаетъ плоскость АВ въ точкѣ (v, v'), принадлежащей главному сѣченію. Главнымъ меридіональнымъ сѣченіемъ будетъ гипербола, ибо мы видѣли, что всякая плоскость, проходящая черезъ ось, пересѣкаетъ эту поверхность по гиперболѣ; проекціями ея будутъ: горизонтальной - прямая АВ параллел. оси, а вертикальной - гипербола ($v'n' \dots A'$ - одна вѣтвь, и $f'k'B'$ - другая). Точки этой гиперболы могутъ быть найдены, какъ точки пересѣченія окружностей-параллелей поверхности съ плоскостью АВ. Такимъ образомъ построены точки: (n, n'), (f, f') и (k, k') - главнаго сѣченія.

О КАСАТЕЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ КЪ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНІЯ.

Касательная плоскость къ поверхности вращенія перпендикулярна къ плоскости того меридіана, на которомъ находится данная точка прикосновенія. Пусть oo' (черт.305) будетъ осью поверхности вращенія и М - точкой, взятой на ней; требуется доказать, что касательная плоскость въ точкѣ М перпендикулярна къ плоскости меридіана oMo'. Для этого черезъ точку М проводимъ параллель AMA', которая въ пересѣченіи съ плоскостью меридіана дастъ прямую Мс, равную радіусу параллели. Касательная плоскость въ точкѣ М, проходя черезъ прямыя MN и Mt, касательныя къ кривой oMo' и

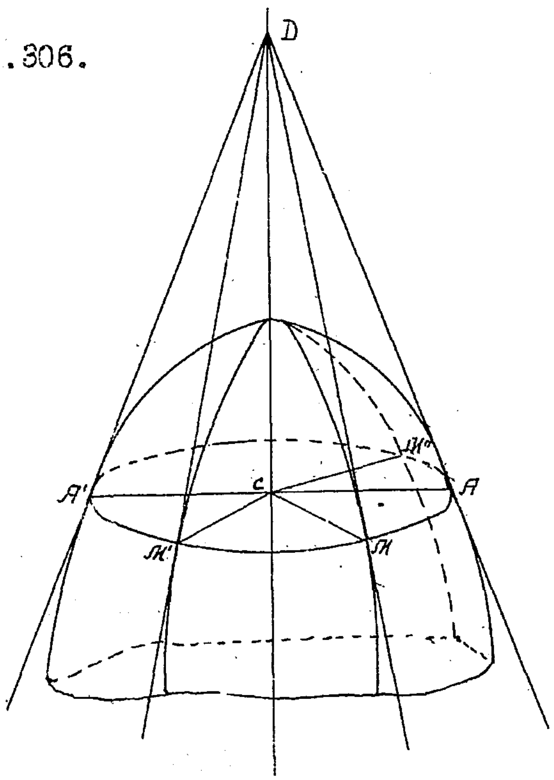
Черт.305.



къ окружности АМА', - перпендикулярна къ плоскости о'Мо потому, что Mt перпендикулярна Мс, но линія Мс есть сѣченіе двухъ перпендикулярныхъ плоскостей (меридіана и параллели); если же линія лежитъ въ одной изъ перпендикулярныхъ плоскостей и перпендикулярна къ ихъ сѣченію, то она перпендикулярна и ко второй плоскости. Слѣдовательно, Mt перпендикулярна къ плоскости оМо', а потому плоскость о'Мо перпендикулярна къ плоскости MNt, т.е. касательной.

Касательныя линіи къ меридіональнымъ кривымъ въ точкахъ одной параллели пересѣкаются съ осью вращенія въ одной точкѣ (чер.306).

Черт.306.



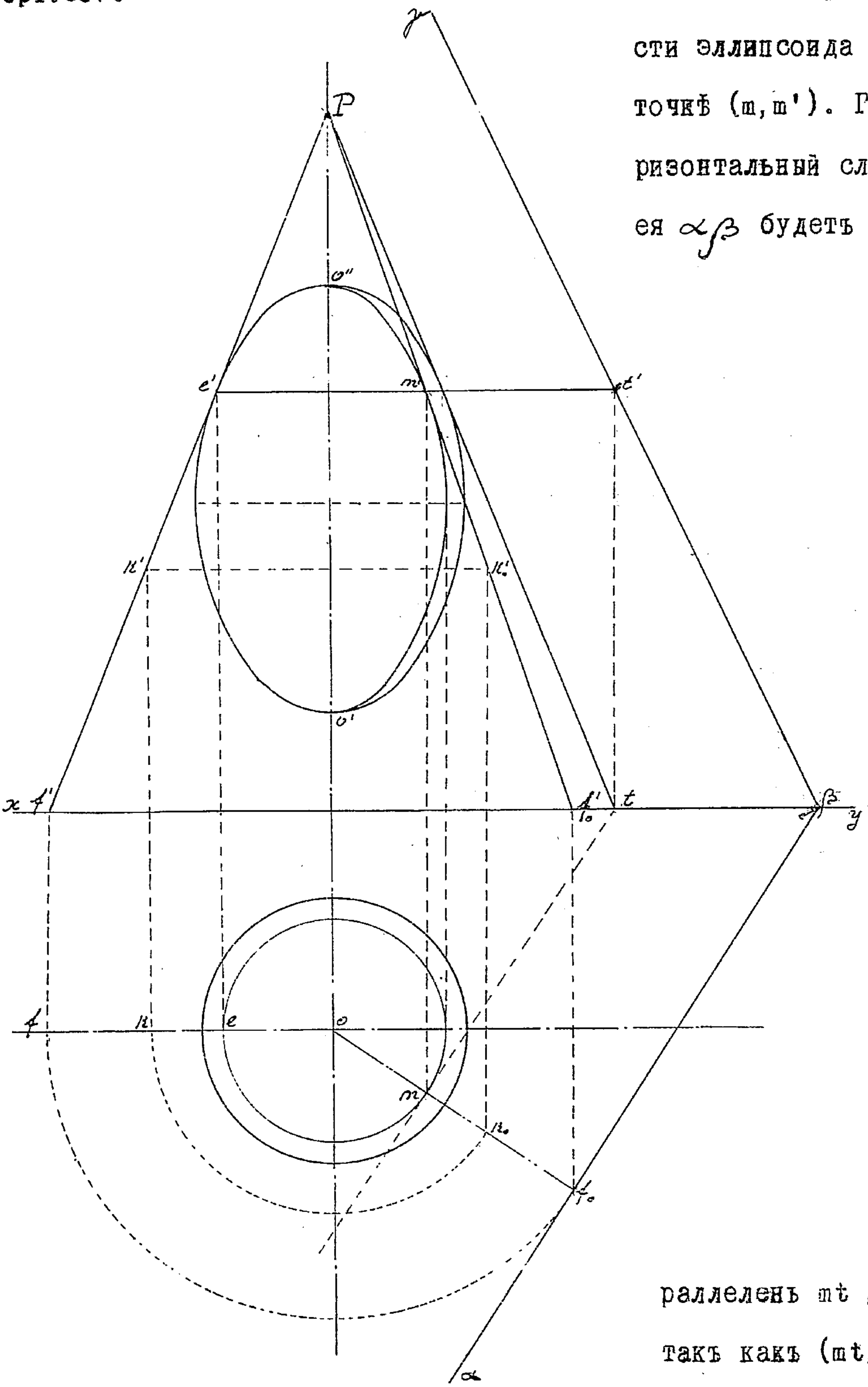
Возьмемъ касательную къ меридіональной кривой въ точкѣ А и положимъ, что она пересѣкаетъ ось вращенія въ точкѣ D; соединяемъ А съ центромъ с параллели; тогда Ас будетъ перпендикулярна къ оси Dc. Вообразимъ, что треугольникъ AcD вращается около стороны cD; тогда AD будетъ описывать поверхность конуса и A будетъ переходить последовательно въ M, M', A' и т.д. Конусъ будетъ касаться поверхности вращенія по параллели AA'; различныя его образующія будутъ касаться поверхности въ точкахъ A, A', M, M'.... и будутъ проходить черезъ точку D.

Этимъ свойствомъ пользуются при проведеніи касательной плоскости къ поверхности вращенія.

З А Д А Ч А. Построимъ касательную плоскость въ какой-нибудь точкѣ эллипсоида (черт.307).

Для этого проводимъ на данномъ эллипсоидѣ параллель, на которой находится данная точка (m, m'), и къ ней касательную $(mt, m't')$, а также и касательную къ меридіану, проходящему черезъ точку (m, m'). Касательную къ меридіану строятъ на основаніи доказаннаго свойства, что всѣ касательныя къ меридіональнымъ кривымъ, въ точкахъ одной параллели, пересѣкаются съ осью поверхности въ этой точкѣ. Поэтому, если построимъ касательную $(ef, e'f')$ въ точкѣ (e, e'), лежащей на одной параллели съ точкой (m, m'), къ главному меридіональному сѣченію, то, продолживши ее до пересѣченія съ осью $(o, o'o'')$ въ точкѣ P и соединивъ последнюю съ m', получимъ вертикальную проекцію $m'P$ искомой касательной, горизонтальная же будетъ $f_o o$. Плоскость, проходящая черезъ $(mt, m't')$ и (om, Pm'), будетъ искомой касательной плоско-

Черт. 307.

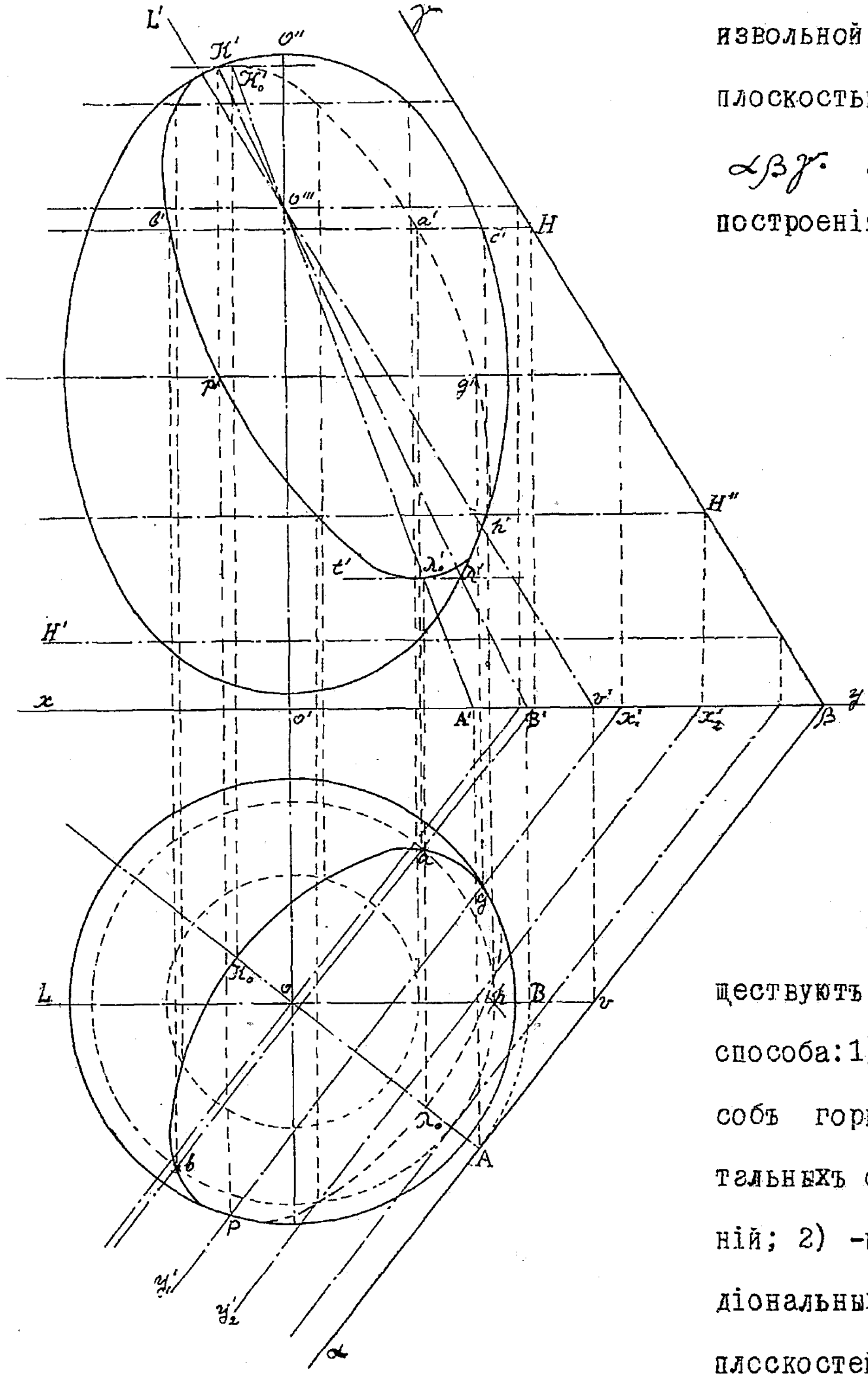


стью по поверхности эллипсоида въ точкѣ (m, m'). Горизонтальный слѣдъ ея $\alpha\beta$ будетъ параллеленъ mt, такъ какъ $(mt, m't')$, будучи параллельно горизонтальной плоскости, служитъ горизонталью искомой плоскости. При выполненіи построенія могутъ встрѣтиться затрудненія: 1) Точка P можетъ не помѣститься въ предѣлахъ чертежа. Въ этомъ случаѣ строимъ горизонтальный слѣдъ (f, f') касательной (ef, e'f'); затѣмъ вращаемъ главное меридіональное сѣченіе до совпаденія его съ меридіаномъ точки (m, m'); при вращеніи точка f будетъ перемѣщаться по окружности радіуса of и, описавъ дугу ff_o, совпадетъ съ f_o; вертикальная ея проекція останется на оси и будетъ f'_o. Точка (f_o, f'_o) будетъ горизонтальнымъ слѣдомъ касательной въ точкѣ (m, m') къ меридіональной кривой. Соединивъ f'_o съ m', получимъ проекціи (mf_o, $m'f'_o$) касательной къ меридіану; слѣды плоскости будутъ $\alpha\beta\gamma$. 2) Если точка (f, f') въ предѣлахъ чертежа не помѣщается, то на касательной къ главному меридіональному сѣченію въ точкѣ (e, e') берутъ точку (k, k') и главный меридіанъ вращеніемъ около оси приводятъ въ совмѣщеніе съ меридіаномъ данной точки (m, m'); при этомъ вращеніи точка (k, k') будетъ перемѣщаться по окружности, и когда главный меридіанъ совпадетъ съ меридіаномъ точки (m, m'), то точка (k, k') принимаетъ положеніе (k_o, k'_o). Соединивъ k'_o съ m', получимъ искомую вертикальную проекцію касательной къ меридіональной кривой въ точкѣ (m, m').

ПЕРЕСѢЧЕНІЕ ПЛОСКОСТЬЮ ЭЛЛИПСОИДА ВРАЩЕНІЯ.

Возьмемъ эллипсоидъ вращенія (черт. 308) и построимъ

Черт.308.



кривую сѣченія его произвольной плоскостью $\alpha\beta\gamma$. Для построенія существуютъ три способа: 1) способъ горизонтальныхъ сѣченій; 2) -меридіональныхъ плоскостей; 3) - цилиндрическихъ поверхностей.

Первый способъ состоитъ въ томъ, что данную поверхность и плоскость пересѣкаютъ рядомъ вспомогательныхъ горизонтальныхъ плоскостей и замѣчаютъ точки встрѣчи линій пересѣченія. Эти точки будутъ искомыми.

Второй способъ состоитъ въ томъ, что опредѣляютъ сѣченіе меридіональныхъ плоскостей съ данными поверхностью и плоскостью. Точки встрѣчи линій сѣченія суть искомыя точки.

Третій способъ заключается въ томъ, что строятъ рядъ цилиндрическихъ поверхностей, направляющими которыхъ служатъ различныя параллели данной поверхности, а образующія параллельны какому-нибудь слѣду сѣкущей плоскости. Цилиндры пересѣкаются данною плоскостью по образующимъ, и точки встрѣчи этихъ образующихъ съ направляющею параллелью -искомыя.

Разсмотримъ только способъ горизонтальныхъ сѣченій.

Проводимъ какую-нибудь горизонтальную плоскость (пусть вертикальный слѣдъ ея - a'B). Въ сѣченіи ея съ поверхностью вращенія получается кругъ, который проектируется на горизонтальную плоскость въ натуральную величину, а въ сѣченіи съ плоскостью $\alpha\beta\gamma$ - горизонталь послѣдней. Пересѣченіе этой горизонтали и круга даетъ двѣ точки (a,a') и (b,b') искомой кривой сѣченія. На горизонтальной плоскости обѣ точки будутъ видимы, а на вертикальной - только b', такъ какъ точка (a,a') закрывается частью эллипсоида.

Такимъ же способомъ опредѣляются и другія точки, принадлежащія сѣченію тѣла вращенія плоскостью. Полученныя точки соединяютъ непрерывной линіей. Если бы прямая ab не пересѣклась съ кругомъ, то это показало бы, что во взятой горизонтальной плоскости нѣтъ ни одной точки, принадлежащей сѣченію (напр., плоскость H', черт.308). Вспомогательныя плоскости выгодно располагать симметрично относительно плоскости экватора (H и H", черт.308), т.к. тогда горизонтальныя проекціи параллелей совпадаютъ.

При опредѣленіи точекъ кривой выгодно соблюдать слѣдующій порядокъ: 1) опредѣлить точки на плоскости главнаго меридіана, 2) - точки на экваторѣ, 3) - высшую и низшую точки кривой и, наконецъ, промежуточныя.

Построимъ точки, лежащія на главномъ меридіональномъ сѣченіи. Для этого продолжимъ плоскость этого меридіана до встрѣчи съ данной плоскостью и построимъ линію сѣченія (вертикаль) (Lv, L'v'). Точки встрѣчи этой линіи съ эллипсомъ главнаго меридіональнаго сѣченія будутъ искомыми точками (одна - h,h', другая на верхней части эллипсоида и на черт.308 не обозначена). Этими точками вертикальная проекція дѣлится на двѣ части: видимую и невидимую (невидимая - h'g'a').

Строимъ точки кривой на экваторѣ. Для этого продолжаемъ его плоскость до пересѣченія съ данной плоскостью. Линія пересѣченія этихъ плоскостей есть прямая, горизонтальная проекція $x_1'y_1'$ которой параллельна $\alpha\beta$; прямая эта встрѣчаетъ экваторъ въ точкахъ (g,g') и (p,p') кривой сѣченія. Точками g и p горизонтальная проекція кривой сѣченія раздѣляется на части - видимую и невидимую.

Для построенія высшей и низшей точекъ кривой сѣченія проводимъ черезъ ось поверхности вращенія плоскость оА, перпендикулярную къ $\alpha\beta$. Строимъ сѣченіе этой плоскости съ данной; для этого замѣчаемъ точки пересѣченія слѣдовъ плоскостей; на нашемъ чертежѣ вертикальный слѣдъ линіи сѣченія не помѣщается въ предѣлахъ чертежа. Поэтому для построенія вертикальной проекціи линіи сѣченія находимъ точку встрѣчи данной плоскости $\alpha\beta\gamma$ съ осью (o, o'o"), т.е. точку (o, o"'). Если o"' соединимъ съ A', то и получимъ вертикальную проекцію линіи сѣченія плоскости $\alpha\beta\gamma$ съ вспомогательною плоскостью, проходящею черезъ ось эллипсоида. Остается построить сѣченіе этой меридіональной плоскости съ поверхностью и замѣтить точки встрѣчи этой кривой съ линіей (oA, o"'A'). Для этого меридіанъ oA вращаемъ около оси поверхности до совпаденія съ главнымъ меридіаномъ. При этомъ вращеніи точка A опишетъ дугу AB; точка A' придетъ въ B'; (o,o"'), какъ точка, лежащая на оси вращенія, положенія своего не измѣнитъ. Прямая(oB, o"'B') пересѣкаетъ главное меридіональное сѣченіе въ точкахъ, вертикальныя проекціи которыхъ суть λ' и K'. Если плоскость разсматриваемаго меридіана приведемъ въ прежнее положеніе, то эти точки, перемѣстившись по параллелямъ поверхности, примутъ положеніе (λ_o, λ_o') и (K_o, K_o'). Докажемъ, что точки (λ_o, λ_o') и (K_o, K_o') будутъ низшей и высшей точками кривой сѣченія; для этого докажемъ, что касательныя къ кривой сѣченія въ этихъ точкахъ будутъ параллельны $\alpha\beta$. Построимъ эти касательныя. Онѣ выразятся линіями сѣченія плоскости $\alpha\beta\gamma$ и касательныхъ плоскостей къ поверхности въ разсматриваемыхъ точкахъ. Касательная плоскость къ поверхности вращенія перпендикулярна къ плоскости того меридіана, на которомъ находится точка касанія; поэтому касательныя плоскости въ точкахъ (λ_o, λ_o') и (K_o, K_o') будутъ перпендикулярны къ меридіану оА. Къ этой же плоскости перпендикулярна и сѣкущая плоскость $\alpha\beta\gamma$; поэтому линія пересѣченія касательной плоскости съ плоскостью $\alpha\beta\gamma$, т.е. касательная къ кривой сѣченія будетъ перпендикулярна къ плоскости сѣченія оА. Вертикальныя проекціи касательныхъ (напр. $\lambda_o't'$) будутъ параллельны оси ху (такъ какъ плоскость оА - проектирующая и ея вертикальный слѣдъ перпендикуляренъ къ оси). Между этими параллелями будетъ заключаться вертикальная проекція линіи сѣченія. Такъ какъ черезъ ось (о, о'о''') можно провести только одну плоскость оА, перпендикулярную къ $\alpha\beta\gamma$, то въ послѣдней плоскости будутъ существовать только найденныя точки (λ_o, λ_o') и (K_o, K_o'), касательная линія въ которыхъ будетъ обладать указаннымъ свойствомъ, а слѣдовательно точка (λ_o, λ_o') будетъ низшей, а (K_o, K_o') - высшей точкой кривой сѣченія.

Построеніе кривой полезно начинать построеніемъ такихъ точекъ, потому что слѣды вспомогательныхъ плоскостей будутъ заключаться между λ_o' и K_o' и намъ не придется провести ни одной плоскости, не заключающей въ себѣ точекъ, принадлежащихъ кривой сѣченія.

Для опредѣленія натуральной величины сѣченія нужно плоскость $\alpha\beta\gamma$ совмѣстить съ одной изъ плоскостей проекцій и построить совмѣщеніе кривой сѣченія.

Линія (oA, o''A') служитъ осью кривой сѣченія.

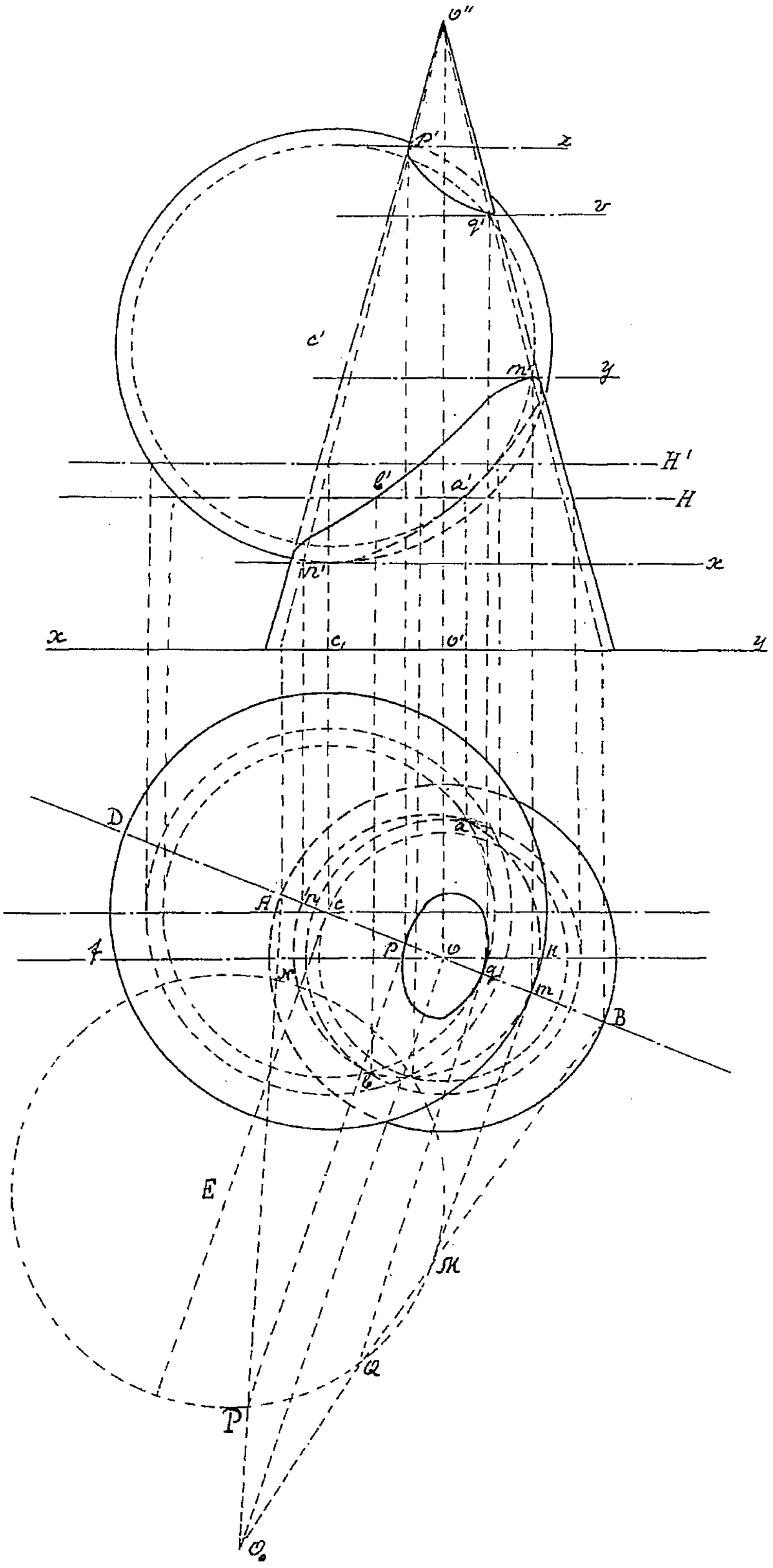
ПЕРЕСѢЧЕНІЕ ШАРА СЪ КОНУСОМЪ.

Разсмотримъ случай пересѣченія поверхностей вращенія, когда оси параллельны между собой и перпендикулярны къ горизонтальной плоскости (черт.309). Пусть требуется построить сѣченіе шара съ конусомъ. Шаръ и конусъ пересѣкаются по кривой двойной кривизны. Чтобы получить точки кривой сѣченія, пересѣкаемъ обѣ поверхности плоскостями, перпендикулярными къ осямъ данныхъ поверхностей. Въ нашемъ случаѣ такими плоскостями будутъ плоскости, параллельныя горизонтальной плоскости проекцій.

Пусть слѣдъ одной изъ вспомогательныхъ плоскостей есть H. Найдемъ сѣченія ея съ каждой изъ данныхъ поверхностей. Кривыя сѣченія суть окружности, а точки встрѣчи ихъ - точки искомой кривой (такія точки на нашемъ чертежѣ - (a,a') и (b,b'). Проведя другую вспомогательную плоскость, получимъ еще двѣ точки и т.д.

Можетъ случиться, что окружности, полученныя въ сѣченіи, не пересѣкаются между собою; это покажетъ, что въ этой плоскости точекъ, принадлежащихъ кривой сѣченія, не

Черт.309.



существуетъ. Чтобы избѣжать проведенія такихъ лишнихъ плоскостей, нужно построить высшую и низшую точки кривой. Для этого проведемъ плоскость, проходящую черезъ оси данныхъ поверхностей; горизонтальный слѣдъ ея DB пройдетъ черезъ точки c и o. Эта плоскость пересѣчетъ конусъ по треугольнику, основаніемъ котораго будетъ линія AB, а шаръ - по кругу радіуса cD. Точки встрѣчи образующихъ конуса, лежащихъ въ сѣченіи AB, съ этимъ кругомъ будутъ искомыми. Чтобы найти ихъ, совмѣстимъ плоскость, проходящую черезъ оси, съ горизонтальною и построимъ совмѣщенныя положенія круга сѣченія и образующихъ конуса. Совмѣщенное положеніе точки (c, c') есть E; совмѣщенное положеніе круга сѣченія шара - PQMN; совмѣщенное положеніе вершины конуса - O_o; образующихъ конуса - AO_o и BO_o.

Точки P, M, N и Q встрѣчи образующихъ конуса съ кругомъ сѣченія шара плоскостью BD будутъ совмѣщенными положеніями точекъ искомой кривой. По совмѣщенному положенію мы можемъ найти ихъ проекціи (m, m'), (n, n'), (p, p') и (q, q'). Такъ какъ образующія конуса пересѣкаются съ кругомъ сѣченія шара плоскостью BD, то въ сѣченіи получатся кривыя входа и выхода. Въ кривой входа точка (m, m') будетъ высшей, а точка (n, n') - низшей, а въ кривой выхода точка (p, p') - высшей и (q, q') - низшей, потому что касательныя къ кривымъ сѣченія въ точкахъ (m, m'), (n, n'), (p, p') и (q, q') будутъ параллельны горизонтальной плоскости. Дѣйствительно, чтобы провести касательную къ кривой, напр. въ точкѣ (n, n'), мы должны провести въ этой точкѣ касательныя плоскости къ нашимъ поверхностямъ. Линія ихъ пересѣченія и будетъ касательною къ кривой сѣченія въ разсматриваемой точкѣ. Но каждая изъ касательныхъ плоскостей перпендикулярна къ плоскости того меридіана, на которомъ находится точка (n,n'); поэтому линія ихъ пересѣченія будетъ перпендикулярна къ общей меридіональной плоскости BD шара и конуса. Такъ какъ плоскость эта перпендикулярна къ горизонтальной плоскости, то линія сѣченія касательныхъ плоскостей, т.е. касательная къ кривой сѣченія въ точкѣ (n,n') будетъ параллельна горизонтальной плоскости проекціи. Такимъ образомъ, если черезъ m', n', p' и q' проведемъ параллели оси xy, то получимъ вертикальныя проекціи касательныхъ линій къ кривой сѣченія въ ея высшихъ и низшихъ точкахъ, а потому вертикальная проекція кривой входа должна заключаться между параллелями n'x и m'y, а кривой выхода - между p'z и q'v. Горизонтальныя проекціи касательныхъ въ точкахъ (m,m'), (n,n'), (p,p')и (q,q') перпендикулярны къ BD.

Для полученія промежуточныхъ точекъ кривой сѣченія слѣдуетъ проводить вспомогательныя плоскости такъ, чтобы вертикальные слѣды ихъ заключались между n'x и m'y или между p'z и q'v.

Для построенія точекъ, лежащихъ на очеркахъ коническойповерхности, продолжаемъ главное меридіональное сѣченіе конуса до встрѣчи съ поверхностью шара. Эта плоскость пересѣчетъ шаръ по окружности, діаметръ которой равенъ fk, а конусъ - по образующимъ, проекціи которыхъ на вертикальной плоскости составляютъ очеркъ конической поверхности. Вертикальная проекція круга сѣченія плоскости of съ шаромъ будетъ получена, если изъ точки c' радіусомъ $\frac{fk}{2}$ опишемъ окружность; точки встрѣчи ея съ образующими конуса будутъ точками искомой кривой.

На горизонтальной проекціи кривыя входа и выхода будутъ невидимы, такъ какъ лежатъ ниже плоскости экватора шара.

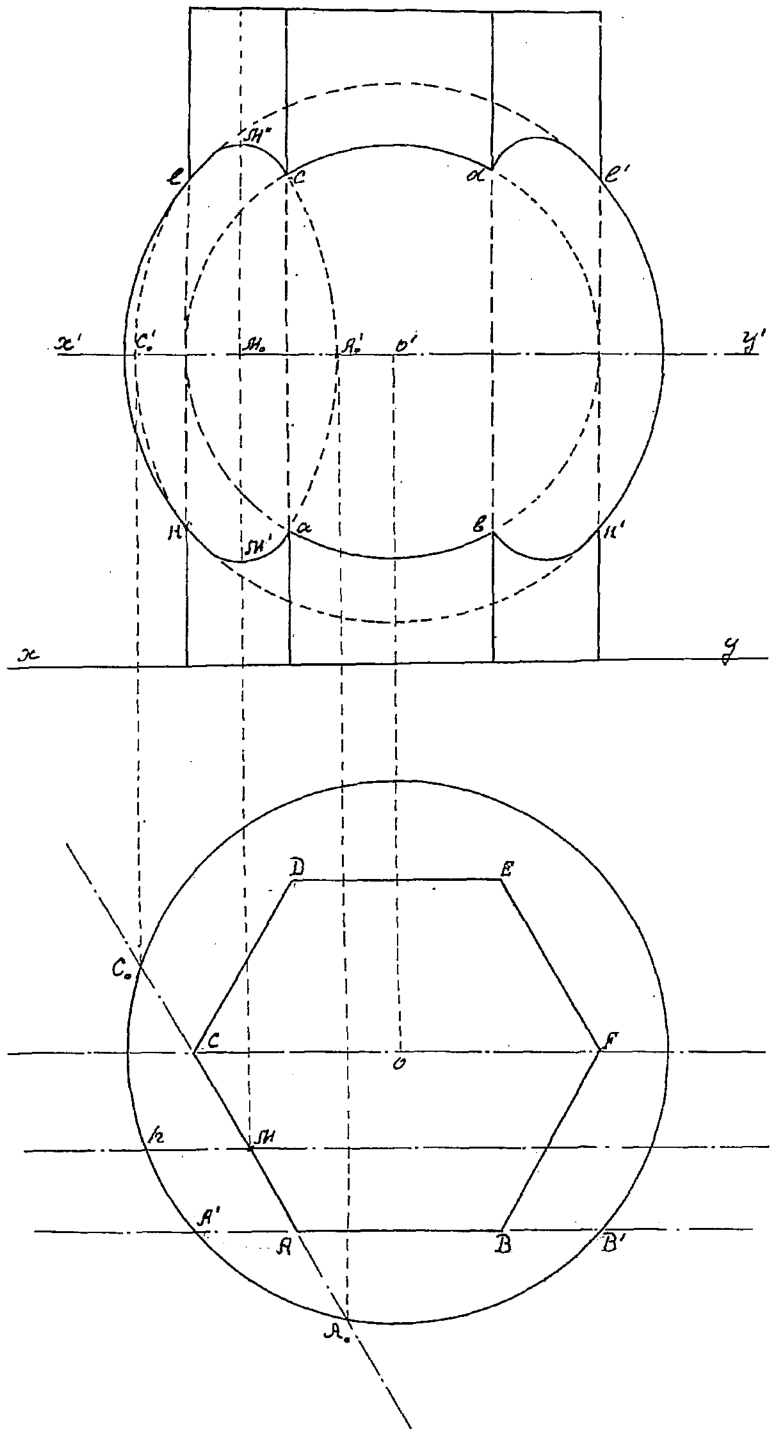
Конусъ и шаръ могутъ дать въ пересѣченіи и кривую вдавливанія. Это произошло бы въ томъ случаѣ, если бы только одна изъ прямыхъ AO_a и BO_o не пересѣкалась съ окружностью MNPQ.

ПЕРЕСѢЧЕНІЕ ПРИЗМЫ СЪ ШАРОМЪ.

При построеніи линіи сѣченія поверхности вращенія съ многогранниками строятъ сѣченія каждой грани отдѣльно. При этомъ сначала строятъ точки, лежащія на ребрахъ многогранника, а затѣмъ промежуточныя точки (точки, лежащія на граняхъ).

Возьмемъ правильную шестигранную призму, ось которой проходитъ черезъ центръ шара (черт.310), и построимъ сначала сѣченіе шара той гранью, горизонтальный слѣдъ которой - AE. Эта грань, какъ видно по чертежу, параллельна вертикальной плоскости проекцій, слѣдовательно кругъ, по которому она пересѣчетъ шаръ, проектируется на вертикальную пло-

Черт.310.



скость въ истинную величину, діаметръ этого круга = = A'B'; точки a,b,c и d принадлежатъ вертикальной проекціи этого круга. Въ точкахъ a и b ребра призмы входятъ въ шаръ, - въ точкахъ c и d - выходятъ изъ шара.

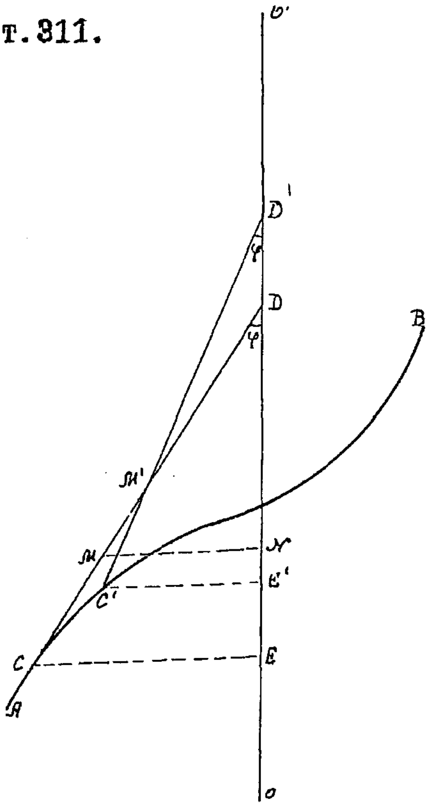
Слѣдующая грань, горизонтальный слѣдъ которой есть AC, пересѣкаетъ шаръ по кругу, діаметръ котораго - A_0C_0.

Это грань наклонена къ вертикальной плоскости, а потому проекція круга сѣченія будетъ эллипсъ. Построимъ оси этого эллипса; для этого построимъ въ кругѣ сѣченія діаметръ, проектирующійся на вертикальную плоскость въ истинную величину (параллельно вертикальной плоскости). Горизонтальной проекціей этого діаметра будетъ служить точка М (середина АС). Центромъ круга будетъ точка (M, M_o), лежащая въ плоскости экватора. Откладываемъ $M_oM' = M_oM'' = \frac{A_oC_o}{2}$ Линія М'М" будетъ большою осью эллипса. Малой осью эллипса будетъ служить діаметръ, параллельный горизонтальной плоскости. Вертикальная проекція его $A_o'C_o'$ параллел. ху строится по горизонтальной проекціи A_oC_o. По осямъ М'М" и $A_o'C_o'$ строимъ эллипсъ, часть котораго между ℓ и с (или между k и а) принадлежитъ кривой сѣченія. При этомъ очень важно построить точки, лежащія на ребрахъ, выходящихъ изъ точекъ С и F. Для отысканія этихъ точекъ проводимъ черезъ ребра С и F плоскость, которая пересѣкаетъ шаръ по большому кругу. Такъ какъ плоскость эта параллельна вертикальной плоскости, то этотъ большой кругъ будетъ служить очеркомъ шаровой поверхности. Поэтому точки ℓ, k, ℓ' и k' будутъ принадлежать кривой сѣченія. Такимъ же образомъ строится сѣченіе шара съ гранью, горизонтальный слѣдъ которой - BF Остальныя грани, пересѣкая шаръ, дадутъ кривыя, которыя на вертикальной плоскости будутъ совпадать съ уже построенными кривыми.

ВИНТОВАЯ ПОВЕРХНОСТЬ.

Винтовая поверхность происходитъ отъ движенія прямой по двумъ направляющимъ: одной направляющей служитъ винтовая линія, взятая на поверхности кругового цилиндра, а другой - ось цилиндра, при чемъ уголъ, составляемый движущейся прямой съ осью цилиндра, сохраняетъ свою величину. Движущаяся прямая называется образующей винтовой поверхности; уголъ, составляемый образующей съ осью цилиндра, можетъ быть прямымъ, тупымъ и острымъ. Иногда вмѣсто цилиндрической винтовой линіи берется коническая. Винтовая поверхность, получающаяся при этомъ, называется винтовой поверхностью второго рода.

Черт. 311.

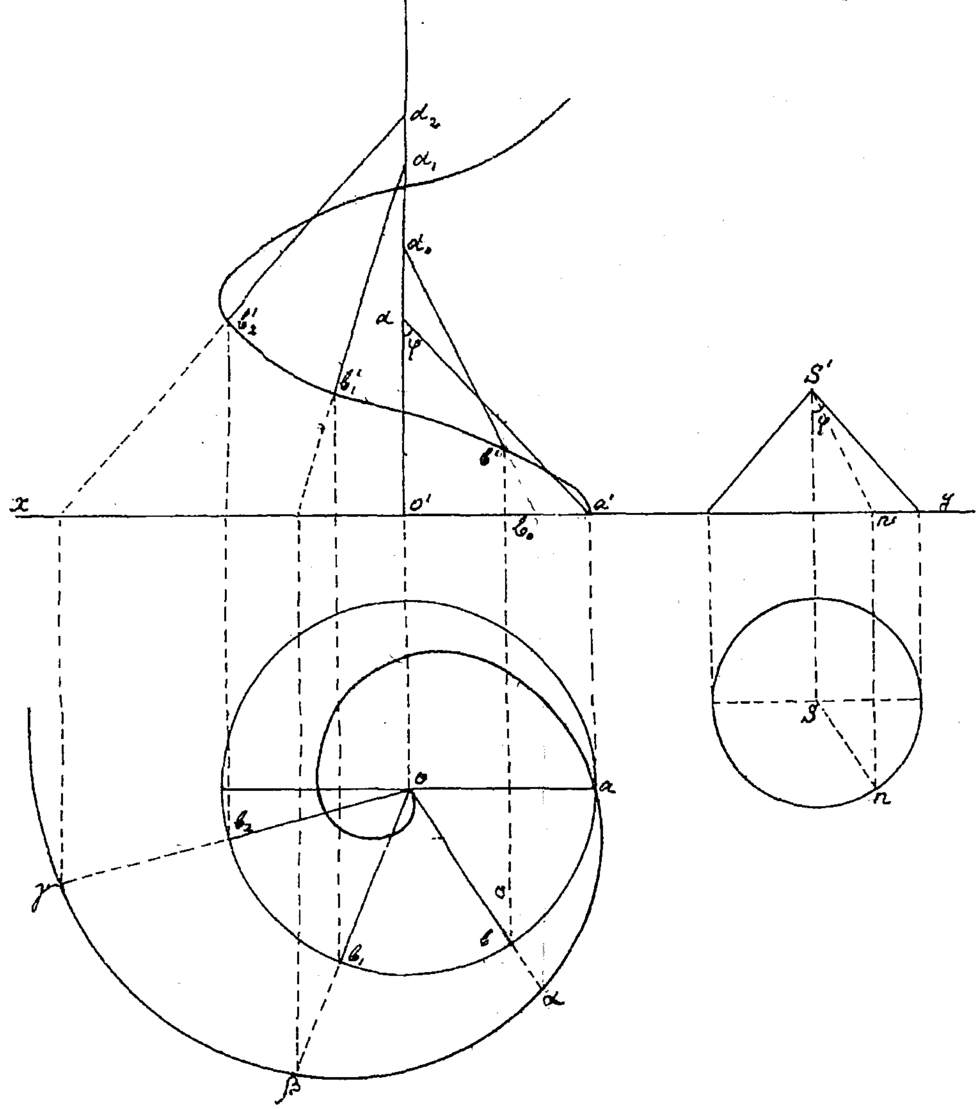


Пусть oo' (черт. 311) - ось цилиндра; кривая AB - винтовая линія и CD - образующая. Уголъ CDo $= \varphi$ при движеніи образующей сохраняетъ свою величину. Если изъ точки C опустимъ перпендикуляръ на oo', то CE выразитъ радіусъ цилиндра. Особенность движенія состоитъ въ томъ, что точки встрѣчи образующей съ направляющими поднимаются на одну и ту же высоту. Такимъ образомъ, когда CD изъ занимаемаго положенія перемѣстится въ C'D', то точка C поднимется на высоту EE', а D - на высоту DD'. Линія EE' = DD'. Для доказательства разсмотримъ прямоугольные треугольники CDE и C'D'E'; они равны, такъ какъ CE = C'E' какъ радіусы цилиндра, - уголъ CDE - C'D'E' = φ. Поэтому DE = D'E', а слѣдовательно DC' = EE'. Этимъ свойствомъ прямолинейной образующей пользуются при построеніи проекцій винтовой поверхности. Это же свойство движенія прямолинейной образующей даетъ возможность доказать, что всякая точка M образующей при движеніи ея описываетъ винтовую линію одного хода съ направляющей, лежащую на поверхности цилиндра, радіусъ котораго равенъ разстоянію MN разсматриваемой точки отъ оси, Дѣиствительно, пусть точка C, совершивъ $^1/_n$ долю оборота по цилиндру, поднимается на $^1/_n$ шага. Точка M также будетъ двигаться по поверхности цилиндра (ибо ея разстояніе MN отъ оси oo' есть величина постоянная, равная MD.Sin φ), также сдѣлаетъ $^1/_n$ долю оборота и перемѣстится вдоль оси на столько же, на сколько C, т.е. на $^1/_n$ шага направляющей винтовой линіи.

Названіе винтовой поверхности зависитъ отъ угла, дѣлаемаго образующей съ осью цилиндра. Если уголъ EDC - прямой, то поверхность называется прямоугольнаго образованія и встрѣчается при черченіи винтовъ съ квадратной или прямоугольной нарѣзкой. Въ такой поверхности всѣ образующія параллельны горизонтальной плоскости. Эта плоскость называется направляющею плоскостью винтовой поверхности. Если уголъ, образуемый прямою съ осью цилиндра - острый или тупой, то поверхность называется поверхностью треугольнаго образованія и встрѣчается при черченіи винтовъ съ треугольной нарѣзкою; очевидно, что въ этой поверхности всѣ прямолинейныя образующія параллельны образующимъ прямого конуса, ось котораго составляетъ съ образующими уголъ φ. Этотъ конусъ называется направляющимъ конусомъ винтовой поверхности треугольнаго образованія.

Построимъ проекціи этой винтовой поверхности (черт. 312-ый). Возьмемъ цилиндрическую винтовую линію, ось которой перпендикулярна къ горизонтальной плоскости. Положимъ, что образующая начинаетъ движеніе отъ точки (a, a'). Въ этомъ положеніи уголъ, который образующая дѣлаетъ съ осью, на вертикальную плоскость проектируется въ истинную величину; поэтому для построенія положенія образующей, соотвѣтствующей точкѣ (a, a'), проводимъ черезъ a' прямую $a'd$, наклоненную къ оси цилиндра подъ угломъ φ; горизонтальная проекція образующей - ao. Положимъ, что образующая перемѣстится такъ, что точка (a, a') займетъ положеніе (b, b'). При этомъ движеніи точка эта поднялась на высоту $b'b_o$; точка d займетъ положеніе d_o, при чемъ $dd_o = b'b_o$. Соединивъ b' съ d_o, получимъ положеніе образующей для точки (b, b'). Чтобы получить слѣдующія положенія образующей, отложимъ на оси $o'o''$ равныя части $d_o d_1 = d_1 d_2 = d_2 d_3 \ldots$, а отъ точки a на горизонтальной плоскости отложимъ $\smile ab$ нѣсколько разъ по

Черт. 312.



окружности радiуса оа, такъ что $\smile ab = \smile bb_1 = \smile b_1 b_2 = \dots$ Соединяя точки b_1, b_2, $b_3 \dots$ съ о, получимъ горизонтальныя проекцiи образующихъ винтовой поверхности; проектируя точки b_1, b_2, $b_3 \dots$ на вертикальную плоскость и соединяя b_1', b_2', $b_3' \dots$ съ соотвѣтствующими точками на оси $o'o''$, получимъ вертикальныя проекцiи образующихъ.

Если построимъ направляющiй конусъ, то вертикальныя проекцiи образующихъ поверхности можно строить при помощи этого конуса. Для этого черезъ S проводимъ образующую конуса Sn параллел. oъ (горизонтальной проекціи образующей винтовой поверхности), а черезъ ъ' проводимъ $b'd_o$ параллельно S'n' - вертикальной проекціи образующей конуса; $b'd_o$ и будетъ вертикальной проекціей прямолинейной образующей винтовой поверхности.

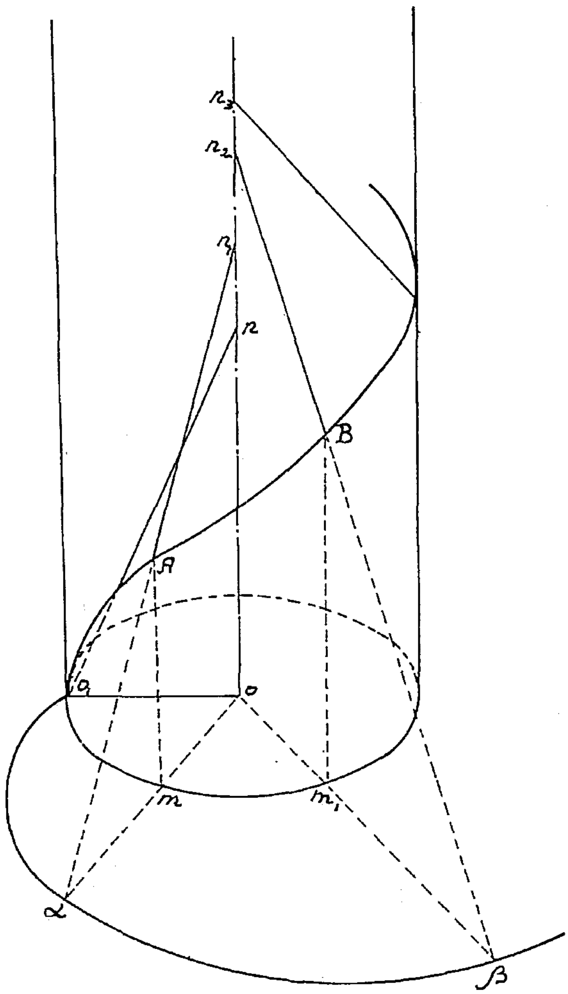
Если построимъ слѣды α, β, γ.... различныхъ образующихъ, то они будутъ принадлежать слѣду поверхности. Продолживши винтовую линію подъ плоскость основанія цилиндра и перемѣщая по ней образующую, найдемъ, что точка d (черт.312) будетъ опускаться и слѣдъ образующей будетъ находиться внутри окружности основанія цилиндра; когда точка d совпадетъ съ точкой o, то и слѣдъ поверхности пройдетъ черезъ o. Докажемъ, что кривая, представляющая слѣдъ поверхности, есть спираль Архимеда.

Пусть o,n (черт.312) есть начальное положеніе образующей, а An_1 и Bn_2.... - слѣдующія ея положенія; oo_1, om и om_1 - проекціи образующихъ на плоскость основанія цилиндра, а точки α, β, γ.... - слѣды образующихъ.

Такъ какъ точки o_1, A, B .... лежатъ на винтовой линіи, то $\frac{Am}{Bm_1} = \frac{\smile o_1m}{\smile o_1m_1}$; треугольники $A\alpha m$ и $B\beta m_1$... подобны, такъ какъ они прямоугольны при точкахъ m и m_1, и $\angle\alpha Am = \angle\beta Bm_1 = \angle\varphi$ Изъ подобія ихъ слѣдуетъ: $\frac{Am}{Bm_1} = \frac{\alpha m}{\beta m_1}$; сравнивая эту пропорцію съ предыдущей, находимъ:

$$\frac{\alpha m}{\beta m_1} = \frac{\smile o_1m}{\smile o_1m_1} \text{ или } \frac{\alpha m}{\beta m_1} = \frac{\angle o_1om}{\angle o_1om_1};$$

Черт.313.



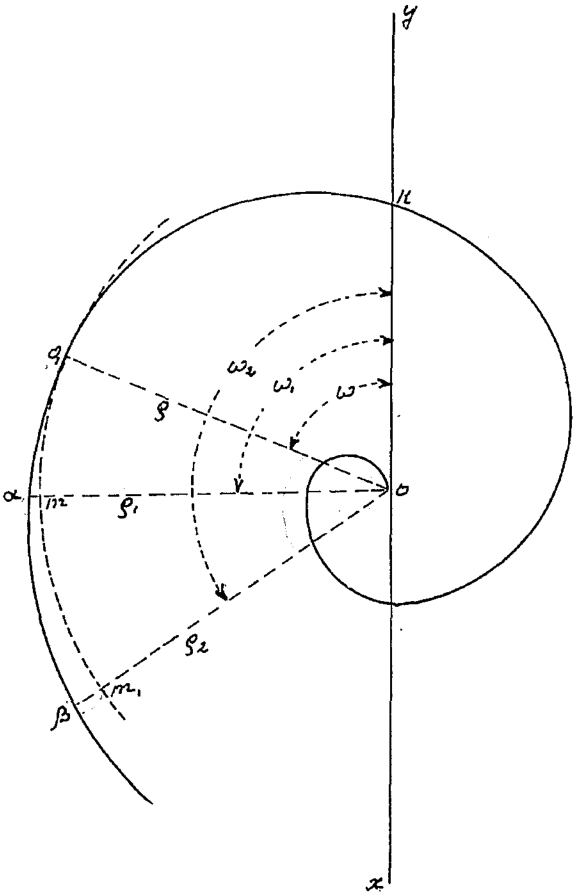
αm представляетъ приращеніе радіуса oo_1 при переходѣ отъ точки o_1 къ α, а βm_1 - приращеніе того же радіуса при переходѣ изъ o_1 въ β. Итакъ, получилась слѣдующая пропорція: приращеніе радіусовъ-векторовъ кривой пропорціонально угламъ, составляемымъ ими съ постоянной прямой oo_1. Докажемъ, что это есть свойство спирали Архимеда.

Пусть кривая $oKo_1\alpha\beta$ ... (черт.314) - спираль Архимеда, а o_1mm_1 .... - окружность, описанная изъ центра o и соотвѣтствующая окружности основанія цилиндра на черт.313. Если xy есть полярная ось спирали, то:

$$\frac{o\alpha}{oo_1} = \frac{\angle \alpha oy + 360^\circ}{\angle o_1oy + 360^\circ} \text{ и } \frac{o\beta}{oo_1} = \frac{\angle \beta oy + 360^\circ}{\angle o_1oy + 360^\circ};$$

точки o_1, α и β принадлежатъ второму обороту Архимедовой спирали; поэтому, если радіусы-векторы точекъ o_1, α и β назовемъ черезъ ρ, ρ_1, ρ_2, то будемъ имѣть: $\frac{\rho_2}{\rho} = \frac{\omega_2 + 360^\circ}{\omega + 360^\circ}$ и $\frac{\rho_1}{\rho} = \frac{\omega_1 + 360^\circ}{\omega + 360^\circ}$, гдѣ $\angle o_1oy = \omega$; $\angle \alpha oy = \omega_1$; и

Черт. 314.



$\angle \beta oy = \omega_2$. Составляемъ производныя пропорціи:

$$\frac{\rho_2-\rho}{\rho} = \frac{\omega_2-\omega}{\omega+360^\circ};$$

$$\frac{\rho_1-\rho}{\rho} = \frac{\omega_1-\omega}{\omega+360^\circ};$$

отсюда слѣдуетъ:

$$\frac{\rho_2-\rho}{\rho_1-\rho} = \frac{\omega_2-\omega}{\omega_1-\omega}$$

но $\rho_2-\rho = m_1\beta$;

$\rho_1-\rho = m\alpha$;

$\omega_2-\omega = \angle m_1oo_1$;

$\omega_1-\omega = \angle moo_1$.

Слѣдовательно, послѣдняя пропорція принимаетъ видъ: $\frac{m_1\beta}{m\alpha} = \frac{\angle m_1oo_1}{\angle m\,oo_1}$, т.е. приращеніе радіусовъ-векторовъ спирали пропорціонально угламъ, которые они составляютъ съ прямой oo'.

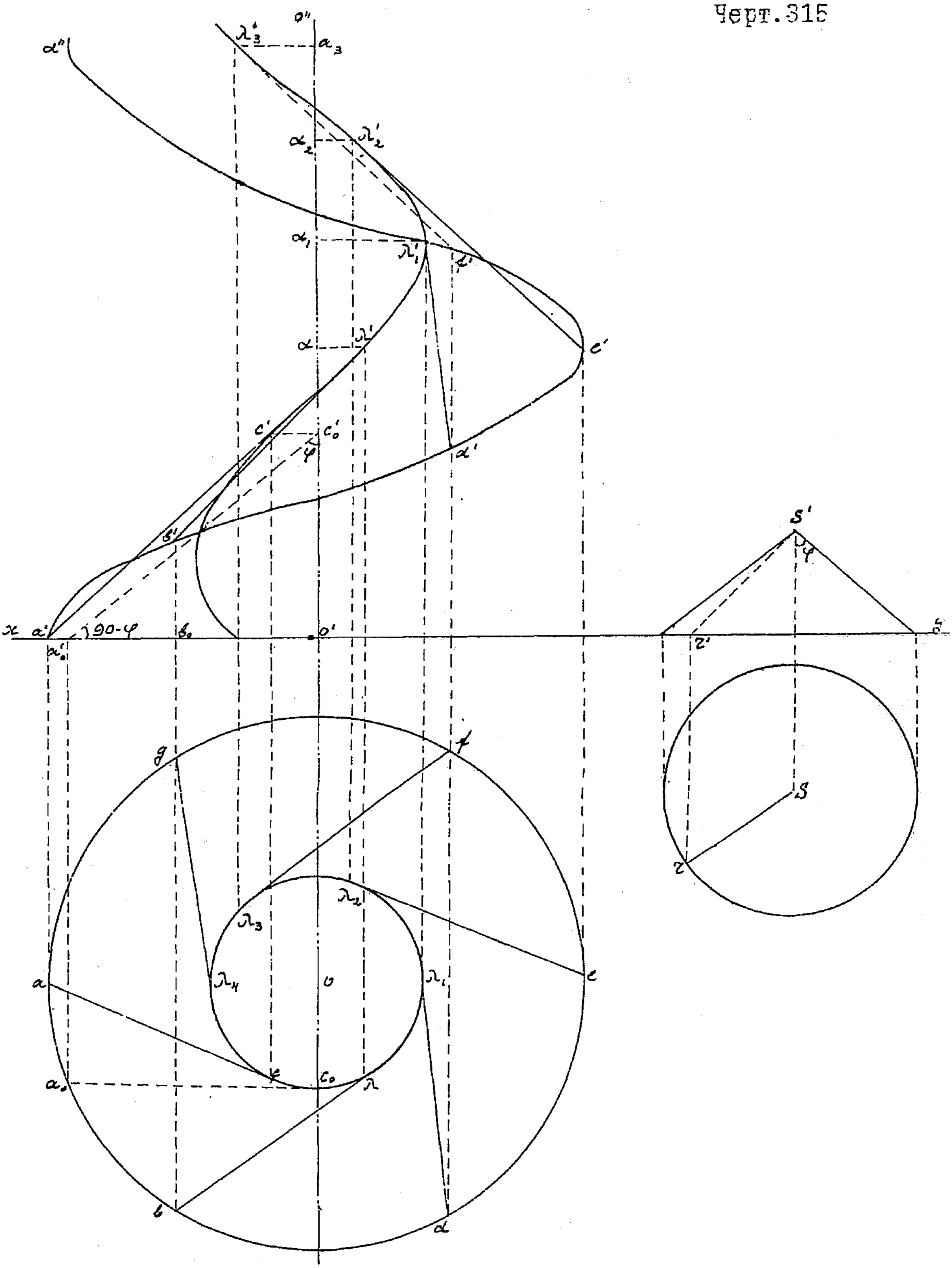
Такъ какъ слѣдъ поверхности обладаетъ этимъ свойствомъ, то онъ есть спираль Архимеда.

С л ѣ д с т в і е. Сѣченіе винтовой поверхности треугольнаго образованія плоскостью, перпендикулярною къ оси, есть спираль Архимеда.

Въ винтовыхъ поверхностяхъ прямоугольнаго образованія или квадратнаго всѣ образующія параллельны горизонтальной плоскости; поэтому проекціи образующихъ такой поверхности располагаются такъ: горизонтальныя - по радiусамъ окружности основанiя, а вертикальныя - параллельно оси.

Иногда разсматриваются винтовыя поверхности съ внутреннимъ цилиндрическимъ пролетомъ. Эти поверхности происходятъ отъ движенiя прямой по винтовой линiи, начерченной на поверхности внѣшняго цилиндра такимъ образомъ, что она составляетъ постоянный уголъ съ образующими этого цилиндра, оставаясь при движенiи касательной къ внутреннему цилиндру. Изъ этого способа образованiя поверхности слѣдуетъ, что: 1) точка касанiя образующей съ поверхностью цилиндра описываетъ винтовую линiю одного хода съ направляющей; 2) образующiя этой поверхности параллельны образующимъ направляющаго конуса, у котораго уголъ при вершинѣ - 2φ. Пусть (черт.315) дана винтовая линiя на поверхности внѣшняго цилиндра. Примолинейная образующая перемѣщается по этой винтовой линiи, оставаясь касательной къ внутреннему цилиндру; поэтому горизонтальныя проекцiи различныхъ ея положенiй будутъ касательными ac, $b\lambda$, $d\lambda_1$ .... къ окружности основанiя внутренняго цилиндра. Найдемъ вертикальную проекцiю образующей, проходящей черезъ точку (a,a'). Построимъ сначала то положенiе, которое она займетъ, будучи повернута около оси (o, o"o') до положенiя, параллельнаго вертикальной плоскости. При такомъ вращенiи точка c придетъ въ c_0, а точка a - въ a_0, такъ что это положенiе образующей будетъ a_0c_0. Въ этомъ случаѣ уголъ φ на вертикальную плоскость проектируется въ истинную величину. Поэтому мы по-

Черт.315



лучимъ вертикальную проекцію образующей, если при точкѣ a_o' построимъ уголъ 90 $-\varphi$.

Если построенную такимъ способомъ образующую ($a_o c_o$, $a_o' c_o'$) вращеніемъ привести въ ея прежнее положеніе, то точка c_o' придетъ въ положеніе c', и образующая приметъ положеніе (ac, $a'c'$). Точка (c, c') будетъ точкою касанія образующей съ поверхностью внутренняго цилиндра.

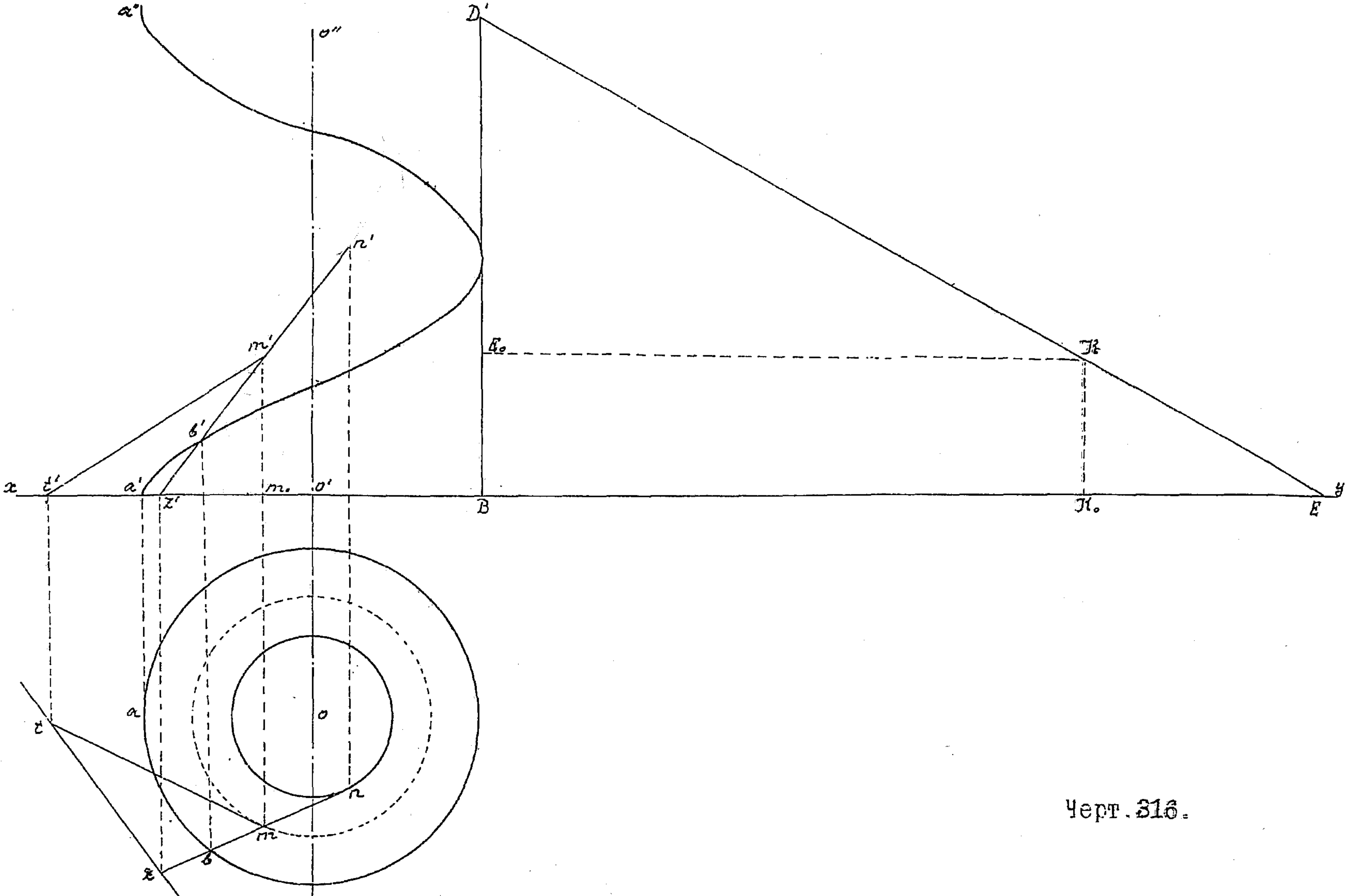
При движеніи прямолинейной образующей точки встрѣчи ея съ направляющими поднимаются на одну и ту же высоту. Этимъ свойствомъ мы воспользуемся для построенія различныхъ образующихъ поверхности. Для этого раздѣлимъ окружность основанія на какое-нибудь (на чертежѣ 315-мъ -на 6) число равныхъ частей и точки a, b, d, e, f и g проектируемъ на вертикальную плоскость. При переходѣ точки (a, a') образующей въ положеніе (b, b'), она поднимется на высоту, равную разстоянію $b_o b'$, точки b' отъ оси; на ту же высоту поднимается точка касанія этой образующей съ поверхностью цилиндра. Поэтому мы откладываемъ отъ точки c_o' части: $c_o' \alpha = \alpha\alpha_1 = \alpha\alpha_2 = \ldots = \ldots = b_o b'$. Изъ точекъ b, d, e, f и g проводимъ касательныя къ внутренней окружности. Точки λ, λ_1, λ_2 ..... будутъ горизонтальными проекціями точекъ касанія образующей къ поверхности внутренняго цилиндра. Вертикальныя проекціи точекъ касанія должны находиться отъ оси xy на разстояніи $o'\alpha$, $o'\alpha_1$, $o'\alpha_2$ ..., поэтому для полученія ихъ мы изъ точекъ α, α_1, α_2 ... проводимъ параллели оси xy до встрѣчи съ перпендикулярами на ось, опущенными изъ точекъ λ, λ_1, λ_2 .... и т.д. Соединивъ точки λ', λ_1', λ_2'... съ точками b', d', e' и т.д, получимъ вертикальныя проекціи образующихъ поверхности, а соединивъ ихъ между собою, - винтовую линію, начерченную на поверхности внутренняго цилиндра.

Вертикальныя проекціи образующихъ винтовой поверхности можно построить при помощи направляющаго конуса. Проведемъ черезъ S прямую Sr, параллельную ъλ, и найдемъ вертикальную проекцію S'r' направляющаго конуса. Послѣдняя должна быть параллельна ъ'λ', и потому мы можемъ построить ъ'λ', проведя изъ ъ' линію, параллельную S'r'.

Если будемъ разсматривать винтовую поверхность прямоугольнаго или квадратнаго образованія съ цилиндрическимъ пролетомъ, то всѣ ея образующія параллельны горизонтальной плоскости и потому построеніе проекцій упрощается. Горизонтальныя проекціи будутъ касаться окружности основанія внутренняго цилиндра, а вертикальныя проекціи, проходя черезъ соотвѣтственныя точки винтовой линіи внѣшняго цилиндра, будутъ параллельны оси xy.

З А Д А Ч А. На данной винтовой поверхности построить точку (черт.316).

Пусть дана винтовая поверхность треугольнаго образованія съ внутреннимъ цилиндрическимъ пролетомъ. Чтобы построить точку, мы на горизонтальной проекціи данной поверхности беремъ произвольную точку m и проводимъ черезъ нее



Черт. 316.

касательную къ внутренней окружности.

Пусть касательная эта есть bn; тогда эту линію можно разсматривать какъ горизонтальную проекцію одной изъ образующихъ. Строимъ ея вертикальную проекцію b'n' и на ней находимъ вертикальную проекцію m'.

ЗАДАЧА. Въ данной точкѣ (m,m') винтовой поверхности провести къ ней касательную плоскость (черт.316).

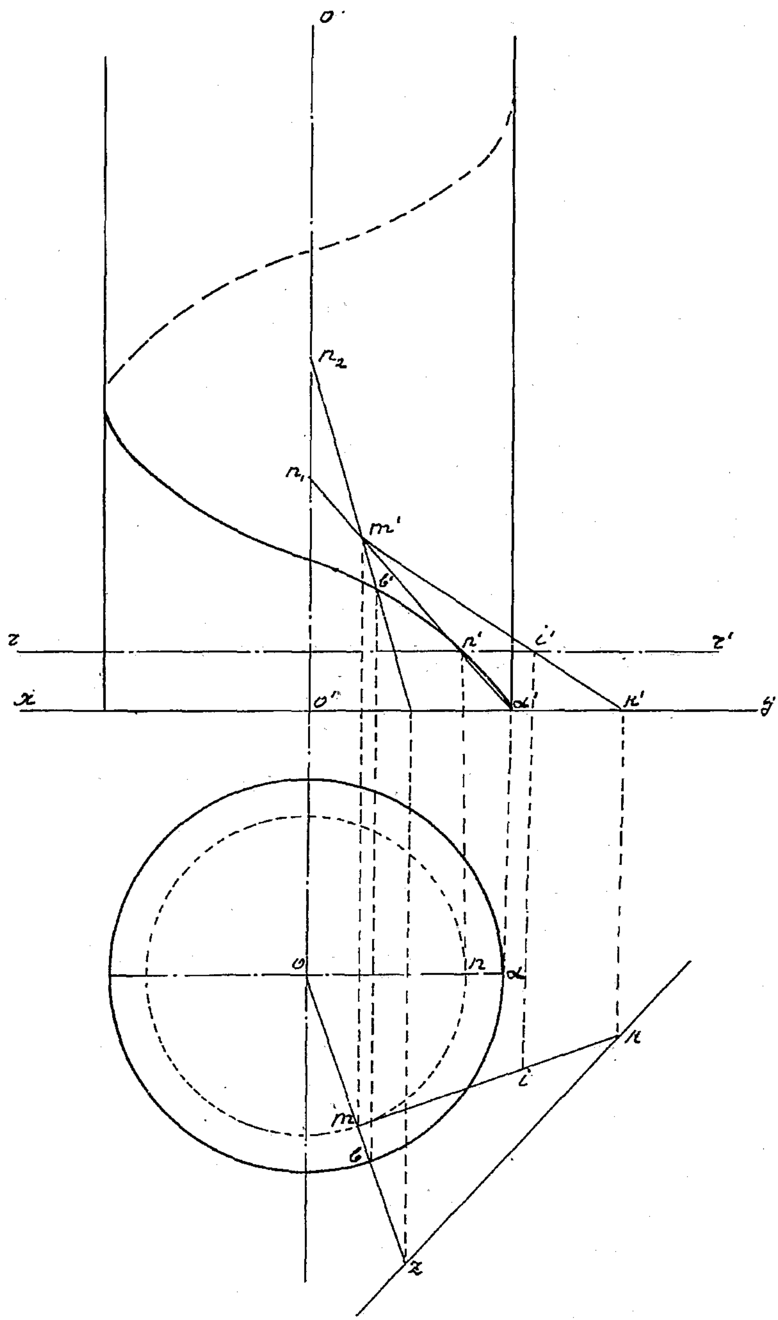
Для этого замѣтимъ, что съ движеніемъ образующей (bn, b'n') точка (m,m') будетъ описывать винтовую линію одного хода съ направляющей. Поэтому горизонтальная проекція будетъ описывать окружность, центръ которой – o, а радіусъ – om. Проведемъ касательную къ винтовой линіи, описанной точкой (m,m'), которая будетъ лежать въ искомой касательной плоскости. Горизонтальная проекція этой касательной касается въ точкѣ m къ построенной окружности. Чтобы получить длину подкасательной, мы должны отъ точки m отложить длину дуги основанія цилиндра радіуса om, заключенную между началомъ винтовой линіи и точкой m. Для опредѣленія длины подкасательной строимъ развертку цилиндра om и преобразованіе DE винтовой линіи, описываемой точкой (m,m'); тогда BE будетъ = длинѣ окружности om; затѣмъ отъ B на линіи BD, равной шагу винтовой линіи, откладываемъ $BE_o = m'm_o$ и черезъ E_o проводимъ прямую KE_o параллел. BE до встрѣчи съ DE въ точкѣ K; черезъ K проводимъ KK_o параллельно BD; отрѣзокъ EK_o будетъ искомой подкасательной. Отложивъ найденную длину ЕК, подкасательной, на касательной въ точкѣ m получимъ точку (t, t'), которая будетъ слѣдомъ касательной, а вертикальной проекціей ея будетъ m't'. Плоскость, проходящая черезъ (mt, m't') и образующую (bn, b'n'), будетъ касательной плоскостью, а линія zt - ея горизонтальнымъ слѣдомъ.

Если точка (m, m') перемѣщается по образующей (bn, b'n'), то горизонтальный слѣдъ (t, t') касательной будетъ измѣнять свое положеніе, а горизонтальный слѣдъ tz касательной плоскости будетъ вращаться около z. Слѣдовательно, касательная плоскость въ различныхъ точкахъ одной образующей будетъ имѣть разныя положенія. Такое свойство принадлежитъ косымъ поверхностямъ, а потому винтовыя поверхности суть поверхности неразгибающіяся.

З А Д А Ч А. Провести касательную плоскость къ винтовой поверхности треугольнаго образованія безъ цилиндрическаго пролета въ данной точкѣ на ней (m, m') (черт. 317).

Опишемъ изъ точки o радіусомъ om окружность, которая будетъ горизонтальной проекціей винтовой линіи, которую точка (m, m') опишетъ при движеніи образующей (ob, n_2b'). Къ этой винтовой линіи въ точкѣ (m, m') строимъ касательную, а для этого въ точкѣ m проводимъ касательную къ окружности, служащей горизонтальной ея проекціей, и на ней откладываемъ длину подкасательной. Чтобы найти ее, разсмотримъ точку n встрѣчи построенной окружности съ радіусомъ oα, параллельнымъ оси xy. Точку n проектируемъ на образующую

Черт.317.



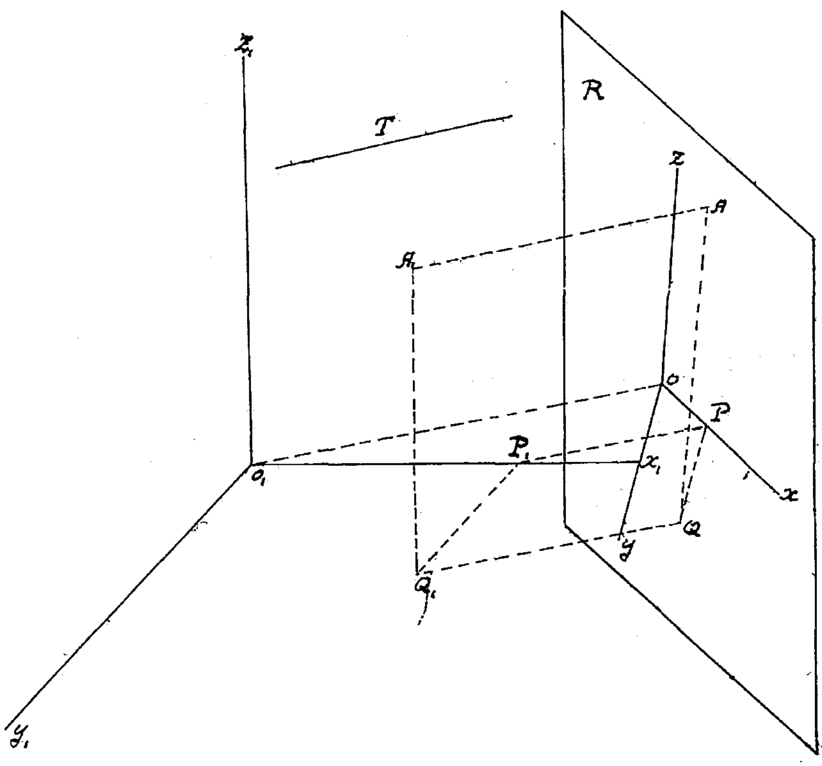
α'n'. Через точку n' проводимъ плоскость (r, r'), параллельную горизонтальной плоскости. Эта плоскость пройдетъ черезъ начало (n, n') винтовой линіи, описанной точкой (m,m') Поэтому на касательной mk къ окружности o въ точкѣ m откладываемъ mi= = длинѣ дуги mn. Отрѣзокъ mi будетъ подкасательной на плоскости rr' къ винтовой линіи. Точку i проектируемъ на вертикальный слѣдъ плоскости rr'. Линія (mi, m'i') будетъ касательной къ винтовой линіи въ точкѣ (m,m'), а плоскость, проходящая черезъ (mi, $m'i'$) и образующую (ob, n_2b') -касательной плоскостью. Горизонтальный слѣдъ касательной плоскости пройдетъ черезъ горизонтальные слѣды прямыхъ (mi, $m'i'$) и (bc, n_2b').

АКСОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦІЯ.

При построеніи аксонометрической проекціи тѣла предполагаютъ, что оно отнесено къ прямоугольнымъ осямъ координатъ $o, x_1 y_1 z_1$. Обыкновенно эти оси избираютъ параллельными главнымъ измѣреніямъ тѣла (т.е. его длинѣ, ширинѣ и высотѣ). Если координатн плоскости примемъ за плоскости проекцій, то въ проекціяхъ тѣла на каждую изъ этихъ плоскостей сохранится истинная величина двухъ измѣреній тѣла, но линія, параллельныя третьему измѣренію и, слѣдовательно, перпендикулярныя къ плоскости проекцій, представятся точками. Такое положеніе тѣла относительно плоскостей проекцій называется наивыгоднѣйшимъ, потому что при такомъ положеніи тѣла упрощается какъ построеніе его проекцій, такъ и пользованіе ими при нахожденіи размѣровъ тѣла и рѣшеніи другихъ вопросовъ, относящихся къ изображенному тѣлу. Несмотря на такія удобства чертежа при наивыгоднѣйшемъ расположеніи тѣла, ортогональная проекція обладаетъ недостаткомъ по отношенію наглядности изображенія. Въ этомъ отношеніи ортогональная проекція уступаетъ аксонометрической. Для яснаго пониманія формы и размѣровъ тѣла въ ортогональной проекціи, необходимо имѣть двѣ или даже три проекціи, на двухъ или трехъ плоскостяхъ, тогда какъ въ аксонометрической проекціи всѣ элементы тѣла изображаются на одной плоскости при помощи одной проекціи, чѣмъ и достигается большая наглядность изображенія, а слѣдовательно и большая удобопонятность.

Сущность аксонометрической проекціи вообще выяснимъ на построеніи аксонометрической проекціи точки A_1, отнесенной къ прямоугольнымъ осямъ координатъ $o_1 x_1 z_1 y_1$

Черт. 318.



Пусть координаты точки A_1 (черт. 318), отнесенной къ этой системѣ координатъ, будутъ: $o_1 P_1 = x_1$; $P_1 Q_1 = y_1$; $A_1 Q_1 = z_1$.

Вообразимъ плоскость R опредѣленнымъ образомъ расположенною относительно осей координатъ и спроектируемъ на нее точку A_1 и оси координатъ, при чемъ направленіе проектированія возьмемъ параллельнымъ опредѣленно выбранной прямой T. Плоскость R называется плоскостью аксонометрических проекцій или картинной плоскостью, прямая o_1o, проведенная изъ начала координатъ o_1, параллельно T, называется главнымъ лучомъ, а точка o встрѣчи этой прямой съ картинной плоскостью называется аксонометрической проекціей точки o_1 на плоскости R. Проектируя точку P_1 на плоскость R и соединяя проекціи o и P точекъ o_1 и P_1, получимъ аксонометрическую проекцію ox - оси o_1x_1. Такимъ же построеніемъ получаются аксонометрическія проекціи oy - оси o_1y_1 и oz - оси o_1z_1, равно какъ и аксонометрическія проекціи Q и A - точекъ Q_1 и A_1. Аксонометрическими проекціями угловъ $z_1o_1x_1$; $z_1o_1y_1$; $x_1o_1y_1$ - будутъ углы между проекціями сторонъ этихъ угловъ, т.е. углы zox, zoy и xoy.

Такъ какъ проекціи параллельныхъ прямыхъ параллельны при всякомъ направленіи проектированія, то PQ параллель. oy и AQ параллельна oz; поэтому, если линіи ox, oy и oz, лежащія на плоскости R, принять за координатныя оси, то координатами точки A будутъ: oP = x, PQ = y и AQ = z. Линіи ox, oy, oz, лежащія на плоскости чертежа или картинной плоскости R, въ отличіе отъ осей o_1x_1, o_1y_1, z_1o_1, лежащихъ въ разныхъ плоскостяхъ, называются осями аксонометрической проекціи, а координаты x,y,z - аксонометрическими координатами точки A относительно этихъ осей.

Зная аксонометрическія проекціи осей координатъ o_1x_1, o_1y_1, o_1z_1, т.е. оси ox, oy, oz, а также аксонометрическія координаты данной точки A_1, т.е. x,y,z, мы легко можемъ построить аксонометрическую проекцію этой точки, т.е. точку A; для этого нужно отъ o по ox отложить отрѣзокъ oP = x, черезъ P провести параллель линіи oy, на которой отложить отрѣзокъ PQ = y и черезъ Q провести параллель oz и отложить отрѣзокъ QA = z; полученная точка A и будетъ искомой аксонометрической проекціей данной точки A_1.

Аксонометрическая проекція принадлежитъ къ классу проекцій параллельныхъ, такъ какъ при всякомъ направленіи проектированія всѣ проектирующія линіи параллельны прямой T и назыв. иначе параллельной перспективой потому, что аксонометрическая проекція по наглядности изображенія близко подходитъ къ перспективному изображенію тѣла.

Если направленіе проектированія T перпендикулярно къ картинной плоскости, то аксонометрическая проекція называется прямоугольной, въ противномъ случаѣ - косоугольной Отношенія: $\frac{x}{x_1} = \frac{1}{s}$; $\frac{y}{y_1} = \frac{1}{t}$; $\frac{z}{z_1} = \frac{1}{u}$ называются показателями сокращенія или искаженія координатъ въ ихъ проекціяхъ. Если эти показатели извѣстны, то мы можемъ опредѣлить координату точки A (проекціи A_1) по даннымъ координатамъ точки A_1.

1) Если $\frac{1}{s} \neq \frac{1}{t} \neq \frac{1}{u}$, то проекція называется триметрической.

2) Если два какихъ-нибудь показателя равны, а третій не равенъ имъ, то проекція назыв. диметрической.

3) Наконецъ, если равны всѣ показатели искаженія, то

проекція носитъ названіе изометрической.

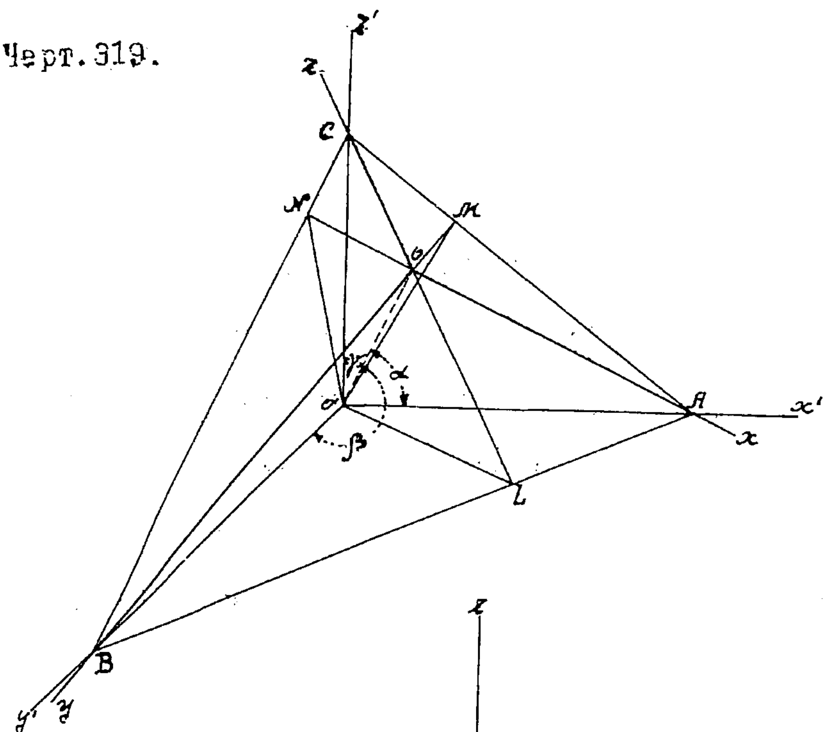
Разсмотримъ прежде изометрическую прямоугольную проекцію. Въ прямоугольной аксонометрической проекціи, какъ было замѣчено раньше, направленіе проектированія перпендикулярно къ картинной плоскости, а потому выборъ положенія картинной плоскости равносиленъ выбору положенія точки зрѣнія. Для наглядности изображенія тѣла, точка зрѣнія, или, что все равно, картинная плоскость должна быть выбрана такъ, чтобы ни одно изъ измѣреній тѣла не исчезало въ проекціи, т.е. не обращалось въ точки; поэтому за картинную плоскость или плоскость чертежа нельзя принимать произвольную плоскость. Разсмотримъ, какія положенія картинной плоскости удовлетворяютъ нашей цѣли и какія не удовлетворяютъ.

Если картинную плоскость R расположимъ параллельно двумъ какимъ-нибудь осямъ координатъ или, что все равно, точку зрѣнія на третьей координатной оси, то двѣ оси, или два измѣренія тѣла, а слѣдовательно и линіи имъ параллельныя, будутъ проектироваться на эту плоскость не искажаясь, но третье измѣреніе и линіи ему параллельныя, какъ линіи перпендикулярныя къ плоскости R, будутъ обращаться въ точки. Понятно, что исчезновеніе какого-либо измѣренія лишаетъ изображеніе наглядности, а потому плоскости, параллельныя двумъ осямъ координатъ, не удовлетворяютъ нашей цѣли. Точно также не удовлетворяютъ нашей цѣли плоскости, параллельныя одной изъ осей координатъ, такъ какъ въ этомъ случаѣ ось, или одно изъ измѣреній тѣла и линіи ему параллельния на плоскость R, будутъ проектироваться безъ искаженія, проекціи же другихъ осей, или другихъ измѣреній, будутъ сливаться въ одну прямую, вслѣдствіе чего одна изъ координатныхъ плоскостей совершенно исчезнетъ въ своей проекціи и изображеніе тѣла будетъ не нагляднымъ. Такимъ образомъ за картинную плоскость, согласно нашей цѣли, нельзя принимать плоскость параллельную ни двумъ какимъ-либо осямъ координатъ, ни одной оси, а отсюда можно заключить, что картинная плоскость, удовлетворяющая нашей цѣли, должна пересѣкать всѣ три оси координатъ. Дѣйствительно, если плоскость R пересѣкаетъ всѣ три оси координатъ, то она не можетъ быть перпендикулярна ни къ одной изъ осей, ни къ одной изъ координатныхъ плоскостей, а потому ни одно изъ измѣреній тѣла не можетъ исчезнуть въ своей проекціи, т. е. при выборѣ такой плоскости отсутствуютъ тѣ условія, которыя дѣлаютъ изображеніе тѣла не нагляднымъ. Поэтому за плоскость аксонометрическихъ прямоугольныхъ проекцій слѣдуетъ брать плоскость, пересѣкающую всѣ три оси координатъ. На выборъ картинной плоскости слѣдуетъ смотрѣть, какъ на одно изъ основныхъ положеній метода аксонометрическихъ проекцій.

Построимъ аксонометрическія проекціи осей координатъ, полагая, что точка зрѣнія лежитъ въ I углу пространства. Пусть картинная плоскость R есть плоскость ABC (черт. 319), пересѣкающая оси координатъ o'x'z'y' въ точкахъ A, B, C. Опустимъ перпендикуляръ o'o на плоскость ABC, тогда o будетъ проекціей o' на плоскости ABC; соединивъ o съ A, B и C, получимъ oх, oy и oz проекціи осей o'x', o'y' и o'z' на плоскости R.

Если линіи oz дадимъ вертикальное направленіе, то проекція осей координатъ на плоскости чертежа приметъ видъ, указанный на черт.320.

Черт.319.

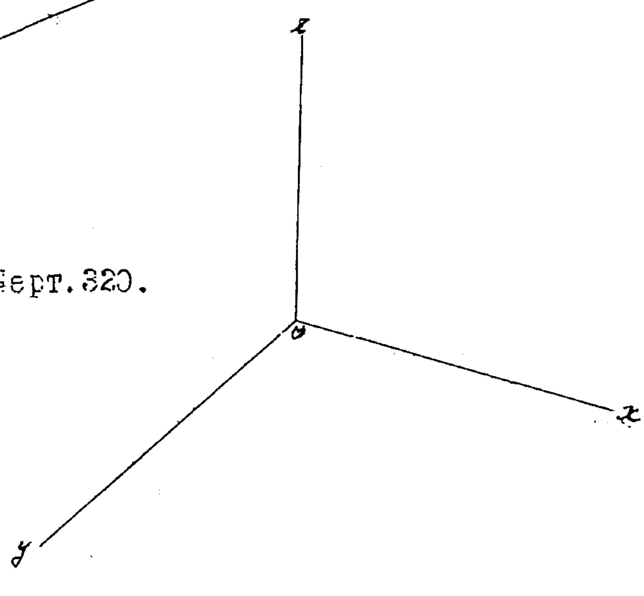


Изъ чертежа 319 видно, что oA есть проекція o'A, oB - проекція o'B и oC -проекція o'C; отношенія

$$\frac{oA}{o'A} = \frac{1}{s},\quad \frac{oB}{o'B} = \frac{1}{t} \quad \text{и} \quad \frac{oC}{o'C} = \frac{1}{u}$$

суть показатели сокращенія по осямъ координатъ.

Черт.320.



Если главный лучъ o'o, съ осями координатъ o'x', o'y' o'z', составляетъ углы α, β и γ, то есть $\angle x'o'o = \alpha$, $\angle y'o'o = \beta$, $\angle z'o'o = \gamma$, то $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2$. Изъ треугольниковъ o'oA, o'Co и o'oB имѣемъ, что $\frac{oA}{o'A} = \sin\alpha$, $\frac{oB}{o'B} = \sin\beta$, $\frac{oC}{o'C} = \sin\gamma$; поэтому $\frac{1}{s} = \sin\alpha$, $\frac{1}{t} = \sin\beta$, $\frac{1}{u} = \sin\gamma$, т.е. показатели сокращенія по осямъ координатъ равны соотвѣтственно синусамъ угловъ, образуемыхъ главнымъ лучомъ, или направленіемъ проектированія, съ осями координатъ o'x', o'y' и o'z'.

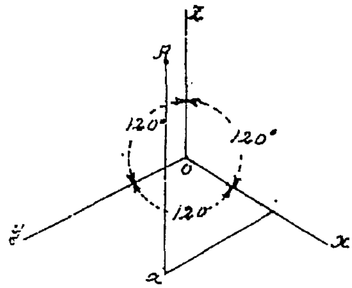
Для изометрической прямоугольной проекціи $\frac{1}{s} = \frac{1}{t} = \frac{1}{u}$, а эти равенства равносильны равенствамъ: $\sin\alpha = \sin\beta = \sin\gamma$, поэтому урав. $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2$ принимаетъ видъ: $3\sin^2\alpha = 2$, откуда $\sin\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}} = 0{,}82$. Такимъ образомъ нашли показатель сокращенія по 3 осямъ координатъ для изометрической прямоугольной проекціи, а вмѣстѣ съ тѣмъ опредѣлили и направленіе проектированія для этой проекціи. Легко показать, что плоскость ABC, въ этомъ случаѣ, одинаково наклонена къ плоскостямъ координатъ: x'y', y'z' и z'x'. Дѣйствительно, плоскость $o'Co \perp x'y'$ и $\perp ABC$, а потому она перпендик. къ AB, т.е. уголъ o'Lo - линейный уголъ между плоскостями x'y' и ABC; но этотъ уголъ равенъ $\angle Co'o = \gamma$; подобно этому найдемъ, что $\angle o'Mo = \beta$, а $\angle o'No = \alpha$; но $\sin\alpha = \sin\beta = \sin\gamma$, поэтому $\alpha = \beta = \gamma$, т.е. плоскость ABC одинаково наклонена къ плоскостямъ проекцій.

Изъ равенства прямоугольныхъ треугольниковъ: o'oA, o'oC и o'oB слѣдуетъ, что $o'A = o'B = o'C$ и $Ao = Bo = Co$; первый рядъ равенства показываетъ, что треугольникъ ABC -

равносторонній, а второй, что $\angle AoC = \angle CoB = \angle BoA = 120^\circ$.

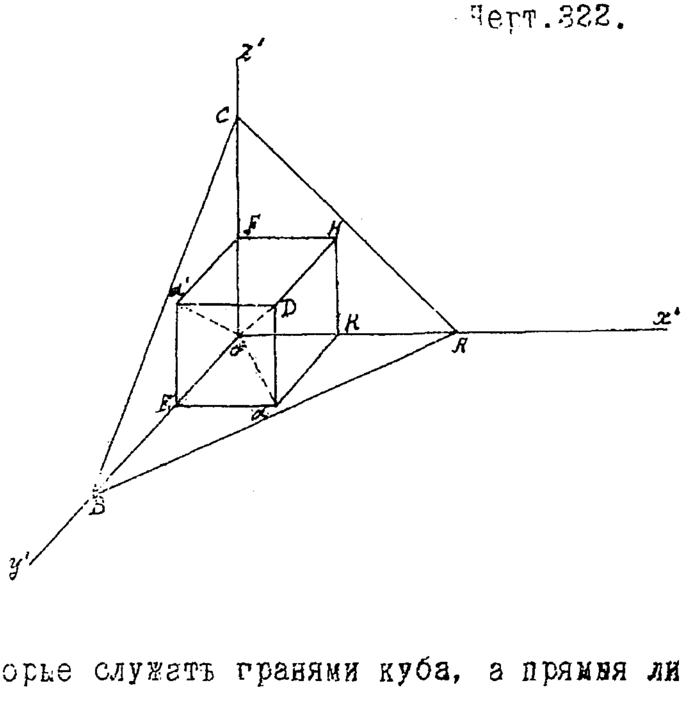
Такимъ образомъ изометрическая прямоугольная проекція осей координатъ на картинной плоскости, принимаемой за плоскость чертежа, выражается прямыми ox, oy, oz, составляющими между собою углы въ 120° (черт.321).

Черт.321.



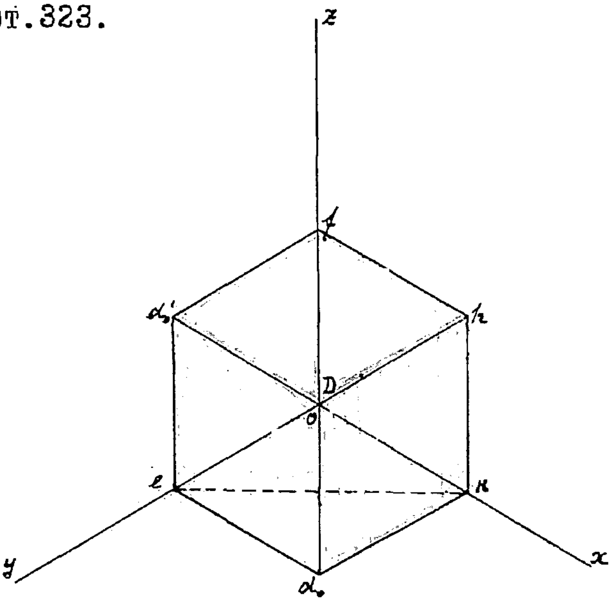
Если кубъ расположимъ такъ, что одна изъ его вершинъ совпадетъ съ началомъ координатъ o'(черт.322), а ребра - съ осями координатъ o'x', o'y', o'z', то діагональ его o'D будетъ перпендикулярна къ плоскости изометрическихъ проекцій ABC. Дѣйствительно, проекціями діагонали o'D, на плоскостяхъ x'y и y'z', будутъ діагонали o'd и o'd'квадратовъ, которые служатъ гранями куба, а прямыя линіи AB и BC, слѣды изометрической плоскости ABC на плоскостяхъ координатъ, перпендикулярны соответственно къ o'd и o'd'; такъ какъ прямоугольные треугольники ABo' и Bo'C равнобедренные; но если проекціи прямой перпендикулярны слѣдамъ плоскости, то сама

Черт.322.



прямая перпендикулярна къ плоскости, поэтому діагональ $o'D$ перпендик. къ плоскости АВС. Итакъ, плоскость изометрическихъ прямоугольныхъ проекцій перпендикулярна къ той діагонали, которая принята за направленіе проектированія.

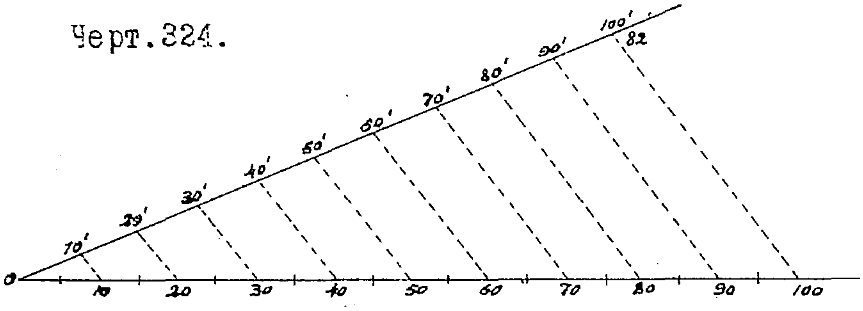
Черт.323.



Если кубъ проектируемъ на плоскость, перпендикулярную къ діагонали o'D (черт.322), то проекція его выразится правильнымъ 6-угольникомъ (чертежъ 323) $fhkd_0ed_0'$, при чемъ боковыя грани будутъ имѣть проекціями равные ромбы: $d_0'fhD$, $hDkd_0$, ... Если ребро куба = a, а изометрическая его проекція = a', то a:a' = 100:82. Всѣ ребра сократятся въ этомъ отношеніи, а также и линіи, имъ параллельныя. Большія діагонали ромбовъ, въ которыя проектируются квадратныя грани куба, въ изометрической проекціи остались той же величины, какъ и на кубѣ. Дѣйствительно, діагональ ek (черт.323) = oe $\sqrt{3}$, какъ сторона вписаннаго треугольника, а oe = a' = $a\sqrt{\frac{2}{3}}$; поэтому ek = $a\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{3} = a\sqrt{2}$; діагональ D квадрата на кубѣ = $a\sqrt{2}$; слѣдов. ek = D. Малая діагональ ромба od_0 = = oe = $a\sqrt{\frac{2}{3}}$, а отношеніе $\frac{od_0}{D} = \frac{a\sqrt{\frac{2}{3}}}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0{,}58$.

Такимъ образомъ малыя діагонали ромбовъ и линіи, имъ параллельныя, въ изометрической проекціи сокращаются въ отношеніи 58:100.

Черт.324.



Для откладыванія сокращенныхъ длинъ строятъ масштабы сокращенія; такъ, для построенія масштаба сокращенія по осямъ координатъ берутъ уголъ, на одной сторонѣ (черт.324) откладываютъ 100 единицъ длины, а на другой - 82; послѣднюю длину дѣлятъ на 100 равныхъ частей и получаютъ искомый масштабъ.

При построеніи изометрической проекціи точки, строятъ прежде изометрическія проекціи осей координатъ (черт. 321-ый), потомъ находятъ сокращенную длину координатъ точки, по которымъ и строятъ искомую точку А; точка А будетъ изометрической проекціею точки пространства A_1, а точка а - ея вторичною проекціею, т.е. изометрической проекціею ея горизонтальной проекціи на плоскость $x'o'y'$. Но чтобы каждый разъ не вычерчивать вспомогательныхъ линій, то приготовляютъ заранѣе вспомогательную сѣтку, на которой проведены линіи, параллельныя изометрическимъ проекціямъ осей координатъ, а также и горизонтальныя. Пользуясь листами съ подобной сѣткой, построеніе изометрической проекціи тѣла сводится на простое откладываніе линій.

До сихъ поръ мы полагали, что точка зрѣнія находится въ первомъ углу, образованномъ тремя координатными плоскостями, но она можетъ находиться въ каждомъ изъ восьми угловъ, образованныхъ координатными плоскостями, поэтому изометрическая проекція тѣла можетъ быть построена съ 8 точекъ зрѣнія.

Нужно замѣтить, что изометрическая проекція изъ всѣхъ видовъ аксонометрической прямоугольной проекціи, благодаря одинаковой искажаемости трехъ измѣреній тѣла, является наиболѣе простою, какъ по отношенію ея построенія, такъ и пользованія ею для нахожденія размѣровъ тѣла; но что касается правильности изображенія тѣла, въ особенности его формы, то она значительно ниже проекцій триметрической и диметрической; въ изометрической проекціи форма тѣла сильно искажается и положеніе его въ пространствѣ представляется неестественнымъ.

Въ отношеніи наглядности и правильности изображенія, а также легкости нахожденія размѣровъ тѣла по чертежу, между аксонометрическими проекціями тѣла первое мѣсто занимаетъ косоугольная проекція на плоскость, параллельную 2-мъ осямъ координатъ.

А К С О Н О М Е Т Р І Я В Ъ К О С О У Г О Л Ь Н Ы Х Ъ П Р О Е К Ц І Я Х Ъ.

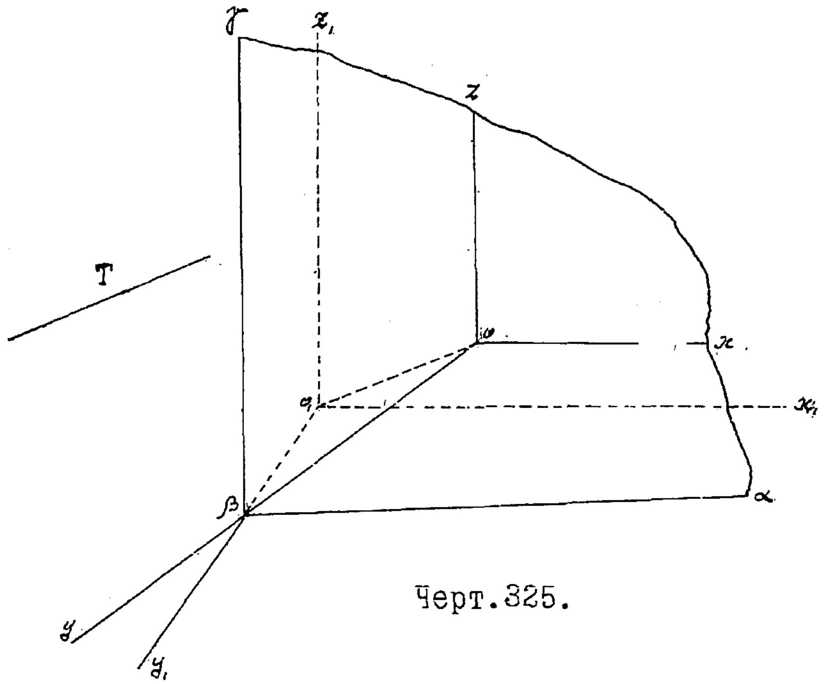
Разсмотримъ, какимъ условіямъ должны удовлетворять направленія проектированія и положенія картинной плоскости въ косоугольной проекціи, чтобы изображенія обладали наибольшею наглядностью.

Если за направленіе проектированія возьмемъ прямую, параллельную одной изъ осей координатъ, напр. о,у, , то, какое бы положеніе мы ни придавали картинной плоскости, прямая, параллельная оси о,у, , а съ нею и всѣ координаты, ей параллельныя, будутъ проектироваться на картинную плоскость въ точки, т.е. одно измѣреніе тѣла на чертежѣ будетъ отсутствовать. Это обстоятельство мѣшаетъ ясности изображенія. Направленіе проектированія невыгодно брать параллельнымъ какой-нибудь изъ координатныхъ плоскостей, потому что тогда, какъ эта плоскость, такъ и всякая другая, ей параллельная, при всякомъ положеніи картинной плоскости будутъ проектироваться на нее въ прямыя линіи, т.е. на чертежѣ будутъ отсутствовать два измѣренія, что опять помѣшаетъ ясности изображенія.

Итакъ, за направленіе проектированія можно принимать только прямую, лежащую внутри одного изъ восьми трехгранныхъ угловъ, образуемыхъ координатными плоскостями, которая не параллельна ни его ребрамъ, ни его гранямъ, потому что въ этомъ случаѣ ни одна изъ осей, ни одна изъ координатныхъ плоскостей не можетъ исчезнуть въ своей проекціи.

ВЫБОРЪ КАРТИННОЙ ПЛОСКОСТИ.

Если картинная плоскость $\alpha\beta\gamma$ параллельна одной изъ плоскостей координатъ, напримѣръ плоскости $x_1 z_1$, то ея слѣды на плоскостяхъ координатъ суть $\alpha\beta$ паралл. o_1x_1 и $\beta\gamma$ параллел. o_1z_1 (черт.325).



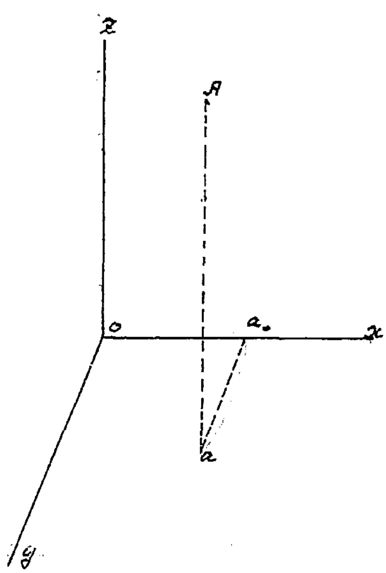
Черт.325.

Проведя изъ o_1 главный лучъ oo_1 паралл. T, получимъ аксонометрическую проекцію o точки o_1. Проекціями осей o_1x_1 и o_1z_1 будутъ прямыя ox и oz, параллельныя o_1x_1 и o_1z_1, а проекція oy оси o_1y_1 на плоскость $\alpha\beta\gamma$ пройдетъ черезъ точку β.

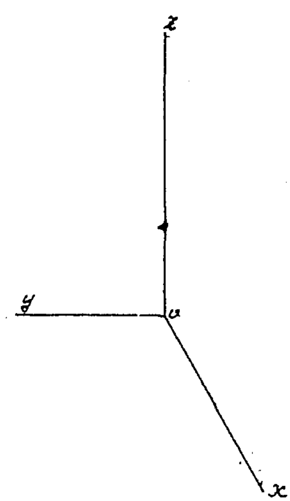
При такомъ выборѣ картинной плоскости сокращеніе размѣровъ тѣла въ проекціи произойдетъ только по оси oy, слѣдовательно оба показателя сокращенія для осей ox и oz равны 1, и поэтому проекція будетъ диметрической.

Если бы картинная плоскость была параллельна одной изъ осей координатъ, то искаженія не претерпѣвали бы только размѣры тѣла, параллельные этой оси. Въ этомъ случаѣ и въ случаѣ непараллельности картинной плоскости ни одной изъ осей координатъ проекція была бы триметрической и такой выборъ картинной плоскости представлялъ бы съ точки зрѣнія какъ построенія его, такъ и удобства пользованія имъ меньше выгодъ, чѣмъ предыдущій случай - диметрической проекціи. Итакъ, положеніе картинной плоскости, параллельное одной изъ плоскостей координатъ, представляется наивыгоднѣйшимъ, почему оно обыкновенно и употребляется.

Черт.326.



Черт.327.



Если оси координатъ прямоугольны и картинная плоскость параллельна x, z,, то проекціи осей o, x, y, z, на картинной плоскости будутъ расположены, какъ показано на чертежѣ 326-мъ, и сокращеніе произойдетъ только по оси y-овъ.

Черт.327-ой представляетъ проекціи осей на плоскость, параллельную плоскости y, z,; въ этомъ случаѣ сокращеніе размѣровъ происходитъ по оси x-овъ.

Такъ какъ направленіе проектированія произвольно, то, мѣняя его, мы можемъ изображать предметъ съ различныхъ сторонъ.

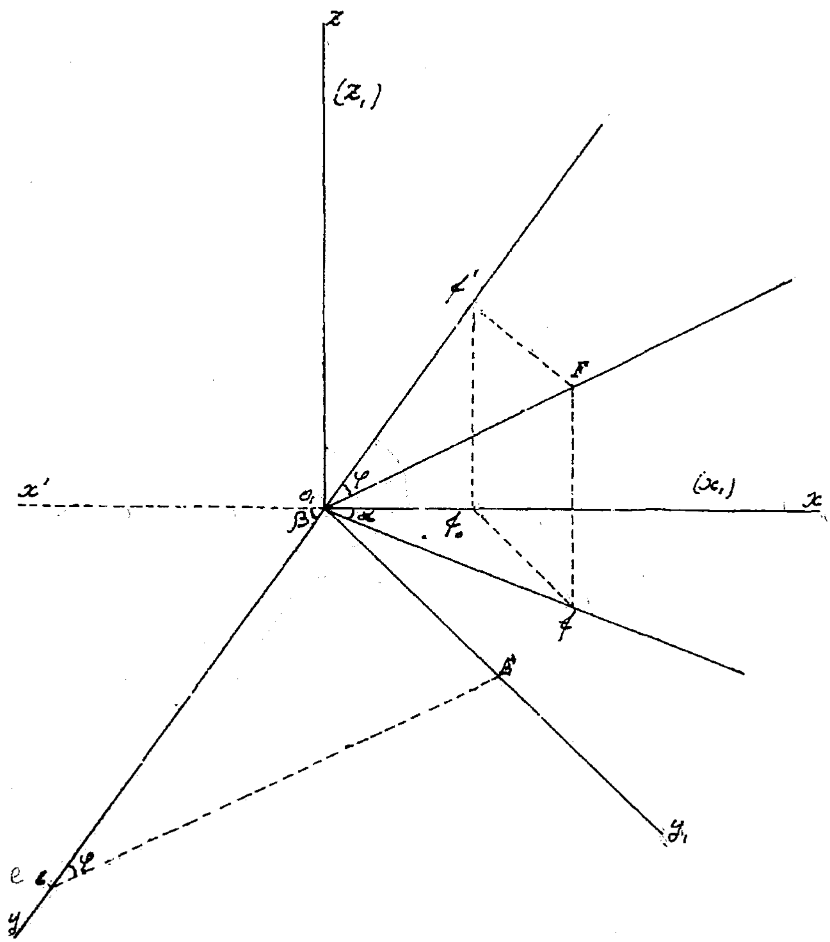
Въ аксонометрической проекціи, какъ прямоугольной, такъ и косоугольной, точка дается обыкновенно аксонометрическою проекціею самой точки пространства, а также и аксонометрической проекціею одной изъ ея ортогональныхъ проекцій. Напримѣръ, A (черт.326) есть проекція A_1 (черт.318), а точка a (черт.326) - проекція a (черт.318). Длина aA выражаетъ натуральную длину разстоянія точки A_1 отъ плоскости x_1y_1. Если бы мы провели на чертежѣ 326-мъ aa_o параллел. oy, то получили бы oa_o - истинную величину абсциссы и aa_o - сокращенную длину координаты точки A_1 (черт.318); проекція a называв. вторичною.

НАХОЖДЕНІЕ ПРОЕКЦІИ ОСИ У-КОВЪ ПО НАПРАВЛЕНІЮ ПРОЕКТИРОВАНІЯ, КОГДА КАРТИННАЯ ПЛОСКОСТЬ ПАРАЛЛЕЛЬНА x_1z_1.

Пусть $o_1x_1y_1z_1$ - прямоугольныя оси координатъ, къ которымъ отнесено тѣло въ пространствѣ; o_1F - направленіе главнаго луча (черт.328). Послѣднее дается обыкновенно ортогональными проекціями (o_1f, o_1f') на плоскостяхъ проекцій x_1z_1 и x_1y_1. Проекціи эти опредѣляются углами α и β, составляемыми ими съ осью x_1x'. Дать направленіе проектированія значитъ дать углы α и β. Пусть уголъ, составленный направленіемъ o_1F въ пространствѣ съ плоскостью x_1z_1, есть φ.

Такъ какъ перемѣщеніе картинной плоскости параллельно самой себѣ не вліяетъ на размѣры проекцій тѣла, то произвольную плоскость, параллельную x_1z_1, мы можемъ принять за картинную плоскость. Мы примемъ за картинную плоскость

Черт.328.



именно плоскость $x_1 z_1$, тогда аксонометрическими проекціями осей $o_1 x_1$ и $o_1 z_1$ будутъ сами эти оси, т.е. $o_1 x$ совпадетъ съ $o_1 x_1$, а $o_1 z$ – съ $o_1 z_1$.

Чтобы построить аксонометрическую проекцію оси $o_1 y_1$ на картинной плоскости $x_1 z_1$, нужно построить на ней аксонометрическую проекцію произвольной точки E этой оси, потому что точка o_1 служитъ сама себѣ проекціей. Для этого проводимъ черезъ точку E прямую Ee, параллельную главному лучу $o_1 F$, и положимъ, что она пересѣкаетъ картинную плоскость, или плоскость $z_1 x_1$ въ точкѣ e. Найдемъ ортогональную проекцію линіи Ee на плоскости $z_1 x_1$; для этого замѣтимъ, что ортогональная проекція точки E на плоскости $z_1 x_1$

есть точка $o_{,}$, такъ какъ $o_{,}y_{,} \perp$ плоскости $z_{,}x_{,}$, а ортогональная проекція точки e на плоскость $z_{,}x_{,}$ есть сама эта точка e, поэтому $o_{,}e$ есть ортогональная проекція на плоскости $z_{,}x_{,}$ линіи Ee, и въ то же время $o_{,}e$ есть косоугольная проекція отрѣзка $o_{,}E$, оси $y_{,}$, или $o_{,}e$ есть искомая косоугольная проекція оси $o_{,}y_{,}$ на плоскости $z_{,}x_{,}$. Но, такъ какъ Ee паралл. $o_{,}F$, то и ортогональныя ихъ проекціи на плоскости $z_{,}x_{,}$ будутъ параллельны, т.е. $o_{,}e$ паралл. $o_{,}f'$; откуда заключаемъ, что $o_{,}e$ есть продолженіе линіи $o_{,}f'$, т.е. косоугольная проекція оси $o_{,}y_{,}$ на плоскости $z_{,}x_{,}$ получится, когда $o_{,}f'$ продолжимъ за точку $o_{,}$.

Вычислимъ углы между аксонометрическими проекціями осей координатъ, т.е. между осями $o_{,}xyz$.

$$\angle zo_{,}x = 90^{\circ}$$

$$\angle zo_{,}y = 90^{\circ} + \angle x'o_{,}y = 90^{\circ} + \beta .$$

$$\angle yo_{,}x = 180^{\circ} - \angle eo_{,}x' = 180^{\circ} - \beta .$$

Такимъ образомъ видимъ, что углы между осями аксонометрической косоугольной проекціи на плоскость паралл. $z_{,}x_{,}$, являются функціею только угла β, образуемаго ортогональною проекціею $o_{,}f'$; направленія проектированія $o_{,}F$, съ осью $o_{,}x_{,}$.

Опредѣлимъ показатель сокращенія $\frac{1}{t}$ по оси y-овъ; $o_{,}e$ есть косоугольная проекція отрѣзка $o_{,}E$, а потому $\frac{o_{,}e}{o_{,}E} = \frac{1}{t}$. Треугольникъ $eo_{,}E$ – прямоугольный при $o_{,}$, такъ какъ въ пространствѣ линія $o_{,}y_{,}$ перпендикулярна къ плоскости $x_{,}z_{,}$.

Линія eE въ пространствѣ параллельна o_1F и, слѣдовательно, уголъ $o_1eE = \varphi$. Изъ прямоугольнаго треугольника eo_1E слѣдуетъ, что $eo_1 = Eo_1 ctg\varphi$. Поэтому $\frac{eo_1}{Eo_1} = ctg\varphi = \frac{1}{t}$. Результатъ этотъ можно выразить такъ: показатель сокращенія по оси у-овъ равенъ ctg угла, образуемаго главнымъ лучомъ съ картинной плоскостью x_1z_1. Выразимъ уголъ φ черезъ углы α и β, опредѣляющіе проекціи направленія проектированія на плоскостяхъ x_1y_1 и x_1z_1. Изъ треугольника $o_1f'F$ слѣдуетъ, что $Ff' = o_1f'tg\varphi$ ......(1)
Изъ чертежа видно, что $Ff' = ff_o$, а $ff_o = o_1f_otg\alpha$, что слѣдуетъ изъ треугольника o_1ff_o.

Далѣе изъ прямоугольнаго треугольника $o_1f'f_o$ видно, что $o_1f_o = o_1f'Cos\beta$; слѣдов. $Ff' = o_1f'Cos\beta tg\alpha$ .... (2)
Изъ сравненія равенствъ (1) и (2) вытекаетъ, что:

$$o_1f'tg\varphi = o_1f'Cos\beta tg\alpha, \quad \text{т.е.} \quad tg\varphi = Cos\beta tg\alpha.$$

Показатель сокращенія $\frac{1}{t}$ выражается черезъ углы α и β такъ:

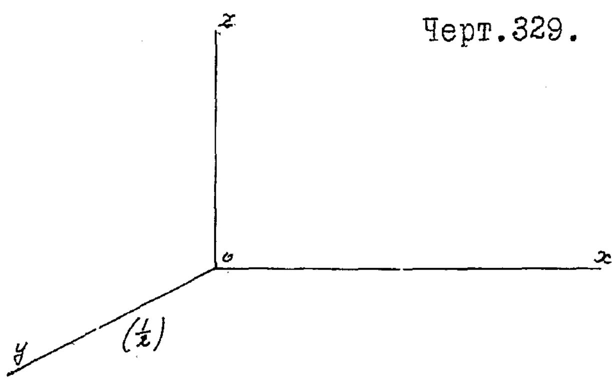
$$\frac{1}{t} = ctg\varphi = \frac{1}{Cos\beta tg\alpha}.$$

Эта формула показываетъ, что показатель сокращенія $\frac{1}{t}$ можетъ равняться какой угодно величинѣ, при различныхъ значеніяхъ β, т.е. при различныхъ положеніяхъ оси o_1y относительно o_1x, такъ какъ, каково бы ни было значеніе $\frac{1}{t}$ и β, всегда можно выбрать такое значеніе α, при которомъ это уравненіе будетъ удовлетворяться.

Такъ какъ три величины (показатель сокращенія $\frac{1}{t}$, равный $ctg\varphi$, и углы α и β) связаны только однимъ уравненіемъ $$\frac{1}{t} = \operatorname{ctg}\varphi = \frac{1}{\operatorname{Cos}\beta \operatorname{tg}\alpha}$$

то произвольно мы можемъ выбрать двѣ изъ этихъ величинъ (напр. α и β; β и φ или $\frac{1}{t}$) и по ихъ значеніямъ можемъ найти соотвѣтствующее значеніе третьей.

Обыкновенно задаются величинами β и $\frac{1}{t}$. Такъ какъ β выбирается произвольно, то всякую прямую, проходящую на плоскости чертежа черезъ о, мы можемъ принять за аксонометрическую проекцію оси o_1y_1.

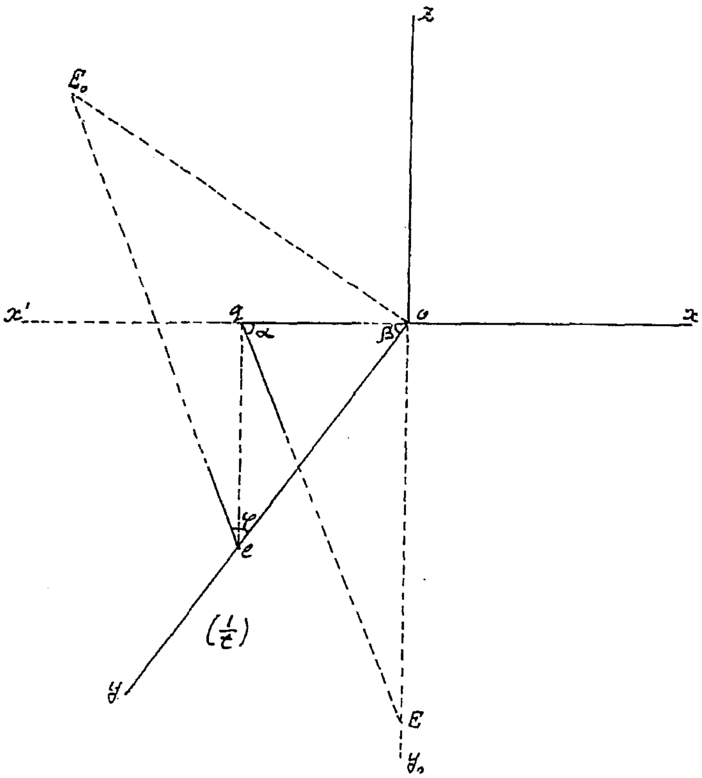


Черт.329.

Показатель сокращенія $\frac{1}{t}$ обыкновенно принимается равнымъ $\frac{1}{2}$; въ этомъ случаѣ нѣтъ надобности строить масштабъ сокращенія, такъ какъ всякая прямая, перпендикулярная къ картинной плоскости, сокращается при проектированіи вдвое. Если же показателемъ сокращенія служитъ другая дробь, напр. $\frac{3}{4}$, то необходимо построить масштабъ сокращенія. (Числовая величина показателя сокращенія пишется около названія оси у-ковъ, какъ показано на черт. 329-мъ.)

Если даны $\frac{1}{t}$ и уголъ β, то мы можемъ построеніемъ опредѣлить уголъ α (а слѣдовательно и направленіе проектированія). Пусть ox, oy, oz (черт.330) - аксонометрическія проекціи осей (oy наклонена подъ угломъ β къ ox'), а oy_0 - совмѣщеніе оси oy_1, когда плоскость x_1y_1, вращеніемъ около

Черт.330.



оси ох, приведена въ совпаденіе съ плоскостью z, x, . Возьмемъ на оу точку е - косоугольную проекцію нѣкоторой точки Е оси о, у, . Длина ое есть сокращенная длина разстоянія между точками о и Е. Истинная длина этого разстоянія равна t.oe, тогда отрѣзокъ оЕ, равный t.oe, выражаетъ истинную длину разстоянія между о, и Е. Изъ точки е опускаемъ перпендикуляръ на ох' и соединяемъ q съ Е; тогда qЕ и ое будутъ ортогональными проекціями главнаго луча на совмѣщенныхъ плоскостяхъ проекцій (qЕ будетъ горизонтальной проекціей, а ое - вертикальной). Уголъ oqЕ и будетъ равенъ α (какъ уголъ наклоненія горизонтальной проекціи главнаго луча къ оси). Для опредѣленія угла φ, т.е. угла, образуемаго линіей (qЕ, ое) съ вертикальной или картинной плоскостью zx, совмѣстимъ вертикально-проектирующую плоскость еоЕ, вращеніемъ около вертикальнаго слѣда ое, съ вертикальной (картинной) плоскостью; при этомъ вращенiи oE займетъ положенiе oE_o, перпендикулярное oe, и уголъ $E_o eo$, равный φ, будетъ искомымъ.

СВОЙСТВО УГЛОВЪ α, β и φ.

Мы нашли, что $t = tg\varphi = \cos\beta . tg\alpha$.

1) Уголъ β не можетъ равняться о, такъ какъ направленiе проектированiя не параллельно оси X-овъ; поэтому $\cos\beta < 1$ и, если $t > 1$ или $\frac{1}{t} < 1$, то изъ уравненiя $t = tg\varphi = \cos\beta . tg\alpha$ слѣдуетъ, что $\varphi > 45^\circ$ и что $tg\alpha > tg\varphi$.

Если углы α и φ острые, то $\alpha > \varphi$

2) Какъ нужно выбрать углы α, β и φ, чтобы $\frac{1}{t} = 1$ (чтобы получилась проекцiя изометрическая)?

$$\frac{1}{t} = 1; \quad ctg\varphi = 1; \quad \varphi = 45^\circ; \quad \alpha > 45^\circ.$$

Такъ какъ уголъ β остается произвольнымъ, то $\frac{1}{t}$ можетъ быть равна 1 при различныхъ значенiяхъ β, т.е. мы можемъ имѣть безчисленное множество изометрическихъ проекцiй при $\alpha > 45^\circ$.

3) Если направленiе проектированiя таково, что $\alpha < 45^\circ$, то изъ уравненiя $tg\varphi = \cos\beta . tg\alpha$ слѣдуетъ, что $tg\varphi < 1$ и уголъ $\varphi < 45^\circ$. Въ этомъ случаѣ $\frac{1}{t} > 1$ (такъ какъ $\frac{1}{t} = ctg\varphi = \frac{1}{tg\varphi}$), а слѣдовательно длина проекцiи больше длины проектируемой. Такая проекцiя никогда не употребляется, т.к. она сильно искажаетъ видъ тѣла.

Если плоскость $x_1 y_1$ вращать около оси ох, то аксонометрическая проекцiя оси $o_1 y_1$ будетъ измѣнять свое положеніе на картинной плоскости, и когда плоскость x_1y_1 совпадетъ съ плоскостью x_1z_1 или, что все равно, съ xz, то ось o_1y_1, аксонометрическая проекція которой есть oy, займетъ положеніе oy_o, совпадающее со своею аксонометрическою проекціею, а потому (черт.330) и точка E совпадетъ съ e. Поэтому переходъ отъ проекцій xoy, oy и e къ проекціямъ xoy_o, oy_o и E можно разсматривать какъ совмѣщеніе плоскости x_1y_1 съ zx; а обратный переходъ отъ xoy_o, oy_o и E къ xoy, oy и e - какъ поднятіе плоскости x_1y_1 въ пространство посредствомъ вращенія ея около ox. При совмѣщеніи плоскости x_1y_1 съ картинной плоскостью zx, теряется искаженность линіи oy_1 и угла x_1oy_1 а потому совмѣщеніемъ x_1y_1 съ zx и обратнымъ ея поднятіемъ въ пространство можно пользоваться какъ однимъ изъ вспомогательныхъ методовъ для рѣшенія нѣкоторыхъ задачъ въ косоугольной проекціи.

ИЗОБРАЖЕНІЕ ПРЯМОЙ.

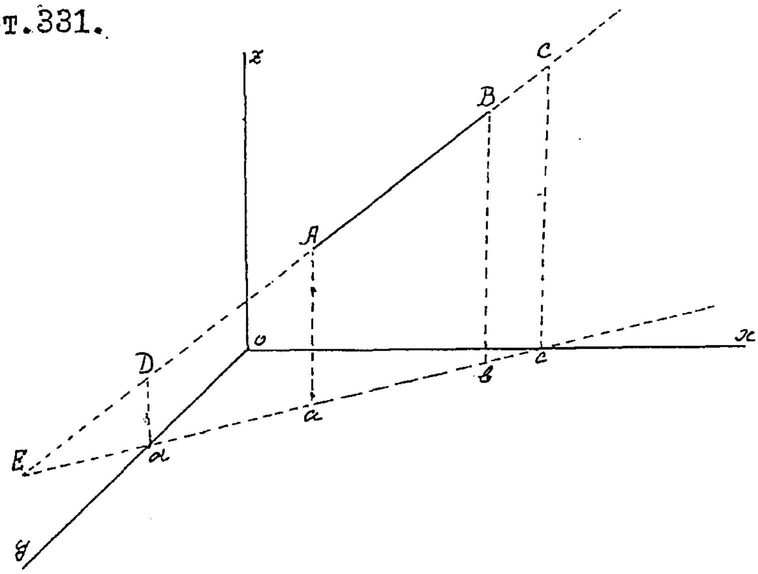
Прямая задается аксонометрической проекціей самой прямой и аксонометрической проекціей одной изъ ея ортогональныхъ проекцій (вторичной проекціей прямой). Напр., AB есть аксонометрическая проекція самой прямой, лежащей въ пространствѣ, а ab - аксонометрическая проекція ея ортогональной проекціи (черт.331).

Точки (C,c), (D,d) и E встрѣчи прямой съ координатными плоскостями называются аксонометрическими слѣдами прямой.

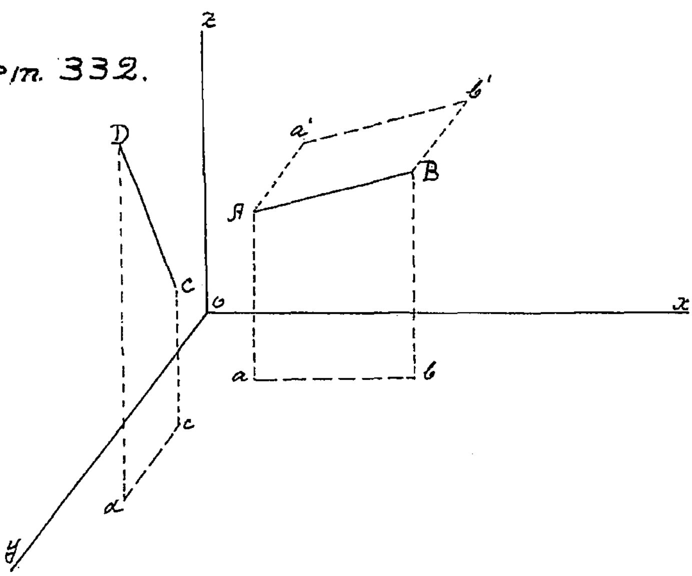
ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ РАСПОЛОЖЕНІЯ ПРЯМОЙ.

Если прямая въ пространствѣ параллельна плоскости z_1x_1, то ея ортогональная проекція на плоскости x_1y_1 параллельна оси o_1x_1; такъ какъ проекціи параллельныхъ прямыхъ при всякомъ направленіи проектированія параллельны, то аксонометрическая проекція такой прямой будетъ (AB, ab) (черт.332), причемъ ab паралл. oX.

Черт.331.



Черт. 332.



Вторичная проекція этой прямой на плоскости zx, т.е. a'b' будетъ параллельна AB, такъ какъ Aa' = Bb'. Вообще, если прямая параллельна одной изъ плоскостей координатъ, то это обстоятельство характеризуется въ аксонометрической проекціи тѣми же признаками, какъ и въ ортогональной. Такъ, если cd параллел. oy, то прямая, аксонометрическая проекція которой (CD, cd), - параллельна плоскости $y_1 z_1$

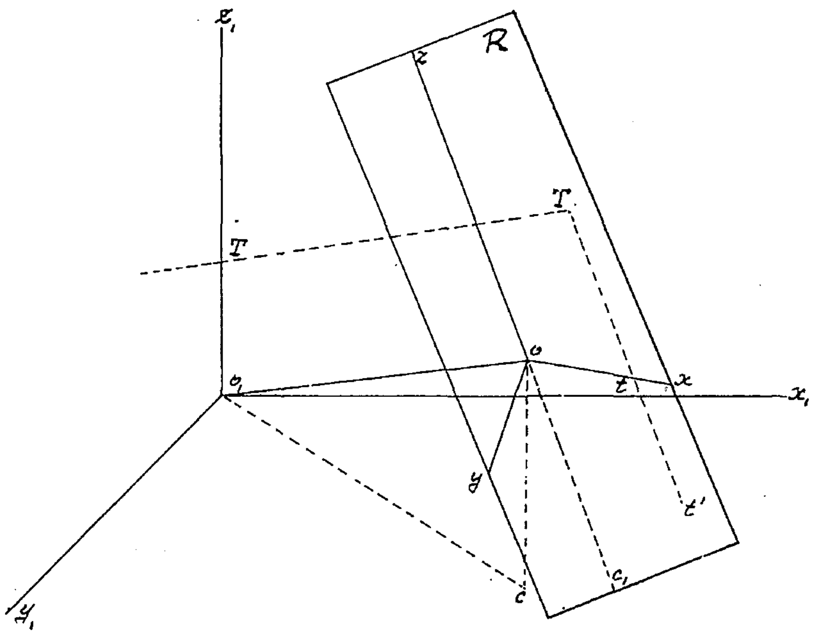
Если прямыя параллельны или пересѣкаются, то признаки такого расположенія прямыхъ въ аксонометрической проекціи - тѣ же, что и въ ортогональной. Аксонометрическія проекціи параллельныхъ прямыхъ - параллельны, пересѣкающихся - пересѣкаются, опредѣляя своимъ пересѣченіемъ проекціи дѣйствительно существующей точки.

Если прямая въ пространствѣ параллельна одной изъ осей координатъ, то обѣ ея аксонометрическія проекціи параллельны проекціи этой оси.

Если прямая параллельна направленію проектированія, то ея аксонометрическая проекція будетъ точкой, а вторичная проекція выразится прямой, параллельной одной изъ аксонометрическихъ проекцій осей координатъ.

Пусть $o_1 x_1 y_1 z_1$ - данная система координатныхъ осей (черт.333), къ которымъ отнесена прямая въ пространствѣ, R картинная плоскость, oo_1 - направленіе главнаго луча. Если прямая T параллельна направленію главнаго луча, то аксонометрическая проекція ея будетъ точкой, а вторичная проекція, взятая на плоскости $x_1 y_1$, выразится прямой tt', параллельной оси oz. Для доказательства разсмотримъ вторичную проекцію главнаго луча на плоскости $x_1 y_1$. Опускаемъ изъ точки o перпендикуляръ oc на плоскость $x_1 y_1$. Прямая $o_1 c$ будетъ про-

Черт.333.



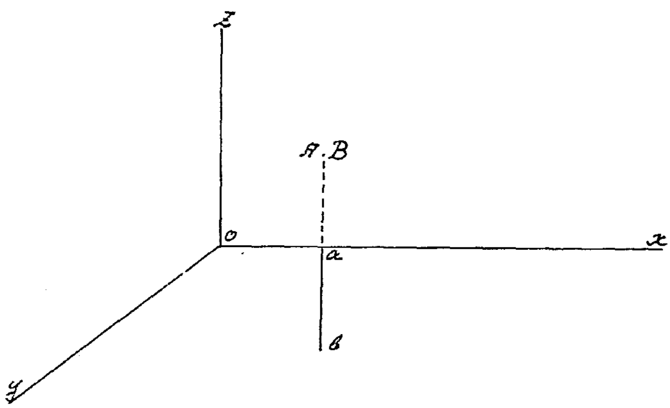
екцiей главнаго луча на плоскости $x, y_{,}$. Для полученiя вторичной проекцiи главнаго луча нужно через различныя точки прямой o, c проводить линiи, параллельныя $oo_{,}$; всѣ такiя линiи будуть лежать въ одной плоскости oo, c, и пересѣченiе ея съ картинной плоскостью выразить вторичную проекцiю главнаго луча. Ось $o_{,} z_{,}$, параллельная прямой oc, лежащей въ этой плоскости (такъ какъ ось $o_{,} z_{,}$ перпендикулярна къ плоскости $x, y_{,}$), имѣетъ съ нею общую точку $o_{,}$, слѣдовательно плоскость oo, c проходитъ черезъ ось $o_{,} z_{,}$ и прямая oz - аксонометрическая проекцiя оси $o_{,} z_{,}$ - должна лежать въ этой плоскости. Отсюда мы можемъ заключить, что вторичная проекцiя $oc_{,}$ главнаго луча и проекцiя oz оси $o_{,} z_{,}$ лежатъ на одной прямой и, слѣдовательно, служатъ одна продолженiемъ другой.

Если прямая T параллельна главному лучу, то ея ортогональная проекцiя на плоскость $x, y_{,}$ параллельна $o_{,} c$, а вторичная проекцiя параллельна $oc_{,}$ (какъ проекцiи параллельныхъ прямыхъ), т.е. параллельна оси oz. Чертежъ 334-ый представляетъ прямую (AB, ab), параллельную направленію проектированія.

ИЗОБРАЖЕНІЕ ПЛОСКОСТИ.

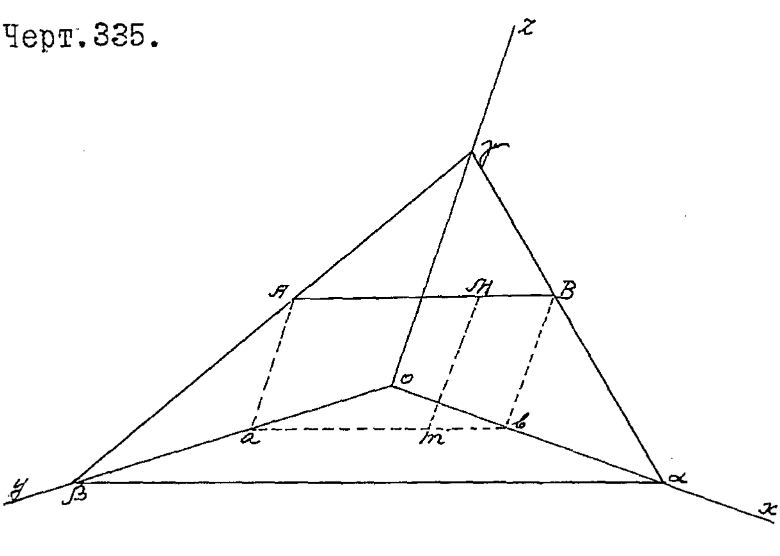
Плоскость опредѣляется аксонометрическими проекціями ея слѣдовъ на плоскостяхъ координатъ. Если плоскость не параллельна ни одной изъ осей, то она имѣетъ три слѣда.

Черт. 334.



Аксонометрическія проекціи слѣдовъ будутъ пересѣкать аксонометрическія проекціи осей. Выбирая плоскость, мы можемъ взять произвольно только два слѣда (напр. $\alpha\beta$ и $\beta\gamma$), (черт. 335) и по нимъ можемъ построить третій слѣдъ $\alpha\gamma$, соединяя точки пересѣченія α и γ построенныхъ слѣдовъ съ осями.

Черт. 335.



Признаки, характеризующіе разнообразныя расположенія плоскостей и прямыхъ относительно плоскостей координатъ и между собою въ аксонометрической проекціи - тѣ же, что и въ ортогональной.

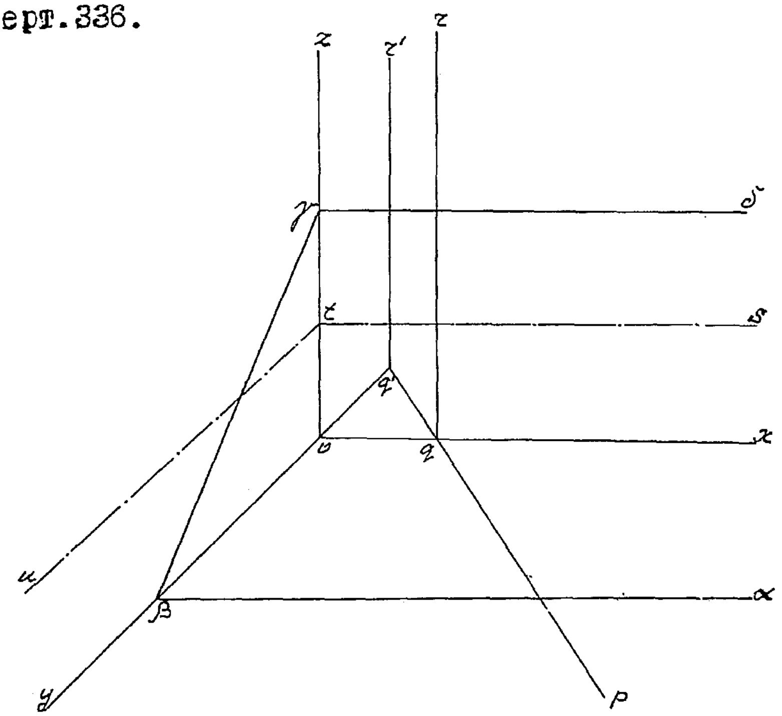
Разсмотримъ рѣшенія нѣкоторыхъ такихъ вопросовъ.

Для построенія прямой, лежащей въ плоскости $\alpha\beta\gamma$ беремъ точки (A, a) и (B, b) на слѣдахъ $\beta\gamma$ и $\alpha\gamma$ плоскости (черт. 335) и соединяемъ эти точки прямой (AB, ab).

Для построенія точки (M, m), лежащей въ плоскости $\alpha\beta\gamma$ беремъ эту точку (черт. 335) на прямой, лежащей въ данной плоскости.

Если плоскость параллельна одной изъ координатныхъ плоскостей, то ея слѣды на другихъ плоскостяхъ параллельны соотвѣтствующимъ осямъ (черт. 336). Такъ, плоскость stu параллельна x, y_1 и st параллельна ox, а tu параллельна oy. Плоскость $\alpha\beta\gamma\delta$ параллельна оси o, x_1, если $\alpha\beta$ параллельна ox и $\gamma\delta$ парал-

Черт. 336.



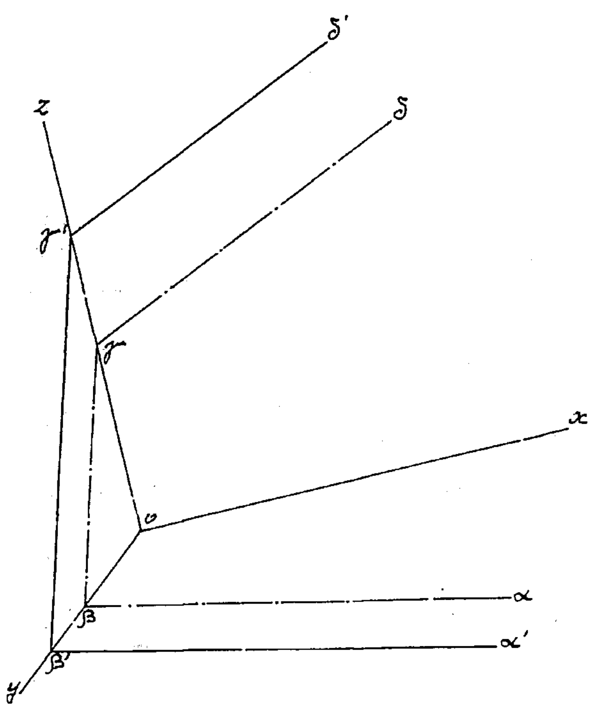
лельна ох.

Если плоскость pqr (черт.336) перпендикулярна къ одной изъ плоскостей координатъ (напр. x, y_1), то слѣды ея qr и q'r' на другихъ координатныхъ плоскостяхъ перпендикулярны къ осямъ ох и оу (плоскость pqr параллельна оси $o_1 z_1$, а потому два ея слѣда параллельны oz).

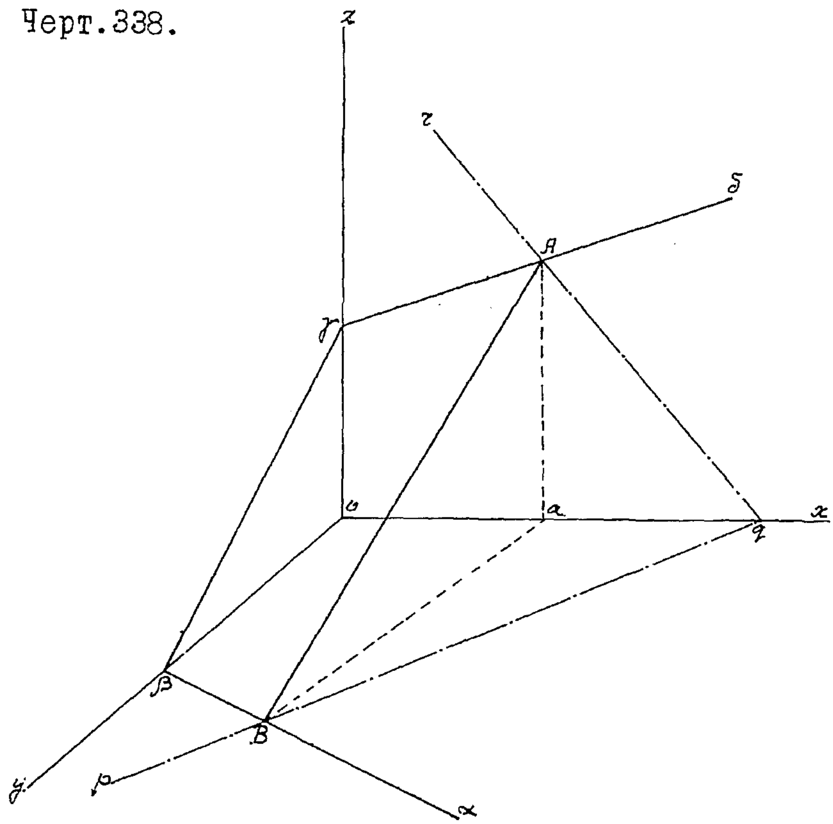
Параллельность плоскостей $\alpha\beta\gamma\delta$ и $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ (чертежъ 337) указывается параллельностью аксонометрическихъ проекцій ихъ слѣдовъ: $\alpha\beta$ параллел. $\alpha'\beta'$; $\beta\gamma$ параллел. $\beta'\gamma'$; $\gamma\delta$ параллел. $\gamma'\delta'$

Линія пересѣченія двухъ плоскостей въ аксонометрической проекціи строится по тому же правилу, какъ и въ ортогональной: точки (A, a) и B (черт. 338) пересѣченія слѣдовъ соединяютъ; (AB, aB) - аксонометрическія проекціи линіи сѣченія. Для отысканія точки встрѣчи прямой (BC, bc) (черт.339) съ плоскостью $\alpha\beta\gamma$ проводимъ черезъ прямую горизонтально-проектирующую плоскость pqr и строимъ линію DE пересѣченія плоскостей pqr и $\alpha\beta\gamma$. Точка

Черт.337.

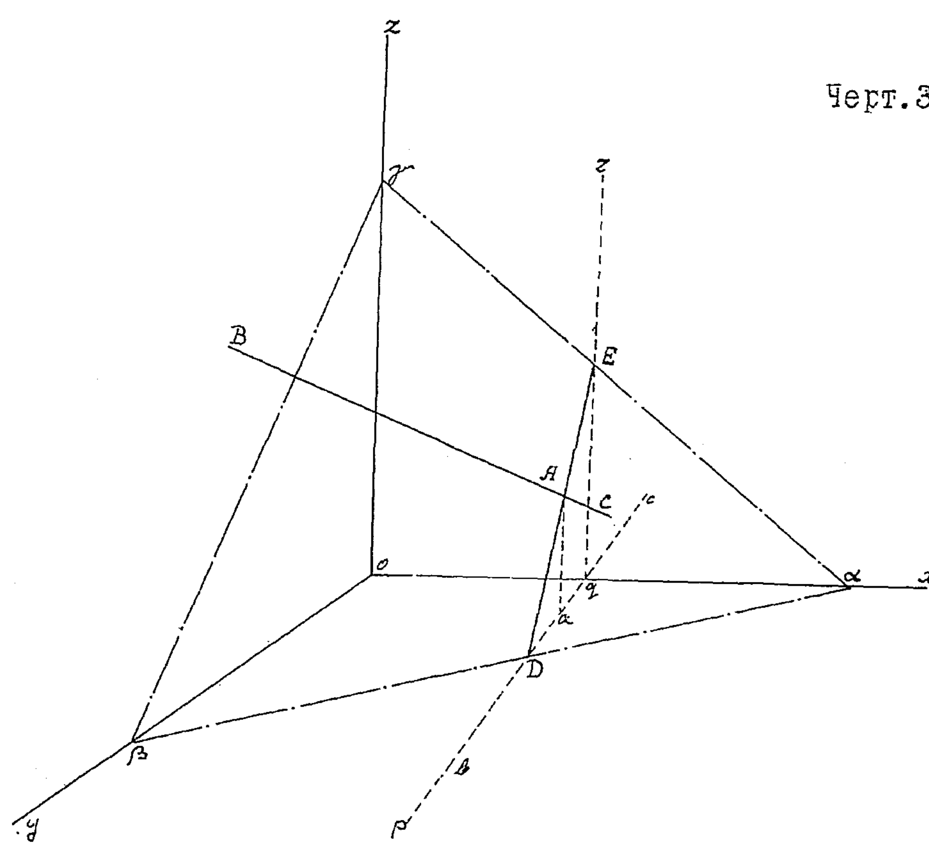


Черт.338.



(A, a) пересѣченія прямыхъ (BC, bc) и DE будетъ искомою.

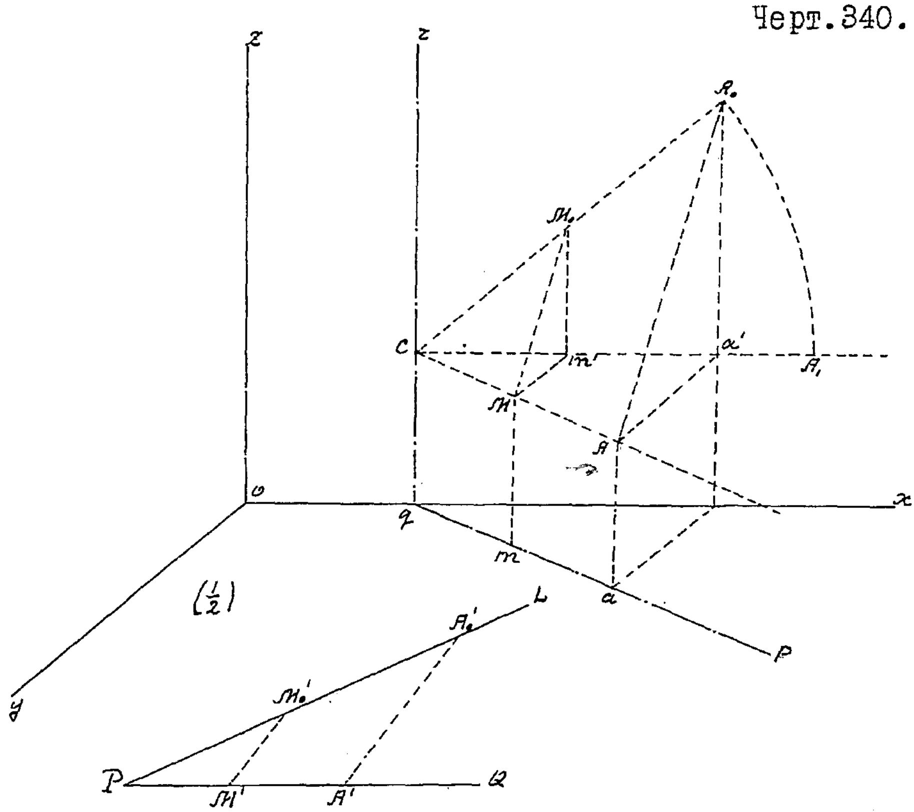
Черт.339.



С О В М Ѣ Щ Е Н І Е.

Пусть точка (А,а) (черт.340) лежитъ въ горизонтально-проектирующей плоскости pqr. Требуется найти совмѣщенное положеніе точки (А,а) съ к а р т и н н о й плоскостью, такъ какъ только на ней не происходитъ искаженія линій.

Черт.340.



При вращеніи въ пространствѣ плоскости pqr около картиннаго слѣда qr до совпаденія съ xz, точка (А,а), вѣрнѣе соотвѣтствующая ей точка пространства, лежащая въ этой плоскости, будетъ описывать кругъ, центръ котораго лежитъ на qr въ точкѣ С пересѣченія плоскости вращенія точки А съ qr. Проектируемъ точку (А,а) на картинную плоскость (опускаемъ изъ этой точки перпендикуляръ на плоскость $x_1 z_1$; проекція его параллельна oy). Черезъ a' проходитъ слѣдъ плоскости врашенія и точка C, лежащая въ плоскости вращенія (параллельной x_1y_1) и на оси qr, будетъ искомымъ центромъ вращенія. Совмѣщенное положеніе точки (A,a) находится на Ca'. Для построенія его нужно отъ точки C отложить длину радіуса вращенія, т.е. натуральную длину разстоянія AC. Чтобы ее найти, совмѣщаемъ треугольникъ CAa', вращеніемъ около Ca', съ картинной плоскостью. Прямая Aa' займетъ положеніе A_0a', причемъ длина A_0a' равна натуральной длинѣ Aa' (на нашемъ чертежѣ $A_0a' = 2Aa'$, такъ какъ показатель сокращенія$=\frac{1}{2}$). Отрѣзокъ CA_0 выражаетъ истинную длину радіуса вращенія, а точка A_1 - совмѣщенное положеніе точки (A,a).

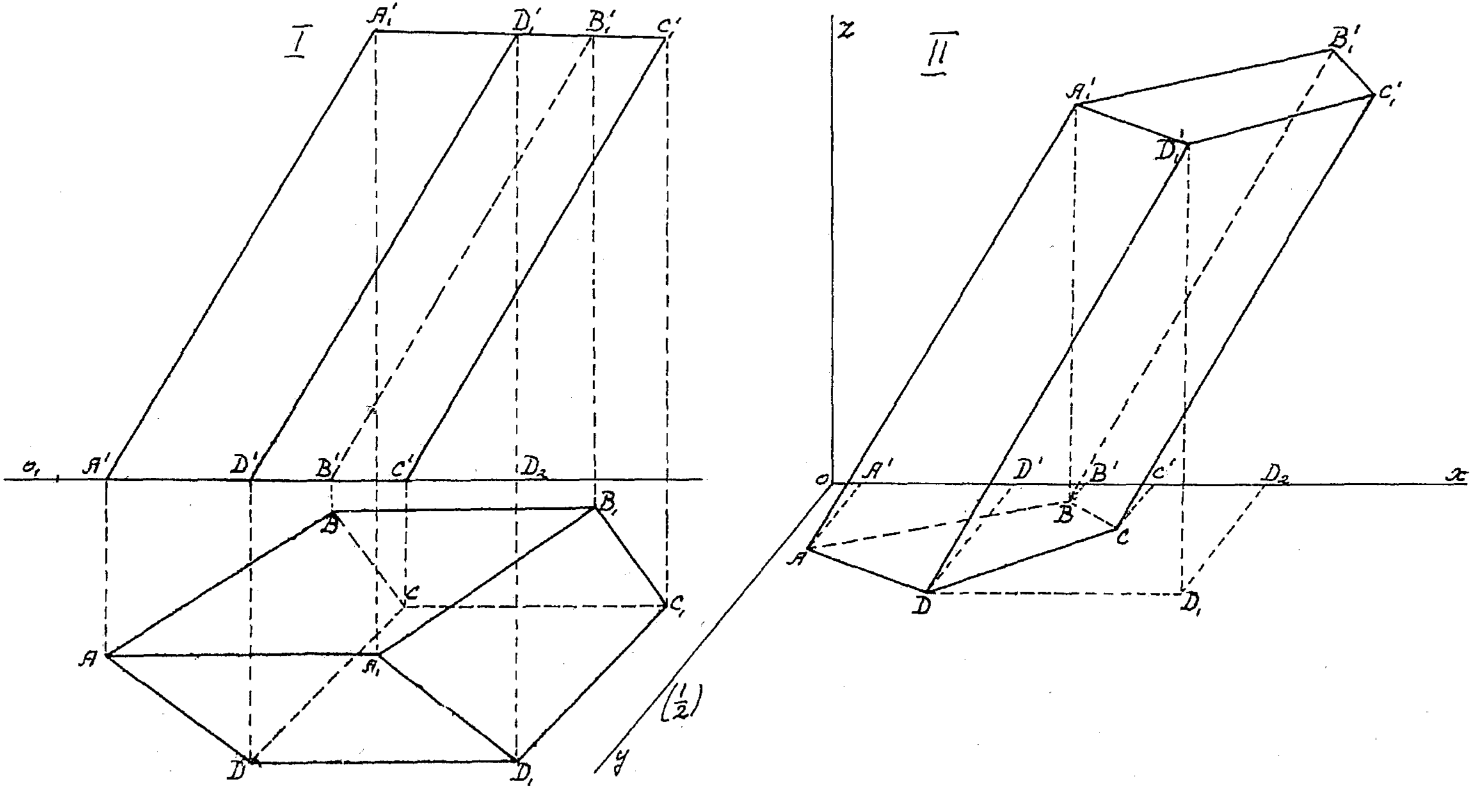
Для построенія проекцій точки (A,a) по ея совмѣщенному положенію A_1, мы изъ A_1 опускаемъ на qr перпендикуляръ и изъ основанія C этого перпендикуляра проводимъ прямую CA, параллельную qp, на которой и будетъ находиться аксонометрическая проекція точки. Чтобы найти длину CA, равную сокращенной длинѣ CA_1, беремъ на AC точку M и опускаемъ изъ нея перпендикуляръ Mm' на картинную плоскость x_1z_1. Совмѣщаемъ треугольникъ CMm' съ картинной плоскостью. Такъ какъ онъ прямоугольный, то Mm' займетъ положеніе M_0m', перпендикулярное къ Cm; разстояніе $M_0m' = 2Mm'$ равно истинной длинѣ отрѣзка Mm'. Затѣмъ на продолженіи прямой CM_0 откладываемъ $CA_0 = CA_1$. Соединяемъ M съ M_0 и проводимъ AA_0 параллельно MM_0. Точка (A,a) будетъ искомой.

Зная точку A_0, мы можемъ построить точку A_1, иначе: опускаемъ изъ A_0 перпендикуляръ A_0a' на CA_1; точка a' будетъ основанiемъ перпендикуляра, опущеннаго изъ A на картинную плоскость. Если этотъ перпендикуляръ построимъ (проведемъ Aa' параллельно oy), то точка его пересѣченiя съ CM - будетъ искомой.

Если въ данной плоскости есть нѣсколько точекъ, которыя должны быть совмѣщены, или если по совмѣщеннымъ положенiямъ нѣсколькихъ точекъ одной и той же плоскости требуется построить ихъ проекцiи, то удобно пользоваться масштабомъ сокращенiя (не сокращенiя, происходящаго по оси у-ковъ, а сокращенiя длинъ CM_o, CA_o и другихъ подобныхъ имъ, при приведенiи плоскости A_1CA_o въ положенiе, перпендикулярное къ картинной плоскости). Для построенiя масштаба берутъ произвольный уголъ LPQ (черт.340) и на одной сторонѣ его откладываютъ $PM' = CM$, а на другой $PM_o' = CM_o$. Если бы было нужно построить истинную длину отрѣзка CA, то мы отложили бы на PQ часть $PA' = CA$ и провели бы $A_o'A'$ параллельно $M_o'M'$ до встрѣчи съ PL. Отрѣзокъ PA_o' равнялся бы CA_1, такъ какъ $\frac{PA_o'}{PA'} = \frac{PM_o'}{PM'}$. Для нахожденiя сокращенной длины AC по ея истинной длинѣ A_oC мы должны были бы отложить $PA_o' = CA_o$ на сторонѣ PL. Проведя $A_o'A'$ параллельно $M_o'M'$, мы получили бы сокращенную длину PA' отрѣзка PA_o', или, все равно, CA_o.

А К С О Н О М Е Т Р И Ч Е С К А Я П Р О Е К Ц І Я Т Ѣ Л А.

Пусть требуется построить аксонометрическую проекцiю призмы, данной ортогональными проекцiями (черт.341, I) на


I
II
A_1'
D_1'
B_1'
C_1'
O_1
A'
D'
B'
C'
D_2
B
B_1
C
C_1
A
A_1
D
D_1
$\left(\frac{1}{2}\right)$
y
z
O
x

Черт. 341.

плоскостяхъ x_1y_1 и x_1z_1. Точку o_1 и плоскость $y_1o_1z_1$ (черт. 341, II - o и плоскость yoz) мы можемъ выбирать произвольно. Находимъ аксонометрическую проекцію основанія ABCD, лежащаго на плоскости x_1y_1. Разстоянія oA', oB', oC' и oD' сохраняютъ свои размѣры въ аксонометрической проекціи, и потому мы просто откладываемъ ихъ на оси ox (черт. 341, II). Линіи AA', BB' и т.д. перпендикулярны къ o_1x_1, т.е. параллельны o_1y_1, и длина ихъ, данная на I-мъ чертежѣ, сокращается во второмъ - вдвое (показатель сокращенія принятъ равнымъ $^1/_2$). Поэтому мы проводимъ на II-омъ чертежѣ AA' параллельно oy и откладываемъ $AA' = {}^1/_2\, AA'$ (на первомъ чертежѣ). Такимъ же образомъ мы строимъ проекціи вершинъ B, C и D; соединивъ ихъ между собою, получимъ аксонометрическую проекцію основанія призмы. Для построенія аксонометрической проекціи боковыхъ реберъ призмы поступаемъ такъ: строимъ аксонометрическую проекцію одной изъ вершинъ верхняго основанія, напримѣръ D_1, D_1'; для этого отъ o (черт. II) отложимъ $oD_2 = o_1D_2$ (на черт. I); черезъ D_2 проводимъ параллель oy и на ней откладываемъ длину $D_1D_2 = {}^1/_2\, D_2D_1$ перваго чертежа, а на параллели oz, проведенной изъ D_1, отложимъ длину D_2D_1' съ перваго чертежа; построенная точка D_1' будетъ искомой. Соединивъ точки D и D_1', получимъ аксонометрическую проекцію бокового ребра DD_1'. Если изъ точекъ основанія A, B и C проведемъ параллели DD_1', а изъ D_1' проведемъ $D_1'C_1'$ параллельно DC, изъ C_1' - $C_1'B_1'$ параллельно CB и т.д., то получимъ аксонометрическую проекцію, какъ боковыхъ реберъ, такъ и реберъ верхняго основанія, а слѣдовательно и данной призмы.

Призма обыкновенно дается аксонометрической проекціею самой призмы и вторичною проекціею (напр. DD_1) одного изъ боковыхъ реберъ, такъ какъ по этимъ даннымъ легко рѣшить всякій вопросъ, относящійся къ данной призмѣ.

ПОСТРОЕНІЕ АКСОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОЕКЦІИ ЦИЛИНДРА.

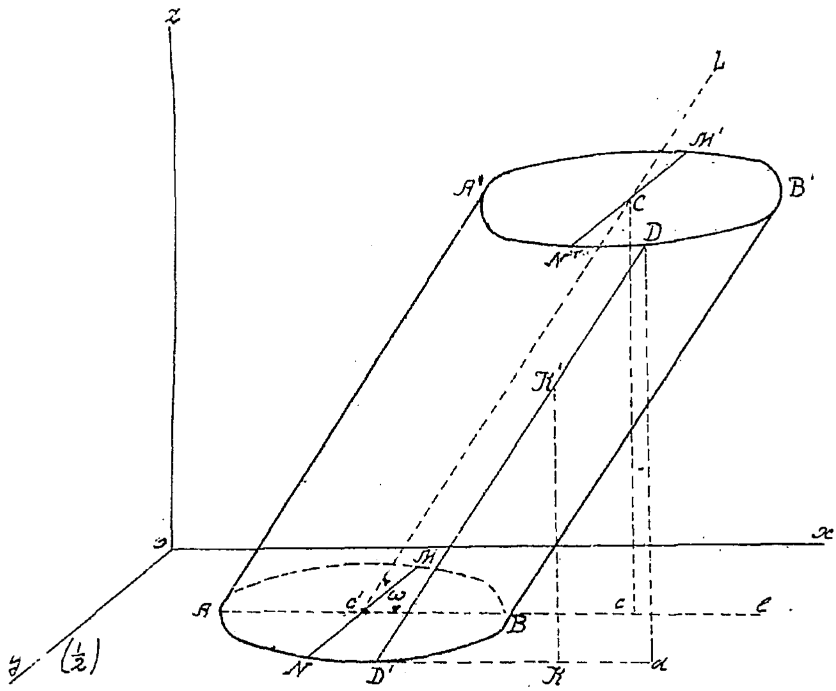
Построимъ аксонометрическую проекцію цилиндра по радіусу основанія, высотѣ, углу ω наклоненія оси къ плоскости основанія, полагая, что цилиндръ поставленъ на горизонтальную координатную плоскость и ось его параллельна картинной плоскости.

Построимъ аксонометрическую проекцію основанія. Для этого совмѣстимъ плоскость x_1y_1 (черт.342) съ картинной плоскостью вращеніемъ около o_1x_1; опишемъ на ней окружность и приведемъ плоскость x_1y_1 въ прежнее положеніе. Окружность выразится при этомъ эллипсомъ AMBD'N.

Проведемъ черезъ центръ c' эллипса прямую $c'\ell$ параллельно oX и c'L такъ, чтобы уголъ $Lc'\ell$ былъ равенъ ω. Линіи c'L и $c'\ell$ будутъ аксонометрической и вторичной проекціями оси цилиндра (ось цилиндра параллельна x_1z_1, слѣдовательно ея вторичная проекція параллельна oX и уголъ ω проектируется на картинную плоскость въ натуральную величину).

На оси $(c'L, c'\ell)$ выбираемъ точку C,c) такъ, чтобы

ТИПО-ЛИТ. Ю. ВЕНЕРЪ ПРЕЕМН. О. ФАЛЬКЪ.
листъ 29-й.



Черт.342.

разстояніе Cc отъ горизонтальной плоскости равнялось высотѣ h; тогда C - аксонометрическая, а c - вторичная проекція центра верхняго основанія цилиндра.

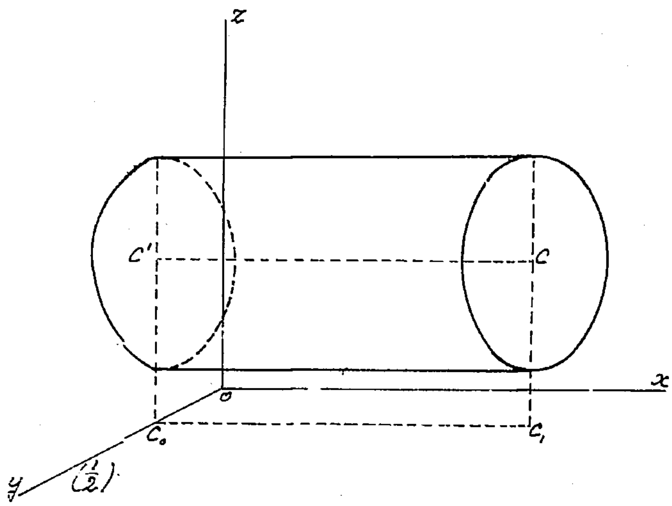
Чтобы получить проекцію окружности верхняго основанія цилиндра, мы проводимъ черезъ c' различныя хорды (среди нихъ AB параллел. ox и MN паралл. oy), а черезъ C - прямыя, имъ равныя и параллельныя); соединивъ концы этихъ прямыхъ, мы получимъ эллипсъ, который будетъ проекціей верхняго основанія.

Зная проекціи оси и основаній цилиндра, можно считать задачу о построеніи проекціи цилиндрической поверхности законченной; но для наглядности изображенія строятъ крайнія образующія (отдѣляющія видимую часть поверхности отъ невидимой). Въ пространствѣ онѣ находятся такъ: къ цилиндру проводятъ касательныя плоскости, параллельныя направленію луча зрѣнія, и замѣчаютъ образующія прикосновенія, которыя и будутъ искомыми. Эти образующія будутъ проходить черезъ тѣ точки основанія цилиндра, въ которыхъ слѣды касательныхъ плоскостей будутъ касаться основанія цилиндра. Касательная плоскость къ цилиндру, проведенная параллельно направленію луча зрѣнія, будетъ проектирующею плоскостью для всѣхъ точекъ и линій, лежащихъ въ ней (слѣдовательно и для образующихъ касанія и для слѣда касательной плоскости). Поэтому аксонометрическія проекціи слѣдовъ (горизонтальныхъ) касательныхъ плоскостей и образующихъ прикосновенія совпадаютъ съ AA' и BB', и мы можемъ получить проекціи этихъ образующихъ, проведя къ эллипсамъ основанія цилиндра касательныя линіи (условіе, которому удовлетворяетъ слѣдъ касательной плоскости) параллельно c'L (условіе, которому удовлетворяютъ всѣ образующія цилиндра). Эти касательныя и будутъ служить очерками боковой поверхности цилиндра. Вторичныя проекціи образующихъ цилиндръ будутъ параллельны ox.

Цилиндрическая поверхность задается обыкновенно аксонометрической проекціей самаго цилиндра и вторичной проекціей одной изъ образующихъ, но для рѣшенія задачъ достаточно знать аксонометрическую проекцію цилиндра и вторичную проекцію центра верхняго основанія.

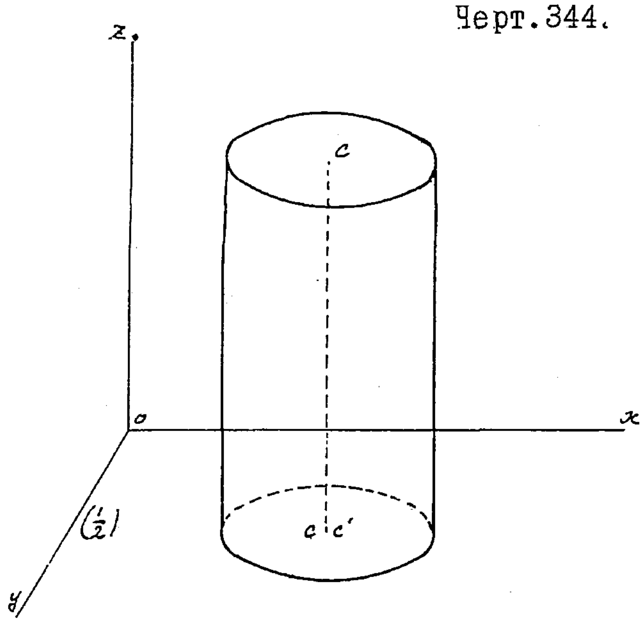
Чтобы построить на поверхности цилиндра точку, проводимъ на поверхности произвольную образующую (DD', dD'), причемъ обѣ проекціи ея параллельны оси цилиндра, и на ней беремъ точку (K, K').

Черт.343.



Черт.343 изображаетъ прямой цилиндръ, поставленный на плоскость $z_1 y_1$. Для построенія основанія на плоскости zy, нужно послѣднюю совмѣстить съ картинной плоскостью zx, на которой построить основаніе и потомъ плоскость возвратить въ прежнее положеніе.

Черт.344.

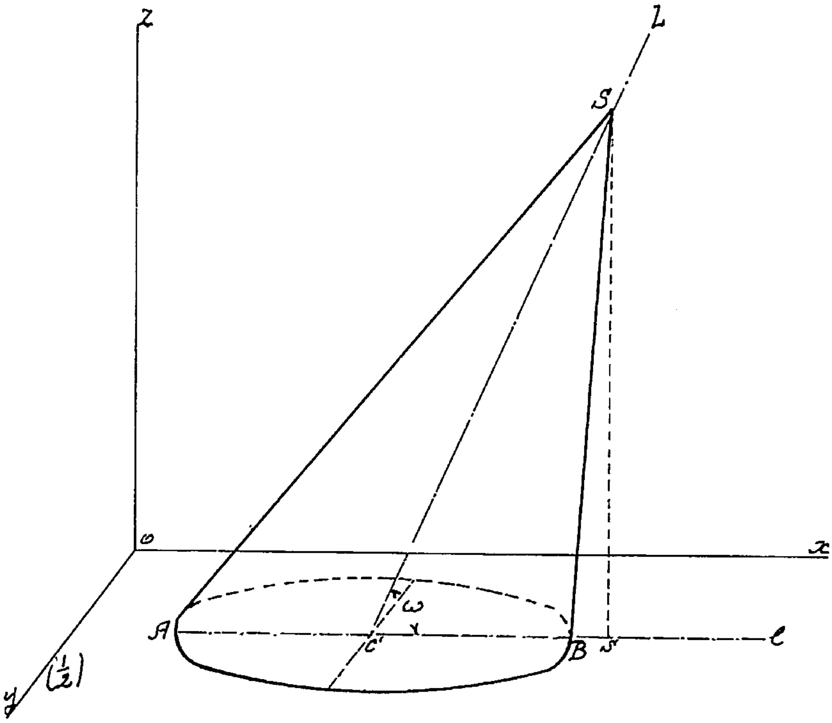


Если бы прямой цилиндръ былъ поставленъ на горизонтальную плоскость (чер.344), то аксонометрическія проекціи его образующихъ были бы параллельны oz.

Построимъ проекціи К О Н У С А по радіусу основанія, высотѣ, углу ω между осью и плоскостью основанія, если основаніе находится на горизонтальной плоскости, а ось параллельна картинной.

Строимъ проекціи основанія и оси конуса, какъ ихъ строили для цилиндра. На оси ($c'L$, $c'\ell$) (черт.345) выбираемъ

Черт.345.

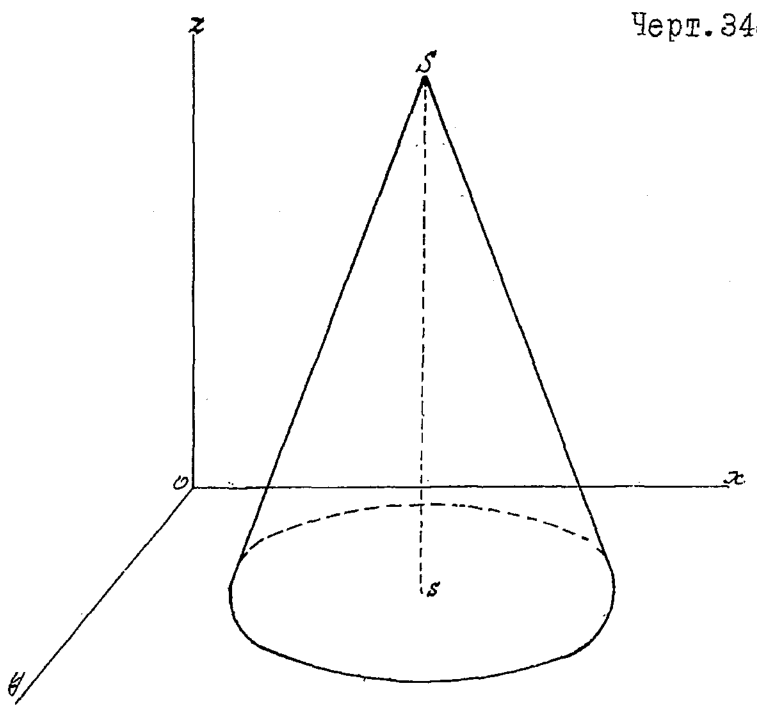


точку (S, s), разстояніе Ss которой отъ горизонтальной плоскости x, y, равняется данной высотѣ h; тогда S - аксонометрическая, а s - вторичная проекція вершины конуса.

Для построенія крайнихъ образующихъ проводятъ къ конусу касательныя плоскости, параллельныя направленію луча зрѣнія. Для этого проводятъ черезъ вершину конуса прямую, параллельную направленію луча, находятъ слѣдъ ея на плоскости основанія и изъ полученной точки проводятъ касательныя къ основанію конуса, которыя будутъ слѣдами касательныхъ плоскостей на плоскости основанія конуса. Въ аксонометріи прямая, проведенная черезъ вершину параллельно лучу зрѣнія, т.е. параллельно направленію проектированія, будетъ проектирующей линіей всѣхъ ея точекъ (слѣдовательно, и вершины и слѣда ея на плоскости основанія конуса). Поэтому въ аксонометрической проекціи вершина конуса и горизонтальный слѣдъ прямой, параллельной лучу зрѣнія, сливаются. Если черезъ сказанную прямую проведемъ касательныя плоскости къ конусу, то онѣ будутъ проектирующими плоскостями для всѣхъ линій, въ нихъ лежащихъ (слѣдовательно, и образующихъ касанія и слѣдовъ касательныхъ плоскостей). Поэтому аксонометрическія проекціи образующихъ касанія сливаются съ аксонометрическими проекціями слѣдовъ и, слѣдовательно, должны касаться аксонометрической проекціи основанія конуса. Такія образующія суть AS и BS, а ихъ вторичныя проекціи - As и Bs.

По двумъ проекціямъ вершины и проекціи основанія мы можемъ построить любую точку поверхности (это обстоятельство указываетъ на достаточность этихъ условій для заданія конуса).

Если бы конусъ былъ прямой (черт.346), то вторичная проекція вершины попала бы въ центръ основанія.

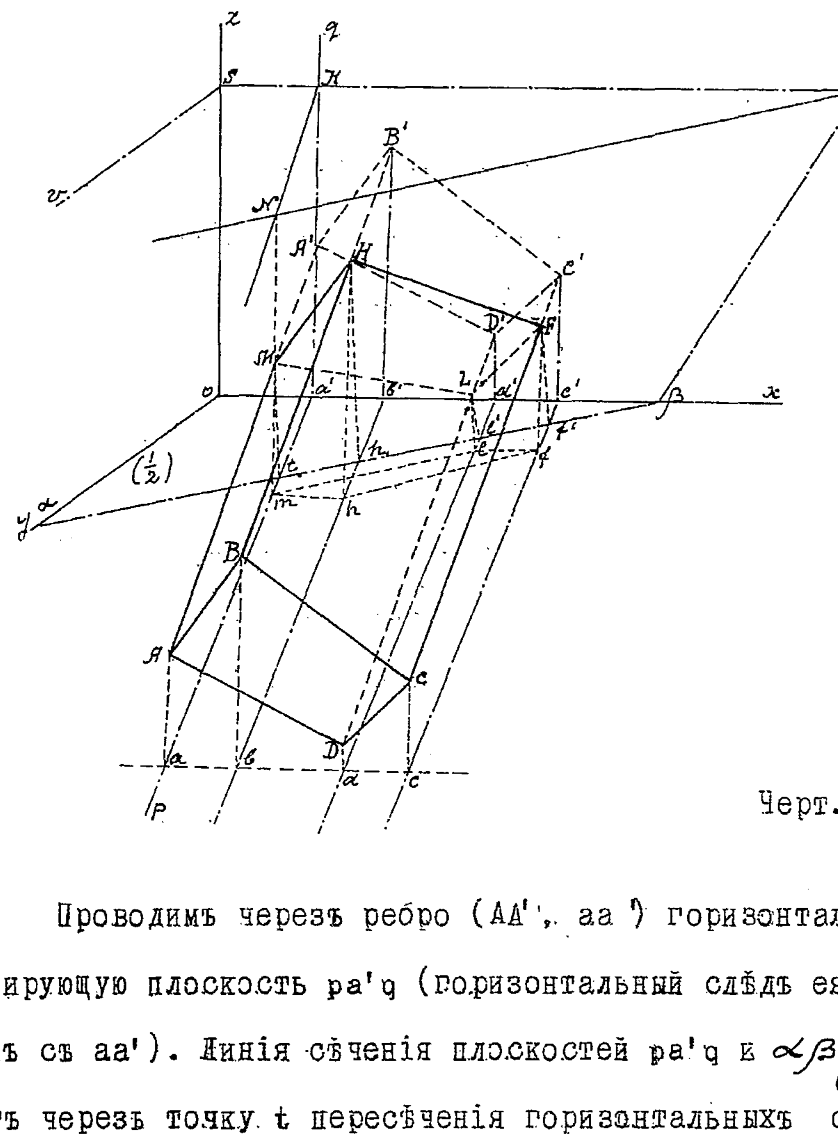


Черт.346.

СѢЧЕНІЕ ПРИЗМЫ ПЛОСКОСТЬЮ.

Пусть призма дана аксонометрическими проекціями основаній

ABCD и A'B'C'D' и ихъ вторичными проекціями abcd и a'b'c'd'; тогда аксонометрическими проекціями боковыхъ реберъ будутъ служить прямыя AA', BB', CC' ....., а ихъ вторичными проекціями - прямыя: aa', bb', cc' .... Построимъ аксонометрическую проекцію сѣченія этой призмы плоскостью $\alpha\beta\gamma$. Для этого найдемъ точки встрѣчи реберъ съ данной плоскостью (черт.347).



Черт.347.

Проводимъ черезъ ребро (AA', aa') горизонтально-проектирующую плоскость pa'q (горизонтальный слѣдъ ея совпадетъ съ aa'). Линія сѣченія плоскостей pa'q и $\alpha\beta\gamma$ пройдетъ черезъ точку t пересѣченія горизонтальныхъ слѣдовъ. Для нахожденія другой точки, принадлежащей линіи сѣченія, проводимъ вспомогательную плоскость vsp параллельно x_1y_1.

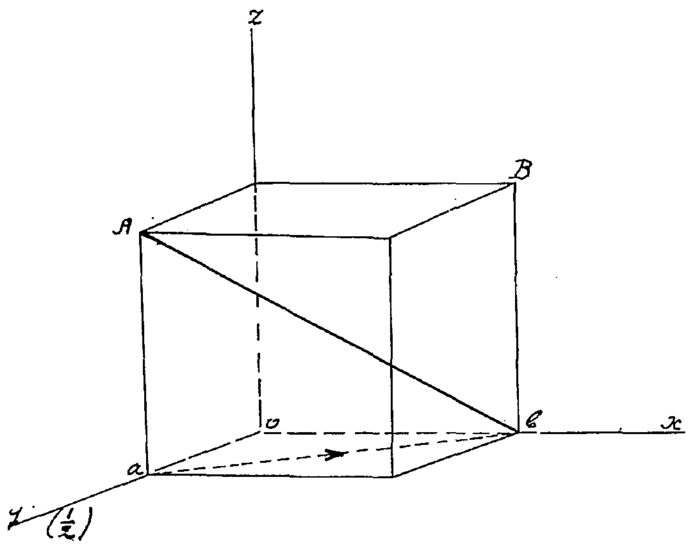
Сѣченіе ея съ $pa'q$ есть прямая NK, параллельная aa', а съ плоскостью $\alpha\beta\gamma$ - γN параллел. $\alpha\beta$. Линія Nt есть линія пересѣченія плоскостей $\alpha\beta\gamma$ и $pa'q$, а точка (M, m) есть точка встрѣчи ребра (AA', aa') съ плоскостью $\alpha\beta\gamma$. Линіи сѣченія Hh_1, Ff' и $L\ell'$ горизонтально-проектирующихъ плоскостей, проведенныхъ черезъ другія ребра призмы, съ плоскостью $\alpha\beta\gamma$ будутъ параллельны Nt. Для нахожденія истинной величины сѣченія можемъ совмѣстить плоскость $\alpha\beta\gamma$ съ картинной плоскостью.

Линіи сѣченія различныхъ поверхностей плоскостями и между собою строятся въ аксонометрической проекціи по тѣмъ же правиламъ, какъ и въ ортогональной.

ПОСТРОЕНІЕ ПАДАЮЩИХЪ ТѢНЕЙ ВЪ АКСОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОЕКЦІИ.

Если при построеніи тѣни въ аксонометрической проекціи пользоваться тѣмъ же самымъ направленіемъ лучей свѣта, какое принимается въ проекціи ортогональной, то необходимо построить аксонометрическую проекцію куба и его діагонали; тогда опредѣлится направленіе Ab проекціи самаго луча и ab его вторичной проекціи (черт.348). При такомъ направленіи свѣтового луча тѣнь отъ вертикальнаго отрѣзка Aa будетъ равна длинѣ ab, которая больше Aa. Хотя такое направленіе и можетъ быть принято за направленіе свѣтовыхъ лучей, но въ практикѣ для большей простоты задаются произвольнымъ направленіемъ свѣтовыхъ лучей, съ соблюденіемъ одного условія,

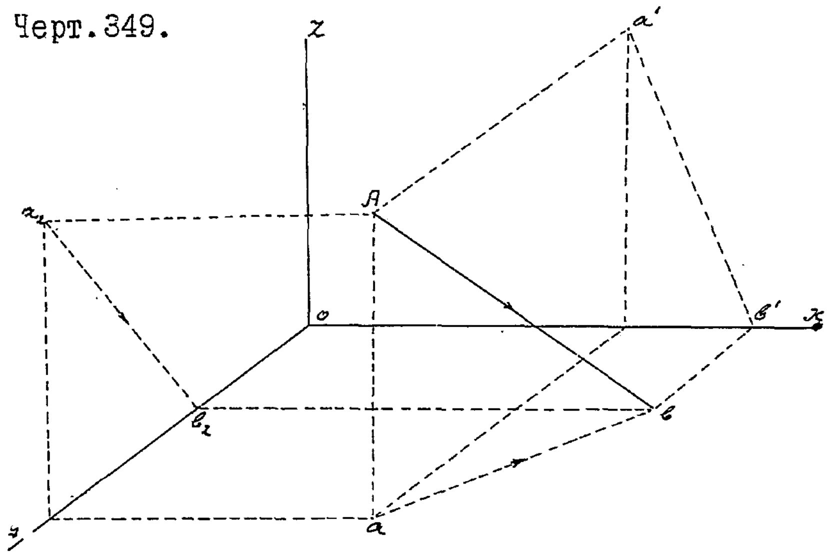
Черт.348.



чтобы длина тѣни, падающей отъ вертикальнаго прямолинейнаго отрѣзка на горизонтальную и вертикальную плоскости, была равна длинѣ самаго отрѣзка.

При параллельномъ направленіи свѣтовыхъ лучей длина тѣни, падающей отъ вертикальнаго отрѣзка на вертикальную плоскость, всегда будетъ равна длинѣ даннаго отрѣзка, но, чтобы соблюсти это условіе относительно горизонтальной плоскости, нужно при выборѣ направленія свѣтового луча поступать такъ: за вторичную проекцію луча (черт.349) принять произвольный

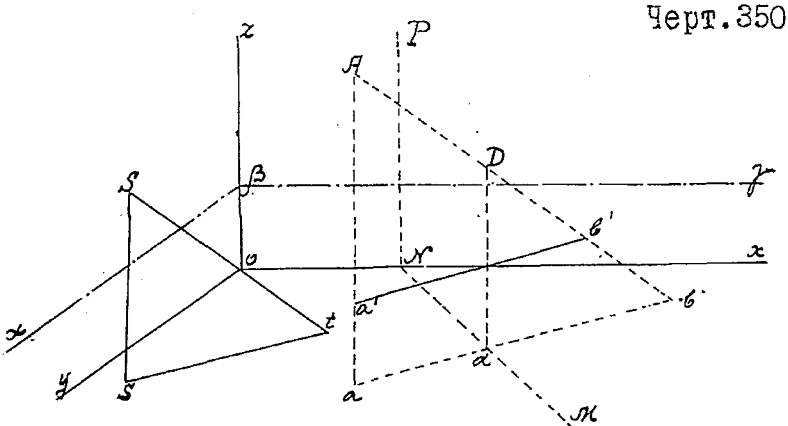
Черт.349.



отрѣзокъ аb, потомъ изъ а провести параллель оси oz и на ней взять отрѣзокъ $Aa = ab$, соединить A съ b и прямую Ab принять за направленіе свѣтовыхъ лучей. Въ такомъ случаѣ всѣ свѣтовые лучи будутъ изображаться прямыми, паралельными Ab, а ихъ вторичныя горизонтальныя проекціи - прямыми, паралельными ab, и притомъ длина тѣни отъ вертикальныхъ отрѣзковъ на горизонтальныхъ и вертикальныхъ плоскостяхъ будетъ равна длинѣ самаго отрѣзка. Вторичныя проекціи луча на картинной плоскости zx и боковой zy будутъ соотвѣтственно паралельны $a'b'$ и a_2b_2.

Дана точка (A, a) и направленіе свѣтовыхъ лучей (St, st); построить падающую тѣнь отъ точки: I) На плоскости xy.

Черезъ A, паралельно St, проводимъ линію Ab (черт. 350), а черезъ a, паралельно st - линію ab; въ точкѣ пересѣченія проведенныхъ линій получимъ падающую тѣнь.



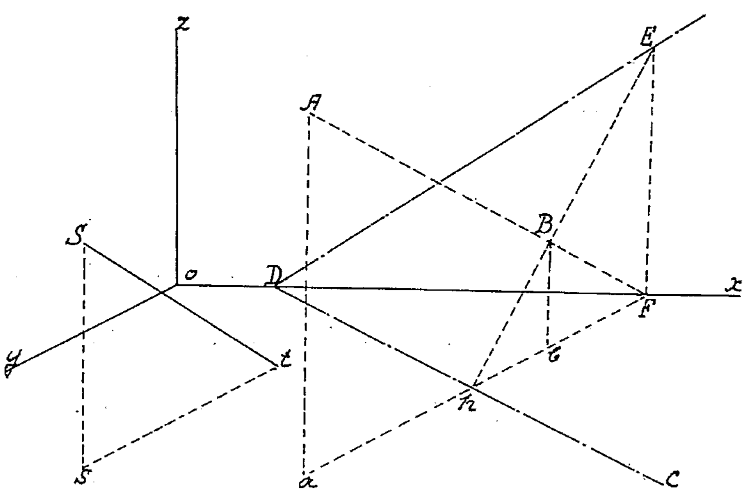
Черт. 350.

II) На горизонтальной плоскости $\alpha\beta\gamma$ (черт. 350). - Найдемъ вторичную проекцію a' точки A на плоскости $\alpha\beta\gamma$, для чего достаточно отъ a отложить длину aa', равную $o\beta$. Черезъ точку A проведемъ Ab паралельно St, а черезъ a' паралельно st - $a'b'$; въ точкѣ b' пересѣченія проведенныхъ линій получимъ падающую тѣнь отъ данной точки.

III) На вертикальной плоскости PNM (черт.350).- Через A параллельно St проведемъ Ab, а черезъ a - ab параллельно st. Черезъ прямую (Ab, ab) вообразимъ вертикальную плоскость, которая пересѣчетъ данную PNM по линіи Dd; въ точкѣ D будетъ падающая тѣнь.

Принимая наше условіе, что Ss = st, можно предыдущія построенія упростить, замѣняя ихъ простымъ откладываніемъ высоты точекъ отъ ихъ вторичныхъ проекцій по линіямъ, параллельнымъ вторичнымъ проекціямъ свѣтовыхъ лучей. Такъ, точка b получится, если отложить ab = Aa; точка b' -, если отложить a'b' = Aa'; наконецъ, точка D -, если отложить ad+Dd= = Aa.

Черт.351.

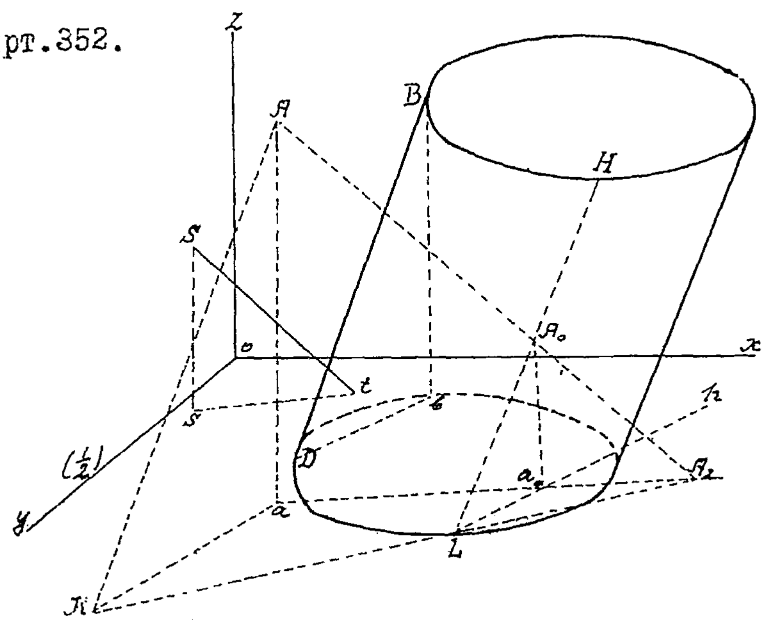


IV) На плоскости CDE (черт.351).- Черезъ A параллельно St проведемъ прямую AB и черезъ a параллельно st-прямую ab; черезъ прямую (AB, ab) вообразимъ вертикальную плоскость aFE, которая пересѣчетъ данную по линіи Eh; точка B пересѣченія линій AB и Eh будетъ падающей тѣнью.

ПОСТРОЕНІЕ ТѢНИ ОТЪ ТОЧКИ НА КРИВЫХЪ ПОВЕРХНОСТЯХЪ.

Въ аксонометрической проекціи падающая тѣнь отъ точки на поверхностяхъ цилиндра и конуса строится такъ же, какъ и въ ортогональной. Построимъ падающую тѣнь отъ точки (A, a) на поверхности цилиндра (черт.352), даннаго аксо-

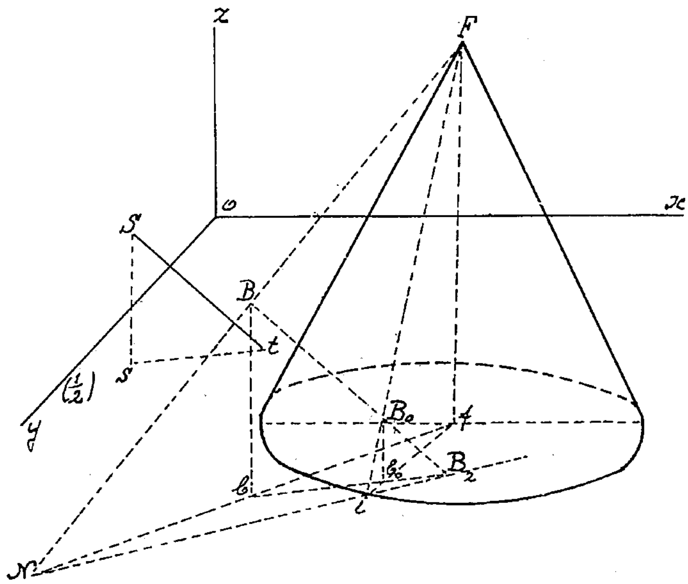
Черт.352.



нометрическими проекціями. Для этого черезъ точки (A, a) проводимъ прямую(AA_2, aA_2) параллельно направленію падающаго луча (St, st) и находимъ точку встрѣчи ея съ поверхностью цилиндра. Для этого черезъ (A, a) проводимъ (AK, aK) параллельно образующей (BD, bD) даннаго цилиндра; плоскость, опредѣляемая прямыми (AA_2, aA_2) и (AK, aK), будетъ имѣть горизонтальнымъ слѣдомъ линію KA_2 и пересѣчетъ цилиндръ по образующей LH, пересѣченіе которой съ проведеннымъ лучемъ AA_2 дастъ искомую точку (A_0, a_0), которая и будетъ тѣнью отъ данной точки(A, a) на поверхности нашего цилиндра.

При построеніи тѣни отъ точки (B, b) на поверхности

Черт.353.

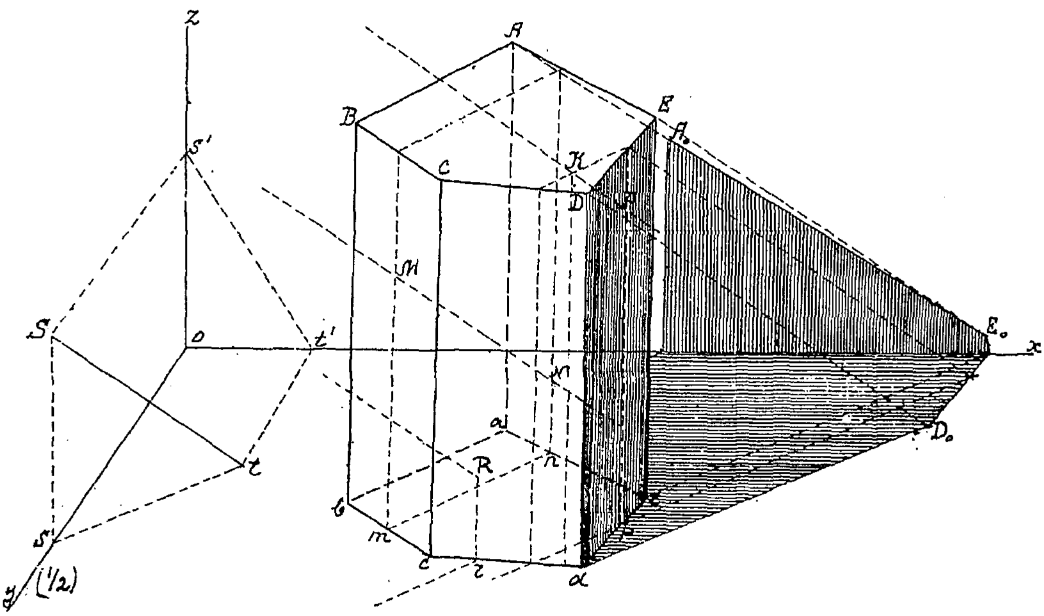


конуса (черт. 353-ій) поступаютъ такъ: черезъ точку (B, b) проводятъ прямую (BB_2, bB_2) параллельно (St, st) и находятъ точку встрѣчи ея съ поверхностью конуса. Для этого черезъ вершину (F, f) конуса и лучъ (BB_2, bB_2) проводятъ плоскость (ея горизонтальный слѣдъ есть прямая B_2N), которая пересѣчетъ конусъ по образующей (Fi, fi); точка встрѣчи послѣдней съ проведеннымъ лучемъ (BB_2, bB_2) опредѣлитъ искомую точку (B_0, b_0).

ПОСТРОЕНІЕ СОБСТВЕННОЙ И ПАДАЮЩЕЙ ТѢНИ ТѢЛЪ ВЪ АКСОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОЕКЦІИ.

Мы знаемъ, что построеніе собственной и падающей тѣни тѣлъ приводится къ построенію линіи отдѣла освѣщенной части отъ неосвѣщенной. Построивъ эту линію, будемъ знать, какая часть тѣла освѣщена и какая находится въ тѣни. Если же отъ этой линіи построимъ тѣнь на плоскостяхъ проекціи или на иныхъ плоскостяхъ, то получимъ падающую тѣнь отъ разсматриваемаго тѣла.

Черт.354.



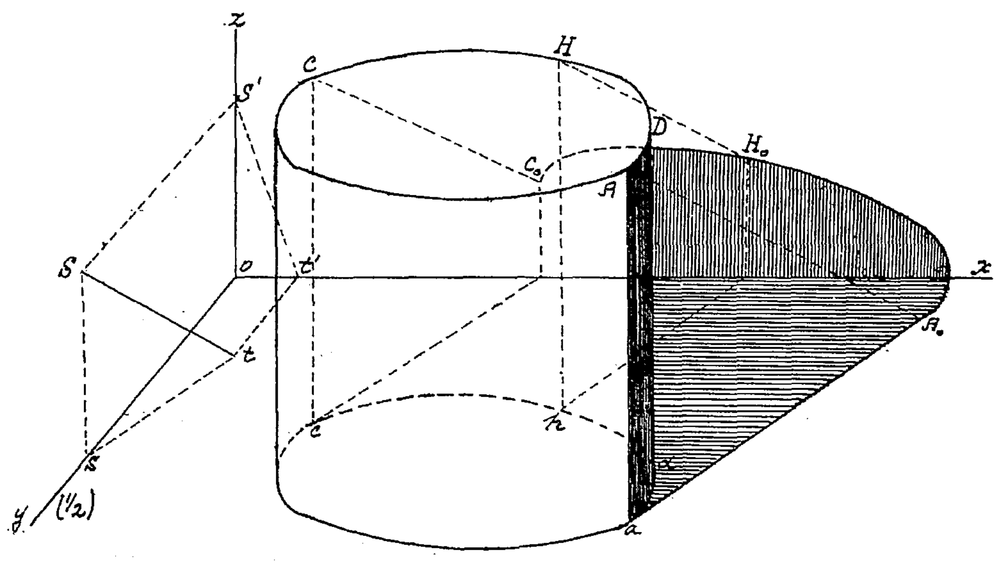
Въ аксонометрической проекціи линія отдѣла строится такъ же, какъ и въ ортогональной проекціи. Для примѣра разсмотримъ построеніе собственной и падающей тѣни, призмы и цилиндра.

Построимъ собственную и падающую тѣнь прямой призмы (ABCDE, abcde), у которой ребра вертикальны, при направленіи свѣтового луча (St, st) (черт.354).

Чтобы опредѣлить освѣщенныя и темныя грани призмы, беремъ на нѣкоторыхъ изъ нихъ точки, какъ напр. (R,r) на грани (CD, cd) и (N,n) на грани (AE, ae) и проводимъ черезъ нихъ свѣтовые лучи; если эти послѣдніе не встрѣтятъ граней призмы, закрывающихъ взятыя точки, то разсматриваемыя точки освѣщены, въ противномъ случаѣ онѣ будутъ находиться въ тѣни. - Освѣщенныя точки будутъ принадлежать и освѣщеннымъ гранямъ, а неосвѣщенныя - темнымъ. Такъ, на черт.354 точка (R,r) освѣщена, а точка (N,n) находится въ тѣни, потому что между нею и источникомъ свѣта находится грань (BC, bc), которая и заслоняетъ эту точку отъ свѣта, прерывая лучъ въ точкѣ (M, m). Поэтому точка (R, r) находится на освѣщенной, а точка (N, n) – на темной грани призмы. Подобно этому обнаружимъ, что верхнее основаніе освѣщено, а грань (DE, ed) находится въ тѣни. Пересѣченіе свѣтлыхъ граней съ темными опредѣлитъ линію отдѣла свѣта отъ тѣни. Ею будетъ служить ломаная линія, образуемая совокупностью реберъ aA, AE, ED, Dd, dc, cb и ba. Построивъ тѣнь отъ точекъ линіи отдѣла, т.е. отъ точки (D, d) – D_o, точки (E, e) – E_o, точки (A, a) – A_o, и соединивъ ихъ прямыми, получимъ искомую падающую тѣнь.

ПОСТРОЕНІЕ СОБСТВЕННОЙ И ПАДАЮЩЕЙ ТѢНИ ПРЯМОГО ЦИЛИНДРА, У КОТОРАГО ОСЬ ВЕРТИКАЛЬНА, – при направленіи лучей (St, st) (черт.355).

Черт.355.



Для построенія линій отдѣла проводимъ къ цилиндру касательныя плоскости, параллельныя направленію свѣтового луча; такихъ плоскостей можно провести двѣ; аксонометрическіе ихъ слѣды на плоскости ху коснутся основанія цилиндра, а сами плоскости коснутся поверхности цилиндра по образующимъ Аа и Сс, которыя раздѣлятъ его поверхность на свѣтлую и темную часть. Эти образующія вмѣстѣ съ отрѣзками окружностей верхняго и нижняго основаній составляютъ линію отдѣла эАНСса. Построивъ тѣнь отъ точекъ этой линіи и соединивъ ихъ, получимъ границу искомой падающей тѣни. Видимая собственная тѣнь цилиндра будетъ заключена между образующими Аа и Dd.

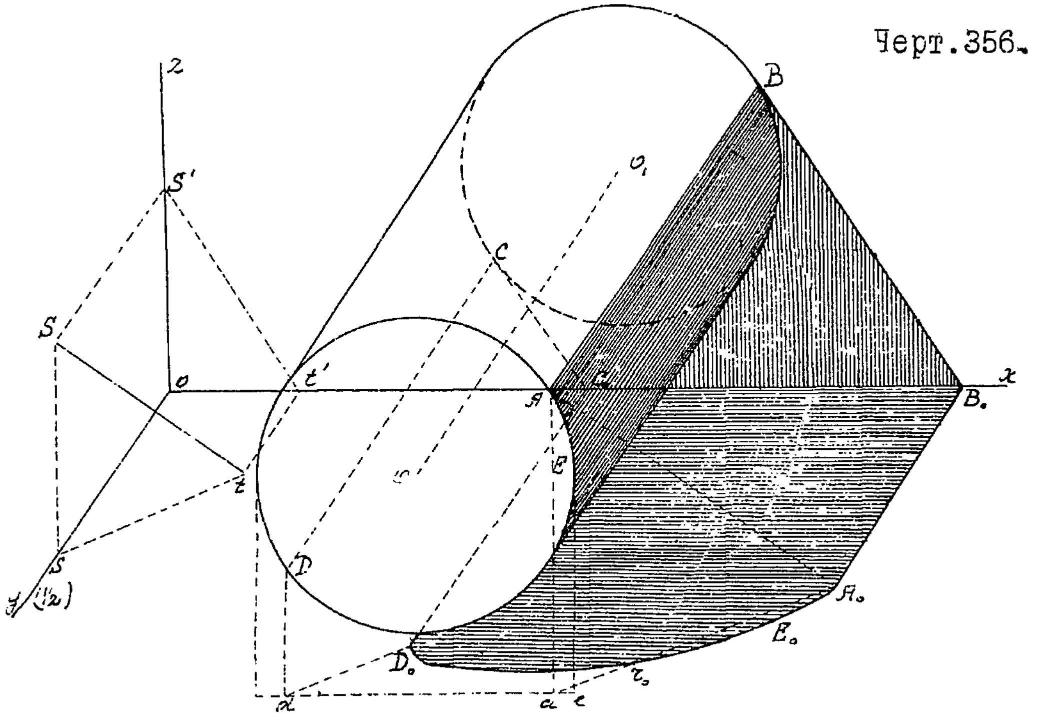
ПОСТРОЕНІЕ СОБСТВЕННОЙ И ПАДАЮЩЕЙ ТѢНИ ПРЯМОГО ЦИЛИНДРА, ПОСТАВЛЕННАГО НА КАРТИННУЮ ПЛОСКОСТЬ.

Ось OO_1 такого цилиндра (черт. 356) будетъ параллельна оси оу. Картинное основаніе цилиндра есть ВС, другое основаніе - АD, а его вторичная проекція на плоскости ху есть прямая de, параллельная ох и равная діаметру круга основанія.

Направленіе лучей дается прямой (St, st).

Для построенія линіи отдѣла проводимъ къ нашему цилиндру касательныя плоскости, параллельныя свѣтовому лучу; картинные слѣды ихъ будутъ параллельны вторичной проекціи S't' луча на картинной плоскости. Поэтому на картинной плоскости къ основанію цилиндра проводимъ касательныя BB_0 и CC_0 параллельно S't', которыя и будутъ слѣдами ка-

Черт. 356.



сательныхъ плоскостей къ поверхности цилиндра; между ними будетъ заключена падающая тѣнь отъ цилиндра на картинной плоскости. Образующія AB и CD раздѣляютъ цилиндръ на свѣтлую и темную части; часть, обращенная къ свѣту - освѣщена, а противоположная - будетъ представлять собственную тѣнь цилиндра. Линія отдѣла будетъ итти по образующей AB, потомъ по дугѣ AED, затѣмъ по образующей CD и по верхней полуокружности основанія цилиндра. Тѣнь отъ образующей AB расположится на картинной плоскости по Bb_0, а на плоскости xy - по B_0A_0 параллел. oy, при чемъ A_0 есть тѣнь отъ точки (A, a). Тѣнь отъ образующей CD будетъ ломаная CC_0D_0 (въ нашемъ случаѣ - невидимая), при чемъ D_0 - тѣнь отъ точки (D, d). Построивъ по точкамъ тѣнь отъ дуги AED, получимъ кривую $A_0E_0D_0$, окончательно ограничивающую тѣнь на плоскости xy.

КОНЕЦЪ.

О Г Л А В Л Е Н І Е.

Стр.